Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Quelques propositions concernant les bases du groupe symétrique et du groupe alternant.

Autor: Piccard, Sophie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12797

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Quelques propositions concernant les bases du groupe symétrique et du groupe alternant

Par Sophie Piccard, Neuchâtel

I°

Il existe, pour toute valeur de l'entier $n \geqslant 3$ ($n \geqslant 4$), des couples de substitutions S, T faisant partie du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ d'ordre $n!$ (du groupe alternant $\mathfrak{A}_n$ d'ordre $n!/2$), tels que toute substitution R du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) peut être obtenue en composant les deux substitutions S et T. Nous appelons *base* du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) tout couple de substitutions S, T jouissant de cette propriété.

Nous désignerons, en général, par les nombres $1, 2, \ldots, n$ les éléments d'une substitution de degré n.

Comme nous l'avons démontré ailleurs, quel que soit le nombre entier $n \geqslant 3$ ($n \geqslant 4$), il existe pour toute substitution non identique S du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) au moins une substitution T du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) qui forme avec S une base du groupe considéré, à l'exception des trois substitutions $(1\ 2)\ (3\ 4)$, $(1\ 3)\ (2\ 4)$, $(1\ 4)\ (2\ 3)$ qui ne font partie d'aucune base du groupe $\mathfrak{S}_4$.

D'autre part, quel que soit le nombre entier $n \geqslant 3$ ($n \geqslant 4$), le nombre total de bases du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) est un multiple de $n!/2$ ($n!/4$).

Nous disons que deux substitutions S, T du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) sont *connexes* s'il n'existe aucun vrai sous-ensemble de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ qui est transformé en lui-même aussi bien par la substitution S que par la substitution T. On voit immédiatement qu'une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que deux substitutions S, T du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) puissent constituer une base de ce groupe, c'est qu'elles soient connexes.

Nous disons que deux substitutions connexes S, T du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) sont *imprimitives* si l'on peut décomposer l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ en $m > 1$ sous-ensembles disjoints $E_1, E_2, \ldots, E_m (E_1 + E_2 + \cdots + E_m = E)$, comprenant chacun un même nombre $l > 1$ d'éléments, de façon que la substitution S aussi bien que la substitution T transforme chaque ensemble $E_i (1 \leqslant i \leqslant m)$ en un ensemble $E_j (1 \leqslant j \leqslant m)$. Nous disons que les deux substitutions S, T sont *primitives* dans le cas contraire.

D'après cette définition, si n est un nombre premier, deux substitutions connexes du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) sont toujours primitives.

Deux substitutions imprimitives engendrent, comme on voit sans

peine, un groupe imprimitif. Or, le groupe $\mathfrak{S}_n$ aussi bien que le groupe $\mathfrak{A}_n$ sont primitifs. Donc une condition nécessaire pour que deux substitutions S, T du groupe $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$ puissent constituer une base de ce groupe, c'est qu'elles soient primitives. Mais cette condition n'est, en général, pas suffisante. Ainsi les deux substitutions $S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $T = (2\ 3\ 5\ 4)$ sont primitives, mais elles engendrent le groupe métacyclique et ne constituent une base ni de $\mathfrak{S}_5$ ni de $\mathfrak{A}_5$. De même, les deux substitutions $S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $T = (1\ 2)\ (3\ 4)$ sont primitives, mais elles engendrent un groupe d'ordre 120 et ne constituent ni une base de $\mathfrak{S}_6$ ni une base de $\mathfrak{A}_6$.

Le but de la présente note est d'établir quelques critères généraux permettant de discerner des bases du groupe $\mathfrak{S}_n$ et du groupe $\mathfrak{A}_n$.

II°

Soient S, T deux substitutions imprimitives du groupe $\mathfrak{S}_n$ $(\mathfrak{A}_n)$ et soient $E_1, E_2, \ldots, E_m$ $(E_1 + E_2 + \cdots + E_m = \{1, 2, \ldots, n\})$ $m > 1$ ensembles, disjoints deux à deux, comprenant chacun $l > 1$ d'éléments et qui sont transformés les uns dans les autres aussi bien par la substitution S que par la substitution T.

On voit immédiatement que tout cycle d'ordre $> l$ de chacune des substitutions S, T a pour ordre un multiple de l et ce cycle comprend tous les éléments d'un certain nombre d'ensembles E_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et ne comprend pas d'autres éléments. D'autre part, si un cycle de l'une des substitutions S, T est d'ordre $< l$, tous les éléments de ce cycle appartiennent nécessairement à un même ensemble E_i et tous les autres éléments de cet ensemble E_i font alors nécessairement partie de cycles d'ordre $< l$ de S ou de T, ne comprenant aucun élément d'un ensemble E_j $(j \neq i)$. En outre, si $C = (a_1\, a_2 \ldots a_r)$ est un cycle d'ordre $r = r'l (r' > 1)$ de S ou de T, quel que soit le nombre entier i compris au sens large entre 1 et r', il existe un indice $j (1 \leqslant j \leqslant m)$, tel que $E_j = \{a_i, a_{i+r'}, a_{i+2r'}, \ldots, a_{i+(l-1)r'}\}$.

Les substitutions S, T étant connexes, quel que soit l'indice $i (1 \leqslant i \leqslant m)$, l'une au moins des substitutions S, T contient un cycle d'ordre $\geqslant 2l$, comprenant tous les éléments de l'ensemble E_i qui est transformé en un ensemble E_j $(j \neq i, 1 \leqslant j \leqslant m)$.

Il peut d'ailleurs arriver que tous les cycles de l'une des substitutions S, T soient d'ordre $< l$. Tous les cycles de la seconde de ces substitutions sont alors d'ordre $\geqslant 2l$.

Soit $S = (1\ 2\ 3\ 4)$. Les substitutions du groupe $\mathfrak{S}_4$ imprimitives

avec S sont les suivantes: $(1\ 2\ 3\ 4)$, $(1\ 4\ 3\ 2)$, $(1\ 2)\ (3\ 4)$, $(1\ 3)\ (2\ 4)$, $(1\ 4)\ (2\ 3)$, $(1\ 3)$, $(2\ 4)$, 1.

Deux substitutions primitives du groupe $\mathfrak{S}_4$ ($\mathfrak{A}_4$) constituent toujours une base de ce groupe.

Quel que soit le nombre entier composé $n \geqslant 4$ et quel que soit le diviseur m $(1 < m < n)$ de n, les deux substitutions $S = (1\ 2 \dots n)$, $T = (m+1\ 2\ 3 \dots m\ 1\ m+2 \dots n)$ ne sauraient constituer une base ni de $\mathfrak{S}_n$ ni de $\mathfrak{A}_n$. En effet, soit $n = l\,m$ $(l > 1)$. Posons $E_i = \{i, i+m, \dots, i+(l-1)\,m\}$, pour $i = 1, 2, \dots, m$. Les deux substitutions S et T transforment les ensembles E_i les uns dans les autres. Elles sont donc imprimitives, ce qui justifie notre remarque.

On démontre sans peine que quels que soient les nombres entiers $m > 1$ et $n > m$ ainsi que les m nombres $a_1, a_2, \dots, a_m$ de la suite $1, 2, \dots, n$ (dont a_1 est le plus petit), si le plus grand commun diviseur $D(n, m)$ des deux nombres n et m est $= 1$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \dots n)$, $T = (a_1 a_2 \dots a_m)$ soient imprimitives, c'est que $D(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_m - a_1, n) > 1$. Si $D(n, m) > 1$, la condition précédente est encore suffisante pour que les deux substitutions S, T soient imprimitives, mais elle n'est pas nécessaire, comme le prouve l'exemple suivant. Soit $S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $T = (1\ 2\ 4\ 5)$. On a $m = 4$, $n = 6$, $D(2-1, 4-1, 5-1, 6) = 1$. Or, les deux substitutions S, T sont imprimitives puisqu'elles transforment chacun des ensembles du système $E_1 = \{1, 4\}$, $E_2 = \{2, 5\}$, $E_3 = \{3, 6\}$ en un ensemble du même système.

Donc, quels que soient les nombres entiers $m > 1$, $n > m$ ainsi que les m nombres $a_1, a_2, \dots, a_m$ de la suite $1, 2, \dots, n$, si $D(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_m - a_1, n) > 1$, les deux substitutions $S = (1\ 2 \dots n)$, $T = (a_1 a_2 \dots a_m)$ ne sauraient constituer une base du groupe $\mathfrak{S}_n$ ni du groupe $\mathfrak{A}_n$.

En particulier, quel que soit le nombre pair $n \geqslant 4$, si T est une substitution de $\mathfrak{S}_n$, telle que tous les éléments de chaque cycle de T sont simultanément des nombres pairs ou simultanément des nombres impairs, les deux substitutions T et $S = (1\ 2 \dots n)$ ne sauraient constituer une base de $\mathfrak{S}_n$.

Quel que soit le nombre entier composé $n = lm$ $(l > 1, m > 1)$, les deux substitutions $S = (1\ 2 \dots n)$, $T = (1\ 2 \dots m)\ (m+1 \dots 2m) \dots ((l-1)\,m+1 \dots lm)$ dont la première est circulaire et la seconde est régulière d'ordre m, ne sauraient constituer une base du groupe $\mathfrak{S}_n$ ni du groupe $\mathfrak{A}_n$.

En effet, ces deux substitutions sont imprimitives. Elles transforment

les ensembles $E_i = \{i, i+m, \ldots, i+(l-1)m\}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, les uns dans les autres.

Quel que soit le nombre entier composé $n = lm = jk$ $(l > 1, m > 1, j > 1, k > 1, m \neq k)$, si $D(m, k) = r > 1$, les deux substitutions régulières connexes de degré n: $S = (1\ 2 \ldots m)\ (m+1 \ldots 2m) \ldots ((l-1)m+1 \ldots lm)$, $T = (1\ 2 \ldots k)\ (k+1 \ldots 2k) \ldots ((j-1)k+1 \ldots jk)$ ne sauraient constituer une base ni du groupe $\mathfrak{S}_n$ ni du groupe $\mathfrak{A}_n$.

En effet, soit $m = m'r$, $k = k'r$. On a $n = lm'r = jk'r$, donc $lm' = jk' = n'$. Posons $E_i = \{i, i+r, i+2r, \ldots, i+(n'-1)r\}$, $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Chacune des substitutions S, T transforme les ensembles E_i les uns dans les autres. Ces substitutions sont donc imprimitives.

Quels que soient les nombres entiers $r > 1$, $m_1, m_2, \ldots, m_r, a_1, a_2, \ldots, a_r$ $(1 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_r = n,\ m_{i-1} \leqslant a_i \leqslant m_i, i = 1, 2, \ldots, r)$, si

$$*)\quad D(m_1, m_2 - m_1, \ldots, m_r - m_{r-1}) > 1,$$

les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots m_1)\ (m_1+1 \ldots m_2) \ldots (m_{r-1}+1 \ldots m_r)$, $T = (a_1\, a_2 \ldots a_r)$ ne sauraient constituer une base de $\mathfrak{S}_n$ ni de $\mathfrak{A}_n$. En effet, ont voit sans peine que les deux substitutions S, T sont alors imprimitives.

Remarquons que la condition *) est suffisante pour que les deux substitutions S, T soient imprimitives, mais elle n'est pas nécessaire, comme le montre l'exemple suivant:

Soit $S = (1\ 2)\ (3\ 4\ 5)\ (6\ 7)\ (8\ 9\ 10)$, $T = (1\ 3\ 6\ 8)$.

Ces deux substitions sont imprimitives. Elles transforment les uns dans les autres les ensembles $\{1, 6\}$, $\{2, 7\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 9\}$, $\{5, 10\}$. Or, $D(2, 3, 2, 3) = 1$.

Notations. Quels que soient les nombres entiers $r \geqslant 1$, $m_1, m_2, \ldots, m_r$ $(0 = m_0 < m_1 < m_2 < \cdots < m_r = n)$ et quels que soient les deux nombres a et b faisant partie d'un même cycle $C_i = (m_{i-1}+1 \ldots m_i)$ de la substitution $S = (1\ 2 \ldots m_1)\ (m_1+1 \ldots m_2) \ldots (m_{r-1}+1 \ldots m_r)$, nous appellerons *distance* entre a et b et nous désignerons par le symbole $\overline{ab}$ le plus petit nombre entier positif, tel que $a + \overline{ab} \equiv b \pmod{m_i - m_{i-1}}$.

On démontre sans peine les propositions suivantes:

Propositions 1. Quels que soient le nombre entier $n \geqslant 3$ et les deux nombres a, b de la suite $1, 2, \ldots, n$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots n)$, $T = (a\ b)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, c'est qu'elles soient primitives, et,

pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur $D(\overline{ab}, n)$ des deux nombres $\overline{ab}$ et n soit égal à 1.

Proposition 2. Quels que soient les nombres entiers $m \geqslant 1$, $n > m$ et $\geqslant 3$ ainsi que les deux nombres a, b de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont l'un est $\leqslant m$ et l'autre est $> m$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots m)\ (m+1 \ldots n)$, $T = (a\ b)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, c'est que ces deux substitutions soient primitives, et pour cela il faut et il suffit que $D(m, n-m) = 1$.

Proposition 3. Quels que soient le nombre entier $n > 3$ et les trois nombres a, b, c de la suite $1, 2, \ldots, n$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$), si n est pair (impair), c'est qu'elles soient primitives, et pour cela il faut et il suffit que $D(\overline{ab}, \overline{ac}, n) = 1$.

Propositions 4. Quels que soient les nombres entiers $m \geqslant 1$, $n > m$ et > 3 ainsi que les trois nombres a, b, c de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont l'un au moins est $\leqslant m$ et l'un au moins est $> m$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots m)\ (m+1 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) si n est impair (pair), c'est qu'elles soient primitives, et pour cela il faut et il suffit que $D(m, n-m, d) = 1$, d désignant la *distance* entre les deux nombres du système a, b, c qui font partie d'un même cycle de S.

Proposition 5. Quels que soient les nombres entiers $l \geqslant 1$, $m > l$, $n > m$ et > 3 ainsi que les trois nombres entiers a, b, c dont un et un seul appartient à chacun des trois intervalles $< 1, l >$, $< l+1, m >$, $< m+1, n >$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots l)\ (l+1 \ldots m)\ (m+1 \ldots n)$, $T = (a\,b\,c)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) si n est pair (impair), c'est que ces deux substitutions soient primitives, et pour cela il faut et il suffit que $D(l, m-l, n-m) = 1$.

Proposition 6. Quels que soient le nombre entier $n \geqslant 7$ et les quatre nombres a, b, c, d de la suite $1, 2, \ldots, n$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c\ d)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, c'est qu'elles soient primitives, et pour cela il faut et il suffit que $D(\overline{ab}, \overline{ac}, \overline{ad}, n) = 1$ et que l'on n'ait pas simultanément $\overline{ac} = \overline{bd} = \dfrac{n}{2}$.

Proposition 7. Quels que soient les nombres entiers $m \geqslant 2$, $n \geqslant m+2$ et $\geqslant 7$ ainsi que les quatre nombres a, b, c, d de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont deux a, b sont $\leqslant m$ $(> m)$ et deux c, d sont $> m$ $(\leqslant m)$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots m)\ (m+1 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c\ d)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, c'est qu'elles soient primitives et pour cela il faut et il suffit que $D(\overline{ab}, \overline{cd}, m, n-m) = 1$ et que l'on n'ait pas simultanément $\overline{ab} = \overline{cd}$, $\overline{ba} = \overline{dc}$.

Propositions 8. Quels que soient les nombres entiers $m \geqslant 2$, $n \geqslant m+2$ et $\geqslant 7$ ainsi que les quatre nombres a, b, c, d de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont deux a, c sont $\leqslant m$ $(> m)$ et deux b, d sont $> m$ $(\leqslant m)$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots m)\ (m+1 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c\ d)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, c'est qu'elles soient primitives et pour cela il faut et il suffit que $D(\overline{ac}, \overline{bd}, m, n-m) = 1$ et que l'on n'ait pas simultanément $\overline{ac} = \overline{ca}$, $\overline{bd} = \overline{db}$.

Proposition 9. Quels que soient les nombres entiers $m \geqslant 3$, $n > m$ et $\geqslant 7$ ainsi que les quatre nombres a, b, c, d de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont trois a, b, c sont $\leqslant m$ $(> m)$ et le 4me d est $> m$ $(\leqslant m)$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots m)\ (m+1 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c\ d)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, c'est qu'elles soient primitives et pour cela il faut et il suffit que $D(\overline{ab}, \overline{ac}, m, n-m) = 1$.

Proposition 10. Quels que soient les nombres entiers $l \geqslant 2$, $m > l$, $n > m$ et $\geqslant 7$ ainsi que les quatre nombres a, b, c, d de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont deux a, b sont $\leqslant l$, alors que $l+1 \leqslant c \leqslant m$, $m+1 \leqslant d \leqslant n$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots l)\ (l+1 \ldots m)\ (m+1 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c\ d)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, c'est qu'elles soient primitives, et pour cela il faut et il suffit que $D(\overline{ab}, l, m-l, n-m) = 1$.

Proposition 11. Quels que soient les nombres entiers $l \geqslant 2$, $m > l$, $n > m$ et $\geqslant 7$ ainsi que les quatre nombres a, b, c, d de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont deux a, c sont $\leqslant l$ alors que $l+1 \leqslant b \leqslant m$, $m+1 \leqslant d \leqslant n$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots l)\ (l+1 \ldots m)\ (m+1 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c\ d)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, c'est qu'elles soient primitives, et pour cela il faut et il suffit que $D(\overline{ac}, l, m-l, n-m) = 1$ et que l'on n'ait pas simultanément $l = 2\,\overline{ac}$ et $m - l = n - m$.

Proposition 12. Quels que soient les nombres entiers k, l, m, n $(1 \leqslant k < l < m < n, n \geqslant 7)$ ainsi que les quatre nombres a, b, c, d de la suite $1, 2, \ldots, n$, dont un et un seul appartient à chacun des quatre intervalles $<1, k>$, $<k+1, l>$, $<l+1, m>$, $<m+1, n>$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots k)\ (k+1 \ldots l)\ (l+1 \ldots m)\ (m+1 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c\ d)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, c'est qu'elles soient primitives, et pour cela il faut et il suffit que $D(k, l-k, m-l, n-m) = 1$ et que l'on n'ait pas simultanément $k = m-l$, $l-k = n-m$.

Proposition 13. Quels que soient le nombre entier $n \geqslant 9$ ainsi que les cinq nombres a, b, c, d, e de la suite $1, 2, \ldots, n$, la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions non identiques du groupe $\mathfrak{S}_n$ $(\mathfrak{A}_n)$, dont l'une S est quelconque et la seconde $T = (a\ b\ c\ d\ e)$, constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$ $(\mathfrak{A}_n)$, c'est qu'elles soient primitives.

III°

Nous avons établi ailleurs[1]) les lemmes et propositions suivants qui nous seront utiles dans la suite:

Lemme I. Quels que soient le nombre entier $n > 2$ ainsi que les k $(1 < k \leqslant n)$ nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (dont a_1 est le plus petit) de la suite $1, 2, \ldots, n$, si $D(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1, n) = 1$, en composant la substitution $S = (1\ 2 \ldots n)$ avec le groupe symétrique des substitutions des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_k$, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$.

Lemme II. Quels que soient le nombre entier $n \geqslant 4$ ainsi que les k $(2 < k \leqslant n)$ nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (dont a_1 est le plus petit) de la suite $1, 2, \ldots, n$, en composant la substitution $S = (1\ 2 \ldots n)$ avec le groupe alternant des substitutions des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_k$, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est pair, ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est impair.

Proposition I. Quels que soient les nombres entiers $m > 1$, i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et $n > m$, les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots m)$, $T = (i\ m+1 \ldots n)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, si l'un au moins des nombres m, n est pair, ou du groupe $\mathfrak{A}_n$, si ces deux nombres sont impairs.

Proposition II. Quels que soient les nombres entiers $m > 1$, i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ et $n > i$, les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots m)$, $T = (i\ i+1 \ldots n)$, si elles sont distinctes, constituent une base du groupe

[1]) Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 11, 1938—39, fasc. 1. Wiadomosci Matematyczne, t. 47, 1939.

$\mathfrak{S}_{\max.(m,n)}$, si l'un au moins des nombres $m, n-i+1$ est pair, ou une base du groupe $\mathfrak{A}_{\max.(m,n)}$, si ces deux nombres sont impairs, au trois exceptions suivantes près: $(1\ 2\ 3\ 4), (3\ 4\ 5\ 6)$; $(1\ 2\ 3\ 4), (2\ 3\ 4\ 5\ 6)$; $(1\ 2\ 3\ 4\ 5), (3\ 4\ 5\ 6)$.

Proposition III. Quels que soient les nombres entiers $n > 3$, $k \geqslant 1$, $i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$, $r(1 \leqslant r \leqslant n-2)$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots n)$, $T = (i\ i+k\ i+2k \ldots i+rk)$, où les nombres $> n$ doivent être réduits mod. n, constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, si l'un au moins des nombres $n, r+1$ est pair, ou du groupe $\mathfrak{A}_n$, si ces deux nombres sont impairs, c'est que $D(k, n) = 1$.

Passons maintenant à la démonstration de trois nouvelles propositions concernant les bases du groupe symétrique et du groupe alternant.

Proposition 14. Quels que soient le nombre entier $n \geqslant 11$ et les six nombres a, b, c, d, e, f de la suite $1, 2, \ldots, n$, vérifiant les inégalités $1 \leqslant a < b < c < d < e < f \leqslant n$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots n)$, $T = (a\ b\ c\ d\ e\ f)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, c'est qu'elles soient primitives.

Démonstration. Il suffit de prouver que la condition est suffisante. Supposons que les substitutions S, T sont primitives. On voit sans peine que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, lorsque $D(n, 6) = 1$, c'est que *) $D(\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}, \overline{ef}, n) = 1$ et, lorsque $D(n, 6) > 1$, c'est que l'on ait l'égalité *), mais que l'on n'ait pas simultanément les égalités $\overline{ab} = \overline{de}, \overline{bc} = \overline{ef}, \overline{cd} = \overline{fa}$, ni les égalités $\overline{ab} = \overline{cd} = \overline{ef}, \overline{bc} = \overline{de} = \overline{fa}$.

Posons $\overline{ab} = k_1, \overline{bc} = k_2, \overline{cd} = k_3, \overline{de} = k_4, \overline{ef} = k_5, \overline{fa} = k_6$.

On a $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = n$.

Les cas suivants sont à distinguer.

1. Parmi les nombres $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ il y en a un qui est plus petit que les cinq autres. Soit, p. ex., k_1 ce nombre (le raisonnement est tous à fait analogue, quel que soit le plus petit des six nombres k_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

On a $T_1 = S^{k_1}\, T\, S^{-k_1} = (b\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1)$, où b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 sont cinq nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$, différents de a, b, c, d, e, f. Donc T et T_1 engendront, d'après la proposition I, le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent, groupe qui contient le groupe symétrique G des substitutions des éléments a, b, c, d, e, f

et, d'après *) et le lemme I, en composant S avec les substitutions de G, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$. Donc S, T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ dans ce cas.

2. Parmi les nombres $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ il y en a deux égaux entre eux et plus petits que les quatre autres. Il y a lieu de distinguer 3 cas:

$$\text{a)}\ k_i = k_{i+1} \begin{cases} k_{i+2} \\ k_{i+3} \\ k_{i+4} \\ k_{i+5} \end{cases}, \quad \text{b)}\ k_i = k_{i+2} \begin{cases} k_{i+1} \\ k_{i+3} \\ k_{i+4} \\ k_{i+5} \end{cases}, \quad \text{c)}\ k_i = k_{i+3} \begin{cases} k_{i+1} \\ k_{i+2} \\ k_{i+4} \\ k_{i+5} \end{cases},$$

les indices > 6 devant être réduits mod. 6 et i pouvant prendre l'une des valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Le raisonnement étant tout à fait analogue pour les différentes valeurs de i, il suffit de traiter le cas où $i = 1$. Soit

$$\text{a)}\quad k_1 = k_2 \begin{cases} k_3 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{cases}.$$

On a
$$T_1 = S^{k_1}\, T\, S^{-k_1} = (b\ c\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1),$$

où c_1, d_1, e_1, f_1 sont quatre nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$, différents de a, b, c, d, e, f. D'après la proposition II, T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. On en déduit sans peine que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$.

Soit b)
$$k_1 = k_3 \begin{cases} k_2 \\ k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{cases}.$$

On a $T_1 = S^{k_1}\, T\, S^{-k_1} = (b\, b_1\, d\, d_1\, e_1\, f_1)$, où b_1, d_1, e_1, f_1 sont quatre nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$. On vérifie sans peine que T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ aussi dans ce cas.

Soit c)
$$k_1 = k_4 \begin{cases} k_2 \\ k_3 \\ k_5 \\ k_6 \end{cases}.$$

Dans ce cas, les substitutions T et $T_1 = S^{k_1}\, T\, S^{-k_1}$ sont imprimitives et n'engendrent pas le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Envisageons alors les nombres k_2, k_3, k_5, k_6.

Comme les substitutions S, T sont primitives, on ne saurait avoir $k_2 = k_3 = k_5 = k_6$. Trois cas sont possibles:

c_1) Parmi les nombres k_2, k_3, k_5, k_6 il y en a un plus petit que les 3 autres.

c_2) Parmi les nombres k_2, k_3, k_5, k_6 il y en a deux égaux entre eux et plus petits que les deux autres.

c_3) Parmi les nombres k_2, k_3, k_5, k_6 il y en a trois égaux entre eux et plus petits que le 4me.

Envisageons d'abord le cas c_1). Soit, p. ex., k_2 le plus petit des 4 nombres k_2, k_3, k_5, k_6.

Alors

$$T_1 = S^{k_2}\, T\, S^{-k_2} = (a_1\ c\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1)\,,$$

a_1, c_1, d_1, e_1, f_1 désignant cinq nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$. D'après la proposition I, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il en découle que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$.

On traite de façon tout à fait analogue les autres variantes du cas c_1.

Passons maintenant au cas c_2). Il y a lieu de distinguer trois variantes de ces cas.

c_{21}) $k_2 = k_3 \begin{cases} k_5 \\ k_6 \end{cases}$.

On a $T_1 = S^{k_2}\, T\, S^{-k_2} = (a_1\ c\ d\ d_1\ e_1\ f_1)$, où a_1, d_1, e_1, f_1 sont quatre nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$. D'après la proposition II, T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$.

Le cas où $k_5 = k_6 \begin{cases} k_2 \\ k_3 \end{cases}$ se traite de façon tout à fait analogue.

c_{22}) $k_2 = k_5 \begin{cases} k_3 \\ k_6 \end{cases}$. Comme les substitutions S, T sont primitives, on ne saurait avoir $k_3 = k_6$. Supposons, p. ex., que $k_3 < k_6$ (le raisonnement est tout à fait analogue si $k_3 > k_6$). Alors, si $k_3 \neq k_1 + k_2$, on a $T_1 = S^{k_3}\, T\, S^{-k_3} = (a_1\ b_1\ d\ d_1\ e_1\ f_1)$, a_1, b_1, d_1, e_1, f_1 désignant 5 nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$. D'après la proposition I, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent.

Si $k_3 = k_1 + k_2$, on a $T_1 = S^{k_3}\, T\, S^{-k_3} = (c\ b_1\ d\ f\ e_1\ f_1)$, b_1, e_1, f_1 désignant trois nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$ et

l'on vérifie sans peine que les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent.

Il s'ensuit, dans les deux cas, que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$.

On traite de façon tout à fait analogue les autres variantes du cas c_{22}.

$c_{23})$ $\quad k_2 = k_6 \begin{cases} k_3 \\ k_5 \end{cases}$.

On a $T_1 = S^{k_2} T S^{-k_2} = (a_1\ c\ c_1\ d_1\ e_1\ a)$, où a_1, c_1, d_1, e_1 désignent 4 nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$. On vérifie sans peine que T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il en résulte que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ aussi dans ce cas.

Passons enfin au cas $c_3)$. Supposons d'abord que $k_2 = k_3 = k_5 < k_6$.

On a $T_1 = S^{k_2} T S^{-k_2} = (a_1\ c\ d\ d_1\ f\ f_1)$, où a_1, d_1, f_1 sont trois nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$. On vérifie aisément que les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une base du groupe $\mathfrak{S}_n$.

Supposons maintenant que $k_2 = k_3 = k_6 < k_5$.

On a $T_1 = S^{k_2} T S^{-k_2} = (a_1\ c\ d\ d_1\ e_1\ a)$ et on vérifie sans peine que T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il en résulte que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$. On traite de façon tout à fait analogue les autres variantes du cas $c_3)$.

3. Parmi les nombres $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ il y en a trois qui sont égaux entre eux et plus petits que les trois autres.

Trois cas sont alors à distinguer.

a) Les trois nombres égaux entre eux et plus petits que les trois autres nombres de la suite $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ sont consécutifs dans cette suite.

b) Deux de ces nombres sont consécutifs dans la suite $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$.

c) Parmi les trois nombres de la suite $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ qui sont égaux entre eux et plus petits que les trois autres, il n'y a pas deux nombres consécutifs de la suite.

Envisageons d'abord le cas a). Il suffit de supposer, p. ex., que

$k_1 = k_2 = k_3 \begin{cases} k_4 \\ k_5 \\ k_6 \end{cases}$.

On a $T_1 = S^{k_1} T S^{-k_1} = (b\ c\ d\ d_1\ e_1\ f_1)$, où d_1, e_1, f_1 sont trois nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$. D'après la propo-

sition II, les substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$. — Passons maintenant au cas b). Supposons d'abord que

$$k_1 = k_2 = k_4 \begin{cases} k_3 \\ k_5 \\ k_6 \end{cases} .$$

On a alors $T_1 = S^{k_1} T S^{-k_1} = (b\ c\ c_1\ e\ e_1\ f_1)$, où c_1, e_1, f_1 sont trois nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$. On vérifie aisément que les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une bas de $\mathfrak{S}_n$.

Supposons maintenant que $k_1 = k_2 = k_5 \begin{cases} k_3 \\ k_4 \\ k_6 \end{cases}$.

On a $T_1 = S^{k_1} T S^{-k_1} = (b\ c\ c_1\ d_1\ f\ f_1)$, c_1, d_1, f_1 désignant trois nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$. On voit sans peine que T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il en résulte que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$.

On traite de façon tout à fait analogue les autres variantes du cas 3b.

Passons, enfin, au cas c). Il suffit de supposer, p. ex., que $k_1 = k_3 = k_5$. Envisageons alors les trois nombres k_2, k_4, k_6. Les substitutions S, T étant primitives, on ne saurait avoir $k_2 = k_4 = k_6$. Supposons que parmi les nombres k_2, k_4, k_6 il y en a un qui est plus petit que les deux autres. Soit, p. ex., k_2 ce nombre.

On a $T_1 = S^{k_2} T S^{-k_2} = (a_1\ c\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1)$, où $a_1, c_1, d_1, e_1, f_1 \neq a, b, c, d, e, f$. D'après la proposition I, T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$. Supposons maintenant que parmi les nombres k_2, k_4, k_6 il y en a deux égaux entre eux et plus petits que le 3me. Soit, p. ex., $k_2 = k_4 < k_6$.

On a $T_1 = S^{k_2} T S^{-k_2} = (a_1\ c\ c_1\ e\ e_1\ f_1)$, les nombres a_1, c_1, e_1, f_1 étant $\neq a, b, c, d, e, f$ et l'on vérifie sans peine que T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$. Les autres variantes du cas 3c se traitent de façon tout à fait analogue.

4. Parmi les nombres $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ il y en a quatre égaux entre eux et plus petits que les deux autres. Deux cas sont à distinguer:

a) Les quatre nombres égaux de la suite $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ qui sont inférieurs aux deux autres sont consécutifs dans cette suite.

b) Les quatre nombres de la suite $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ qui sont

égaux entre eux et plus petits que les deux autres ne sont pas consécutifs.

Envisageons le cas a). Il suffit de supposer, p. ex., que $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 \begin{cases} k_5 \\ k_6 \end{cases}$.

On a $T_1 = S^{k_1} T S^{-k_1} = (b\ c\ d\ e\ e_1\ f_1)$, où e_1 et f_1 sont deux nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$. D'après la proposition II, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$.

Passons maintenant au cas b). Il suffit de supposer, p. ex., que $k_1 = k_2 = k_3 = k_5 \begin{cases} k_4 \\ k_6 \end{cases}$.

On a $T_1 = S^{k_1} T S^{-k_1} = (b\ c\ d\ d_1\ f\ f_1)$, où d_1 et f_1 sont deux nombres de la suite $1, 2, \ldots, n, \neq a, b, c, d, e, f$, et l'on vérifie sans peine que T et T_1 engendrent le groupe symétrique des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$.

On traite de façon tout à fait analogue les autres variantes du cas 4.

5. Parmi les nombres $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ il y en a 5 qui sont égaux entre eux et plus petits que le 6me. Soit, p. ex., $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k < k_6$. Comme les deux substitutions S, T sont primitives, on a alors $D(k, n) = 1$ et, d'après la proposition III, les deux substitutions S, T engendrent donc le groupe $\mathfrak{S}_n$.

Comme les substitutions S, T sont primitives et que $n \geqslant 11$, on ne saurait avoir simultanément $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6$.

Notre proposition est ainsi entièrement établie.

Proposition 15. Quels que soient les nombres entiers $n \geqslant 7, r, k$ et m $(1 \leqslant r < r + k + 1 \leqslant m \leqslant n)$, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux substitutions $S = (1\ 2 \ldots n)$, $T = (1\ 2 \ldots r\ r + k + 1\ r + k + 2 \ldots m)$ constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, si l'un au moins des deux nombres n, $m - k$ est pair, ou du groupe $\mathfrak{A}_n$, si ces deux nombres sont impairs, c'est qu'elles soient primitives.

Demonstration. Il suffit de prouver que la condition est suffisante.

Supposons d'abord que la substitution T est du second ordre: $T = (1\ 2 + k)$. La proposition à démontrer résulte alors de la proposition 1 et la condition nécessaire et suffisante pour que les substitutions S, T soient primitives, c'est que $D(k + 1, n) = 1$.

Supposons maintenant que T est du 3me ordre. On a alors soit $T = (1\ 2\ 2 + k)$, soit $T = (1\ 2 + k\ 3 + k)$. Dans les deux cas, les

substitutions S, T sont primitives et, d'après la proposition 3, elles constituent une base du groupe $\mathfrak{S}_n$, si n est pair, ou du groupe $\mathfrak{A}_n$, si n est impair.

Soit $m - k = 4$. Trois cas sont alors possibles:

a) $T = (1\ 2\ 3\ 2 + k)$, b) $T = (1\ 2 + k\ 3 + k\ 4 + k)$,

c) $T = (1\ 2\ 2 + k\ 3 + k)$.

Dans les cas a) et b), les deux substitutions S et T sont toujours primitives. Elles engendrent donc, d'après la proposition 6, le groupe $\mathfrak{S}_n$.

Dans le cas c), la condition nécessaire et suffisante pour que les substitutions S, T soient primitives, c'est que $k + 1 \neq \frac{n}{2}$ et lorsque cette condition est satisfaite, les deux substitutions S, T engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$, d'après la proposition 6.

On voit sans peine que si $m - k \geqslant 4$, une condition nécessaire et suffisante pour que les substitutions S, T soient primitives, c'est que l'on n'ait pas simultanément $2r = m - k$ et $k = n - m$. Supposons cette condition satisfaite.

Soit $m - k > 4$.

Si $m = n$, les substitutions S, T engendrent toujours, d'après la proposition II, le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Supposons que $m < n$.

Si $r = 1$, on a $T = (1\ 2 + k\ 3 + k \ldots m)$, $T_1 = S\,T\,S^{-1} = (2\ 3 + k \ldots m\ m + 1)$. Les deux substitutions T et T_1 engendrent, d'après la proposition II, le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent et, d'après les lemmes I et II, en composant S avec les substitutions de ce groupe on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. S, T est donc bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ dans ce cas.

On démontre de même que si $m = r + k + 1$, les substitutions S, T constituent une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Supposons maintenant que $m - k \geqslant 5$, $r \geqslant 2$, $k \geqslant 1$, $m - (k + r) \geqslant 2$, $n - m \geqslant 1$.

On voit sans peine que $T^{-1}S = R = (r\ r + 1 \ldots r + k)\ (m\ m + 1 \ldots n)$.

Si les deux nombres $k + 1$ et $n - m + 1$ sont premiers entre eux, il existe deux nombres entiers s et t, tels que $R^s = (r\,r + 1 \ldots r + k)$, $R^t = (m\ m + 1 \ldots n)$ et chacune de ces substitutions engendre avec S le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, d'après la proposition II. Donc S, T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ aussi dans ce cas.

Supposons que $D(k + 1, n - m + 1) > 1$. Les cas suivants sont alors à distinguer:

I. Parmi les nombres r, k, $m-(r+k)$, $n-m$ il y en a un qui est le plus petit.

1. Soit r ce nombre.

On a $T_1 = S^r T S^{-r} = (r+1\ r+2 \dots 2r\ 2r+k+1\ 2r+k+2 \dots m+r)$. D'après nos hypothèses, $2r < r+k+1 < 2r+k+1 < < m < m+r \leqslant n$.

Les deux substitutions T et T_1 engendrent donc, d'après la proposition II, le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il en résulte, d'après les lemmes I et II, que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Le raisonnement est tout à fait analogue si $m-(r+k)$ est le plus petit des quatre nombres considérés ci-dessus.

2. Soit k le plus petit des 4 nombres r, k, $m-(r+k)$, $n-m$. Il faut alors distinguer les cas suivants:

a) $r = k+1 = m-(r+k) \leqslant n-m$.

On a alors $T_1 = S^{k+1} T S^{-k-1} = (r+1\ r+2 \dots r+k+1\ 2r+k+1 \dots m+r)$ et les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, d'après la proposition I. On en déduit sans peine que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

b) $r > k+1 = m-(r+k)$.

On a alors $T = (1\ 2 \dots r\ r+k+1\ r+k+2 \dots r+2k+1)$.

Comme k est, par hypothèse, le plus petit des 4 nombres r, k, $m-(r+k)$, $n-m$, on a en plus $n-(r+2k+1) \geqslant k+1$, d'où on déduit que $n-k > r+2k+1$.

Si $n-k = r+2k+2$, on a $R = (r\ r+1 \dots r+k)\ (r+2k+1 \dots n)$,

$R_1 = S^{-k} R S^{k} = (r-k \dots r-1\ r)\ (r+k+1 \dots n-k)$

$U = T R_1^{-1} = (1\ 2 \dots r-k\ r+k+1\ r+2k+2)$,

$R_2 = U^{-1} R U = (r\ r+1 \dots r+k)\ (r+2k+1\ r+k+1\ r+2k+3 \dots n)$,

$Q = R R_2^{-1} = (r+k+1\ \ r+2k+2\ \ r+2k+3)$.

D'après la proposition II, cette dernière substitution engendre avec S le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Donc S, T est bien, dans ce cas, une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Si $n-k > r+2k+2$, on a

$$Q = (r+2k+2\ \ r+2k+3)\ \ (n-k+1\ \ r+k+1).$$

Si $n - k = r + 2k + 3$, on a

$$Q = (r + 2k + 2 \quad r + 2k + 3) \quad (r + 2k + 4 \quad r + k + 1),$$
$$Q_1 = S^{-2} Q S^2 = (r + 2k \quad r + 2k + 1) \quad (r + 2k + 2 \quad r + k - 1).$$
$$Q Q_1 = (r + k - 1 \quad r + 2k + 3 \quad r + 2k + 2) \quad (r + 2k \quad r + 2k + 1)$$
$$(r + 2k + 4 \quad r + k + 1)$$
$$(Q Q_1)^2 = (r + k - 1 \quad r + 2k + 2 \quad r + 2k + 3)$$

et cette dernière substitution engendre avec S, d'après la proposition II, le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Il en est donc de même de S et T.

Si $n - k > r + 2k + 3$, posons

$$Q_1 = S^{-1} Q S = (r + 2k + 1 \quad r + 2k + 2) \quad (n - k \quad r + k).$$

On a $Q Q_1 = (r + 2k + 1 \quad r + 2k + 3 \quad r + 2k + 2) \; (n - k \; r + k)$ $(n - k + 1 \quad r + k + 1)$.

$$(Q Q_1)^2 = (r + 2k + 1 \quad r + 2k + 2 \quad r + 2k + 3)$$

et cette substitution engendre avec S le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, d'après la proposition II. Les substitutions S, T constituent donc bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$ dans le cas considéré.

c) $r = k + 1 < m - (r + k)$.

Ce cas se traite d'une façon tout à fait analogue au cas b).

d) Soit $r > k + 1$ et $m - (r + k) > k + 1$.

On a $R_1 = S^{k+1} R S^{-k-1} = (r + k + 1 \ldots r + 2k + 1) \; (m + k + 1$ $\ldots n \; 1 \; 2 \ldots k + 1)$,

$$R R_1^{-1} = (r r + 1 \ldots r + k) \; (r + 2k + 1 \ldots r + k + 1) \; (1 \; m \; m + 1 \ldots$$
$$m + k + 1 \quad k + 1 \quad k \ldots 2)$$
$$= C_1 C_2 C_3,$$

C_1 et C_2 désignant deux cycles d'ordre $k + 1$ et C_3 un cycle d'ordre $2k + 3$.

Comme les nombres $k + 1$ et $2k + 3$ sont premiers entre eux, il existe un nombre entier l, tel que $(R R_1^{-1})^l = C_3 = (1 \; m \; m + 1 \ldots m + k + 1$ $k + 1 \quad k \ldots 2)$. Or, $C_3^{-1} = (m \; 1 \; 2 \ldots k + 1 \; m + k + 1 \ldots m + 1)$ et cette dernière substitution engendre avec T le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, d'après la proposition II. Il en résulte immédiatement que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Le cas où $n - m$ est le plus petit des 4 nombres r, k, $n - (k + r)$, $n - m$ se traite de façon tout à fait analogue à celui où k est le plus petit de ces nombres.

II. Parmi les nombres de la suite r, k, $m-(r+k)$, $n-m$ il y en a deux qui sont égaux entre eux et plus petits que les deux autres. Cela peut être deux nombres consécutifs ou deux nombres non consécutifs de ladite suite. Soit a) $r = k < {}^{m-2r}_{n-m}$ (on traite de façon tout à fait analogue le cas où $m-(r+k) = n-m < {}^{r}_{k}$).

Envisageons la substitution $T_1 = S^r T S^{-r} = (r+1 \ldots 2r \;\; 3r+1 \ldots m+r)$. D'après nos hypothèses et d'après la proposition II, les substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Soit b) $k = m-(r+k) < {}^{r}_{n-m}$ (on traite de façon analogue le cas $n-m = r < {}^{k}_{m-(r+k)}$). On a donc $r-k > 0$ et $n-k > m$. Envisageons la substitution

$$T_1 = S^{-k} T S^k = (n-k+1 \;\; n-k+2 \ldots n \;\; 1 \;\; 2 \ldots r-k \;\; r+1 \;\; r+2 \ldots m-k).$$

D'après la proposition II, les substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Soit c) $r = m-(r+k) < {}^{k}_{n-m}$. Comme les substitutions S, T sont primitives, $k \neq n-m$. Supposons, pour fixer les idées, que $k < n-m$. (Le cas où $k > n-m$ se traite d'une façon analogue).

On a $T = (1 \;\; 2 \ldots r \;\; r+k+1 \ldots 2r+k)$

$$T_1 = S^{k+1} \; T \; S^{-k-1} = (k+2 \;\; k+3 \ldots k+r+1 \;\; r+2k+2 \ldots 2r+2k+1).$$

D'après nos hypothèses, $n \geqslant 2r+2k+1$. Donc T et T_1 engendrent, d'après la proposition I, le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il s'ensuit que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

d) Soit $k = n-m < {}^{r}_{m-(k+r)}$.

Comme les substitutions S, T sont primitives, $r \neq m-(k+r)$. Supposons que $r < m-(k+r)$ (le raisonnement est tout à fait analogue si l'on suppose que $r > m-(k+r)$). Alors $m > 2r+k$.

On a $R = (r \;\; r+1 \ldots r+k) \; (m \;\; m+1 \ldots m+k)$.

$$R_1 = S^r \, R \, S^{-r} = (r-k \;\; r-k+1 \ldots r) \;\; (2r \;\; 2r+1 \ldots 2r+k).$$

$R_1 R = (r+1 \;\; r+2 \ldots r+k \;\; r-k \;\; r-k+1 \ldots r) \;\; (2r \;\; 2r+1 \ldots 2r+k) \; (m \;\; m+1 \ldots m+k)$. Nous obtenons une substitution

comprenant trois cycles dont le premier est d'ordre $2k+1$ et les deux autres sont d'ordre $k+1$ premier avec $2k+1$. Il existe donc un nombre entier t, tel que $(R_1 R)^t = Q = (r+1\ r+2 \ldots r+k\ r-k\ r-k+1 \ldots r)$. Les deux substitutions T et Q engendrent, d'après la proposition II, le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Il en résulte que S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

III. Parmi les nombres de la suite *) $r, k, m-(r+k), n-m$ il y en a trois égaux entre eux et inférieurs au 4me. Les trois nombres égaux sont alors forcément consécutifs dans la suite *). Deux cas sont alors à distinguer.

a) $r = k = m-(k+r) < n-m$. Donc $n-m \geqslant r+1$.

On a $T = (1\ 2 \ldots r\ 2r+1\ 2r+2 \ldots 3r)$.

$$T_1 = S^{r+1}\, T\, S^{-r-1} = (r+2\ \ r+3 \ldots 2r+1\ \ 3r+2 \ldots 4r+1).$$

D'après nos hypothèses, $n \geqslant 4r+1$. Il s'ensuit, d'après la proposition I, que les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Le cas où $m-(k+r) = n-m = r$ se traite d'une façon tout à fait analogue.

b) Soit $k = m-(k+r) = n-m < r$.

On a $T = (1\ 2 \ldots r\ r+k+1 \ldots r+2k)$,

$$T_1 = S^k\, T\, S^{-k} = (1+k\ 2+k \ldots r+k\ r+2k+1 \ldots r+3k).$$

D'après la proposition II, les substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique ou le groupe alternant des éléments qu'elles permutent. Donc S, T est une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$.

Le cas où $n-m = r = k < m-(r+k)$ se traite d'une façon tout à fait analogue.

Comme les substitutions S et T sont primitives, on ne saurait avoir simultanément $r = k = m-(r+k) = n-m$.

La proposition 15 est donc établie.

Remarque. La proposition 15 est encore vrai pour $n < 7$, aux deux exceptions suivantes près: $S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $T = (1\ 3\ 4\ 5)$;

$S = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $T = (1\ 2\ 3\ 5)$. Les substitutions de chacun de ces couples sont primitives. Toutefois, elles ne constituent pas une base du groupe $\mathfrak{S}_6$.

Proposition 16. Quels que soient les nombres entiers positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$ $(r > 1)$, il existe un nombre entier n suffisamment grand et tel que les deux substitutions $S = (a_1\ a_2 \ldots a_r)$, $T = (1\ 2 \ldots n)$ engendrent le groupe $\mathfrak{S}_n$, si l'un au moins des nombres r, n est pair, ou le groupe $\mathfrak{A}_n$, si ces deux nombres sont impairs.

Démonstration. On peut toujours choisir les notations de façon que a_1 soit le plus petit nombre de la suite $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Soit a_i $(2 \leqslant i \leqslant r)$ le plus grand nombre de cette suite et soit $a_i - a_1 = d$, $D(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_r - a_1) = k$. Soit n le plus petit nombre entier $> 2d$ et premier avec k. On a $T_1 = T^d S T^{-d} = (a_i\ b_2\ b_3 \ldots b_r)$, $b_2, b_3, \ldots, b_r$ désignant r nombres de la suite $1, 2, \ldots, n$ dont aucun n'appartient au système $a_1, a_2, \ldots, a_r$. D'après la proposition I, les deux substitutions T et T_1 engendrent le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments qu'elles permutent, groupe qui contient le groupe symétrique ou le groupe alternant des substitutions des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Et comme $D(k, n) = 1$, il résulte des lemmes I et II qu'en composant T avec les substitutions de ce dernier groupe, on obtient le groupe $\mathfrak{S}_n$ ou le groupe $\mathfrak{A}_n$. Donc S, T est bien une base de $\mathfrak{S}_n$ ou de $\mathfrak{A}_n$, c. q. f. d.

(Reçu le 15 juillet 1939.)