Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Über normal-diskontinuierliche lineare Gruppen in zwei komplexen Variablen.

Autor: Schubarth, Emil

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12796

Über normal-diskontinuierliche lineare Gruppen in zwei komplexen Variablen

Von EMIL SCHUBARTH, Basel.

Einleitung

Die Theorie der automorphen Funktionen einer komplexen Variablen ist ein wesentlicher Bestandteil der klassischen Funktionentheorie. Die automorphen Funktionen liefern nicht nur eine Verbindung der Funktionentheorie mit wichtigen mathematischen Disziplinen wie den Differentialgleichungen und der Arithmetik, sondern sie haben auch einen erheblichen Anteil an der Entwicklung der allgemeinen Funktionentheorie gehabt, zuletzt noch bei den Untersuchungen zur Uniformisierung.

Dasselbe vermag man bisher in der Funktionentheorie mehrerer

Variablen nicht zu sagen. Es ist geradezu auffallend, daß in den zahlreichen allgemeinen Untersuchungen über die analytischen Funktionen $f(w_1, \ldots, w_n)$ — wie sie aus den letzten vierzig Jahren und vor allem aus dem letzten Jahrzehnt vorliegen — automorphe Funktionen gar nicht vorkommen. Andererseits gibt es wohl Arbeiten über automorphe Funktionen mehrerer Variablen. Solche von zwei Variablen sind im Anschluß an die klassischen Arbeiten von Poincaré zuerst von Picard betrachtet worden. Die wichtigsten Beiträge zur Theorie in n Variablen stammen von Wirtinger, Blumenthal, Fubini, Hurwitz, Hecke und Giraud. Aber diese Arbeiten gehen entweder von der Zahlentheorie quadratischer Körper aus oder bilden eine Erweiterung und teilweise nur formale Ergänzung einer Theorie der automorphen Funktionen *einer* Veränderlichen. In beiden Fällen ist eine Brücke zur allgemeinen Funktionentheorie noch nicht geschlagen. Erst mit den Arbeiten von Myrberg (seit 1922) wird eine Theorie der automorphen Funktionen begründet, die spezifisch auf den Raum mehrerer komplexer Variablen eingestellt ist, und jede weitere Arbeit auf diesem Gebiet wird an seine Begriffsbildungen anknüpfen müssen.

Die folgende Untersuchung behandelt ausschließlich im Gebiet der projektiven Geometrie und der linearen Gruppen den von Myrberg[1]) eingeführten grundlegenden Begriff: die normale Diskontinuität. Unter gewissen Einschränkungen für die zugrunde liegenden Gruppen, von denen sogleich die Rede sein wird, gelingt die geometrische Abgrenzung des Bereiches der normalen und der (noch zu erklärenden) bedingten Diskontinuität der Gruppen und die Konstruktion von Fundamentalbereichen — ein Gegenstand, der in der klassischen Theorie und in frühen Untersuchungen von Wirtinger, Hurwitz und Fubini bedeutsam hervorgetreten ist, während er in der Theorie von Myrberg bis jetzt überhaupt nicht vorkommt.

Um den Gang der Untersuchung zu erläutern, greifen wir auf die Erklärung der automorphen Funktionen zurück. Unter einer automorphen Funktion in zwei und mehr Variablen versteht man in Analogie zur klassischen Theorie eine einwertige analytische Funktion, die gegenüber einer Gruppe G von Transformationen ihrer Argumente invariant ist.

Die Linearität von G braucht nicht wie im klassischen Fall verlangt zu werden. Trotzdem werden in der vorliegenden Arbeit von vornherein nur Gruppen linear-gebrochener Transformationen in Betracht gezogen, und innerhalb dieser Gruppen wird noch eine Auswahl auf solche Fälle getroffen,

[1]) [10], [11]. Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

in denen die Methoden der projektiven Geometrie, insbesondere das Prinzip der Dualität zwischen Punkten und analytischen $(2n-2)$-dimensionalen Ebenen, voll zur Geltung kommen. Dieselbe Einschränkung hat auch Myrberg aus funktionentheoretischen Gründen vorgenommen (vgl. seine „Gruppen 1. Klasse").

Die eigentliche Diskontinuität der Automorphismengruppe G muß dagegen aus entsprechenden Gründen wie bei den automorphen Funktionen in einer Variablen gefordert werden. Zwar kommen bei n Variablen für $n > 1$ zu einer nicht eigentlich-diskontinuierlichen linearen Gruppe als automorphe Funktionen nicht nur Konstante in Betracht. Aber durch eine geeignete Transformation (die allerdings im allgemeinen nicht linear sein kann) läßt sich bei Funktionen mit infinitesimalen Transformationen in sich die Variablenzahl verringern[2]).

Es hat sich freilich gezeigt, daß für die Existenz von automorphen Funktionen in mehreren Variablen die eigentliche Diskontinuität der Automorphismengruppe nicht hinreicht. Ein Beleg dafür sind schon die Riemannschen Periodenrelationen. Vor allem aber geht das aus den Arbeiten von Myrberg hervor, in denen er zu einer Verschärfung des Begriffes der eigentlichen Diskontinuität sich veranlaßt sah.

Zur Verdeutlichung diene die folgende Übersicht:

Eine Gruppe G heißt *eigentlich-diskontinuierlich* im Bereich A, wenn für jeden Punkt p von A folgendes gilt: es gibt eine Umgebung $U(p)$ von p, die nur mit endlich vielen ihrer Bilder (vermöge Transformationen aus G) Punkte gemeinsam hat.

Eine Gruppe G heißt (nach Myrberg) *normal-diskontinuierlich* im Bereich A, wenn ihre Transformationen, genauer: die zugehörigen Transformationsfunktionen, in jedem abgeschlossenen Teilbereich von A eine normale Familie bilden[3]). Der maximale Bereich der normalen Diskontinuität heißt der „Normalbereich" von G. Die Zweckmäßigkeit dieser Begriffsbildung erhellt aus folgender Gegenüberstellung: Im klassischen Fall ist der maximale Bereich E der eigentlichen Diskontinuität von G stets der Existenzbereich von automorphen Funktionen zur Gruppe G. Bei mehreren Variablen ist mit eigentlicher Diskontinuität allein keine automorphe Funktion möglich. Eine Gruppe G muß normal-diskontinuierlich sein, damit automorphe Funktionen zu ihr existieren können,

[2]) Man überblickt alle Möglichkeiten sofort auf Grund des folgenden Satzes von Fubini ([5] p. 106): Gestattet eine einwertige analytische Funktion eine diskontinuierliche Gruppe linearer Transformationen, in der infinitesimale Transformationen vorkommen, so gestattet sie eine *stetige* (mindestens) einparametrige lineare Gruppe.

[3]) Zur genauen Fassung des Begriffs der Konvergenz von Transformationsfolgen vgl. § 4.

und zwar gilt unter gewissen Voraussetzungen[4]) über G: jeder maximale zusammenhängende Teilbereich des Normalbereichs von G ist der Existenzbereich von automorphen Funktionen zu G.

Andererseits ist, wie die folgenden Entwicklungen zeigen, für lineare Gruppen eine Erweiterung des Begriffs der eigentlichen Diskontinuität am Platz, die Myrbergs Verschärfung dual entspricht. Eine lineare Gruppe G 1. Klasse heißt *bedingt-diskontinuierlich* im Bereich A, wenn für jeden Punkt p von A folgendes gilt: zu jeder vorgelegten Normalfolge F aus G läßt sich eine Umgebung $U(p)$ von p und in ihr ein Punkt q samt einer Umgebung $V(q)$ angeben, so daß bei der Ausführung der Transformationen von F nur endlich viele Bilder von $V(q)$ Punkte mit $U(p)$ gemeinsam haben. Der maximale Bereich der bedingten Diskontinuität heißt der „Diskontinuitätsbereich" von G[5]).

Die drei Arten der Diskontinuität macht man sich leicht klar an der Gruppe

$$w' = m^\nu w, \quad z' = n^\nu z, \quad |m| < |n| < 1, \quad \nu = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots$$

(vgl. dazu § 6).

Im folgenden soll an den linearen Gruppen in zwei komplexen Variablen gezeigt werden, wie man zum Begriff der normalen Diskontinuität aus rein geometrischen und gruppentheoretischen Erwägungen gelangen kann. Dazu führt der Gesichtspunkt der Dualität, d. h. die Behandlung von Punkten und analytischen Ebenen als gleichberechtigten Elementen. Die Diskontinuitätseigenschaften der Punktgruppe und der durch sie induzierten Ebenengruppe sind nämlich weitgehend von einander unabhängig, und geeignete Voraussetzungen über die bedingte Diskontinuität in der einen Gruppe schaffen eine Bindung, die gerade mit der aus funktionentheoretischen Gesichtspunkten verlangten Einschränkung auf die normale Diskontinuität in der induzierten Gruppe übereinstimmt. Das zeigt das Hauptergebnis des I. Teils der Arbeit: *notwendig und hinreichend für die normale Diskontinuität im Punkt p ist bei einer linearen Gruppe 1. Klasse die bedingte Diskontinuität der induzierten Gruppe in jeder analytischen Ebene durch p.*

Im II. Teil wird eine *geometrische Theorie* entwickelt *zur Bestimmung des Normalbereichs und des Diskontinuitätsbereichs* einer linearen Gruppe

[4]) nämlich für Gruppen 1. Klasse, das sind Gruppen, die lauter Normalfolgen vom Rang 1 enthalten; im allgemeinen ist zudem die normale Diskontinuität der induzierten Ebenengruppe vorauszusetzen.

[5]) Die Bezeichnung Diskontinuitätsbereich verwenden wir hier im Anschluß an Myrbergs Bezeichnung Normalbereich, aber im Gegensatz zu Fricke-Klein, wo Diskontinuitätsbereich synonym und gleichzeitig mit Fundamentalbereich verwendet wird.

1. Klasse. L. R. Ford [3] [4] hat im klassischen Fall ein einleuchtendes Verfahren zur Konstruktion von Fundamentalbereichen bei beliebig vorgegebenen eigentlich-diskontinuierlichen Gruppen angegeben. Dieses Verfahren wird hier auf den Fall von zwei Variablen übertragen. Dadurch gelingt es, die Myrbergsche Theorie der Gruppen 1. Klasse in einem wesentlichen Punkt zu ergänzen. Es stellt sich heraus, daß die entsprechende Konstruktion stets möglich ist, wenn die Forderung der eigentlichen Diskontinuität zur *normalen Diskontinuität der beiden dualen Gruppen G und Γ in einem Paar von inzidenten Elementen* verschärft wird. Man erhält einen *Fundamentalbereich für den Normalbereich* von G, also für den Bereich, der für die Funktionentheorie von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Das wesentlichste Hilfsmittel für die Untersuchung sind die isometrischen Gebilde der Gruppe. Jeder Transformation T_i aus G bzw. τ_i aus Γ läßt sich ein solches Gebilde Π_i bzw. $\mathfrak{P}_i$ zuordnen. Es besteht aus den Punkten bzw. Ebenen[6]), in denen die Funktionaldeterminante der Transformation den Betrag 1 hat. Ausführlich:

1. Die Punkte von Π_i erfüllen eine einparametrige Schar von Ebenen, die alle durch einen Punkt s_i der uneigentlichen Ebene gehen. Wir nennen daher Π_i den isometrischen Zylinder der Transformation T_i. Er zerlegt die Ebenen durch s_i und damit die Punkte des Raumes $W(w, z)$ (mit Ausnahme von s_i) in drei Klassen: Inneres, Mantel, Äußeres von Π_i. Eine Ebene aus dem Inneren ist Π_i als „Achse" zugeordnet. Jede Häufungsebene von Achsen der Π_i von G nennen wir eine Grenzebene von Γ.

2. Die Ebenen von $\mathfrak{P}_i$ gehen durch eine einparametrige Schar von Punkten, die einen Kreis auf einer Ebene σ_i durch den Nullpunkt erfüllen. Wir nennen $\mathfrak{P}_i$ den isometrischen Kreis der Transformation τ_i. Er zerlegt die Punkte von σ_i und damit die Ebenen in W (mit Ausnahme von σ_i) in drei Klassen: Inneres, Rand, Äußeres von $\mathfrak{P}_i$. Ein Punkt aus dem Inneren ist $\mathfrak{P}_i$ als „Pol" zugeordnet. Jeden Häufungspunkt von Polen der $\mathfrak{P}_i$ nennen wir einen Grenzpunkt von G.

Die Menge der Grenzpunkte von G heißt die 1. Grenzmenge von G, die Menge der Punkte aller Grenzebenen von Γ heißt die 2. Grenzmenge von G. Die Komplementärmenge zur 1. Grenzmenge ist der Bereich B der bedingten Diskontinuität von G. Die Komplementärmenge zur 2. Grenzmenge ist der Bereich N der normalen Diskontinuität von G (Hauptsatz 2).

Als ein Fundamentalbereich für N erweist sich in einer linearen Gruppe

---

[6]) „Ebene" bedeutet im folgenden stets „analytische Ebene", sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist.

1. Klasse mit normaler Diskontinuität in einem Paar inzidenter dualer Elemente die Menge R derjenigen Punkte, die samt einer Umgebung im Äußeren aller isometrischen Zylinder von G liegen (Hauptsatz 3). Man gewinnt damit eine neue Darstellung des Normalbereichs

$$N = R + R' + \cdots \text{ (Menge } R + \text{ihre Bilder).}$$

Analog für die Bereiche B der bedingten Diskontinuität und N der normalen Diskontinuität der Ebenengruppe Γ.

Der III. Teil enthält Ergänzungen und Hinweise auf folgendes: Der Normalbereich N von G und der konstruierte Fundamentalbereich für N sind konvex in bezug auf (analytische) Ebenen [1]. Der Rand von R erlaubt unter Umständen Rückschlüsse auf die Erzeugenden von G. Als Spezialfall der allgemeinen Theorie hat man 1. für eine komplexe Variable die Theorie von Ford, 2. eine Theorie der reellen linearen Gruppen 1. Klasse in zwei Variablen. Die Theorie der isometrischen Gebilde ist ebenso (mit allen Auswirkungen auf die Bereiche der bedingten und der normalen Diskontinuität) möglich für normal-diskontinuierliche lineare Gruppen 1. Klasse in n Variablen. Ein letzter Hinweis gilt der funktionentheoretischen Bedeutung des Normalbereichs.

Mit der Theorie von Ford bin ich durch Herrn E. Peschl bekannt geworden. Wertvolle Hilfe verdanke ich Herrn H. Behnke[7].

I. TEIL

Normalfolgen und Gruppen-Diskontinuität

1. Grundlagen

Den folgenden Untersuchungen liegt der Raum $R_4(w, z)$ zweier komplexer Veränderlichen $w = u + iv$, $z = x + iy$ zugrunde. Wir betrachten darin Gruppen G von linear-gebrochenen Transformationen mit komplexen Koeffizienten

$$\left.\begin{aligned} w' &= \frac{a_{11} w + a_{12} z + a_{13}}{a_{31} w + a_{32} z + a_{33}} \\ z' &= \frac{a_{21} w + a_{22} z + a_{23}}{a_{31} w + a_{32} z + a_{33}} \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

[7]) Nach dem Abschluß der Arbeit hat Herr A. Ostrowski darauf hingewiesen, daß J. I. Hutchinson [8] nicht nur, wie Ford im Vorwort seines Buches erwähnt, als erster die isometrischen Gebilde zur Abgrenzung von Fundamentalbereichen verwendet, sondern sein Verfahren auch für zwei Variable skizziert, freilich alles nur für Gruppen mit invarianter Hermite-Form von der Charakteristik 1. Die Methode macht von der Invarianz wesentlich Gebrauch. Der gefundene Fundamentalbereich ist ein solcher für das Innere der invarianten Hyperkugel, also im allgemeinen nur für einen Teil des Normalbereichs (vgl. Beispiele 6, 7).

deren Determinante $\Delta(a_{ik})$ nicht verschwindet, und denken uns dementsprechend den R_4 durch eine uneigentliche Ebene abgeschlossen. Statt (w, z) verwenden wir häufig homogene Koordinaten $(w_1 : w_2 : w_3)$, die nicht alle drei 0 sein dürfen und nur bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt sind. Die Transformationen von G werden dargestellt durch

$$t w_i = \sum_{e=1}^{3} a_{ik} w_k \,, \quad \Delta(a_{ik}) \neq 0 \; (i = 1, 2, 3) \,, \tag{2}$$

wo der (überall von 0 verschiedene) Proportionalitätsfaktor $t(w_1, w_2, w_3)$ dazu benützt werden soll, das Maximum der Koeffizientenbeträge auf einen endlichen Wert, etwa auf 1, zu normieren.

Die in den Koeffizienten und den Variablen symmetrische Form $\varphi(\omega, w) = \omega_1 w_1 + \omega_2 w_2 + \omega_3 w_3 = 0$ der Gleichung einer Ebene zeigt, daß der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit W der „Punkte w" die vierdimensionale Mannigfaltigkeit Ω der analytischen „Ebenen ω" gegenüber steht. Man kann also dem Punktraum W den Ebenenraum $\tilde{\Omega}$ dual zur Seite stellen, indem man der Ebene ω: $\omega_1 w_1 + \omega_2 w_2 + \omega_3 w_3 = 0$ im Punktraum W den Punkt $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1 : \tilde{\omega}_2 : \tilde{\omega}_3)$ im Ebenenraum $\tilde{\Omega}$ umkehrbar eindeutig zuordnet durch die Festsetzung $\tau \tilde{\omega}_i = \omega_i$ $(i = 1, 2, 3)$[8]). Jede Gruppe von projektiven Punkttransformationen erzeugt im Punktraum W eine homomorphe Gruppe Γ von Ebenentransformationen, das ist im Ebenenraum $\tilde{\Omega}$ eine projektive Gruppe $\tilde{\Gamma}$ von Punkttransformationen. Einer Transformation S: (a_{ik}) von G ist in $\tilde{\Gamma}$ 1-1-deutig eine Transformation $\tilde{\sigma}$: (α_{ik}) zugeordnet. Ihre Matrix geht durch Transposition aus der Matrix der zu S inversen Transformationen S^* hervor: $\alpha_{ik} = \dfrac{A_{ik}}{\Delta(a_{ik})}$ (A_{ik} das algebraische Komplement von a_{ik} in der Determinante $\Delta(a_{ik})$).

Der Ebenenraum $\tilde{\Omega}$ ist ebenfalls projektiv abgeschlossen durch eine uneigentliche Ebene, die durch $\tilde{\omega}_3 = 0$ gegeben ist. Ihr entspricht in W der Nullpunkt O mit den Gleichungen $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ und in Ω die zweidimensionale Mannigfaltigkeit der analytischen Ebenen durch O. Umgekehrt ist der uneigentlichen Ebene ε_∞ in W, die durch $w_3 = 0$ gegeben ist, im Ebenenraum $\tilde{\Omega}$ der Nullpunkt $\tilde{\varepsilon}_\infty$ mit den Gleichungen $\tilde{\omega}_1 = 0$,

[8]) Die Unterscheidung der Ebene w im Punktraum W vom ihr zugeordneten Punkt $\tilde{\omega}$ im Ebenenraum $\tilde{\Omega}$ wird sich als nützlich erweisen, insbesondere in den gleich folgenden Konvergenzbetrachtungen über analytische Ebenen und später bei der Behandlung der isometrischen Gebilde der Punkt- und Ebenengruppe.

$\tilde{\omega}_2 = 0$ zugeordnet und in W die zweidimensionale Mannigfaltigkeit der analytischen Ebenen durch ε_∞.

Die Konvergenz einer Ebenenfolge definieren wir durch die Konvergenz der zugeordneten Punktfolge im Dualraum. Jeder Satz über konvergente Punktfolgen läßt sich von $\tilde{\Omega}$ sofort auf die Mannigfaltigkeit Ω der Ebenen in W übertragen. So folgt aus der Abgeschlossenheit von W und Ω:

Satz 1. *Jede unendliche Folge von Punkten hat in W mindestens einen Häufungspunkt. Jede unendliche Folge von Ebenen hat in Ω mindestens eine Häufungsebene.*

Die Konvergenz einer Ebenenfolge $\omega^{(\nu)}$ in Ω $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gegen eine Grenzebene ω, die wir mit Hilfe der Punktkonvergenz im Dualraum erklärt haben, ist gleichbedeutend mit der Konvergenz der Koeffizienten in den Ebenengleichungen:

$$\omega_i^{(\nu)} \to \omega_i \qquad (i = 1, 2, 3) ,$$

wobei die ω_i nicht alle 0 sind. Das heißt, diese Ebenenkonvergenz ist identisch mit der Konvergenz der Ebenen als Punktmannigfaltigkeiten; betrachtet man die einzelne Ebene $\omega^{(\nu)}$ als zweidimensionale Punktmenge M_ν, so konvergieren die M_ν gegen eine Grenzmenge M in dem Sinne: 1. Jeder Häufungspunkt von Folgen p_ν (p_ν ein Punkt von M_ν) gehört zu M; dagegen 2. nicht jeder Punkt von M braucht als Häufungspunkt solcher Folgen p_ν aufzutreten (vgl. Beispiel 5, Schluß).

2. Eigentliche Diskontinuität

Wir wollen jetzt über die Transformationen (1) bzw. (2) der zu betrachtenden Gruppen G besondere Voraussetzungen machen.

Punkte, ebenso Punktmengen, des Grundraumes, die durch Transformationen von G auseinander hervorgehen, nennen wir *äquivalent*. Unter einem *Bereich* verstehen wir zunächst eine offene Punktmenge, die nicht zusammenhängend zu sein braucht; vielfach werden wir eine solche Punktmenge durch Randpunkte erweitern; eine derart erweiterte Punktmenge nennen wir immer noch einen Bereich.

Definition 1. Die Gruppe G heißt *eigentlich-diskontinuierlich* (*e.-d.*) *in einem Bereich A*, wenn für jeden Punkt p von A folgendes gilt:

1. p ist nur Fixpunkt bei endlich vielen Transformationen $T_1, \ldots, T_f$ aus G;

2. in einer genügend kleinen (vierdimensionalen) Umgebung $U(p)$ von p gibt es keine Punkte, die mittels Transformationen aus G äquivalent sind außer mittels $T_1, \ldots, T_f$.

Die Gruppe G heißt *e.-d. in einem Punkt* p, wenn es zu ihm eine Umgebung $U(p)$ gibt, in der G e.-d. ist.

E.-d. (schlechtweg) nennen wir jede Gruppe, die einen nicht leeren Bereich eigentlicher Diskontinuität besitzt.

Insbesondere gilt für einen Punkt p, in dem die Gruppe e.-d. ist: p ist kein Häufungspunkt von äquivalenten Punkten; und falls p gegenüber keiner Transformation von G (außer der Identität) fest bleibt, so gibt es stets eine Umgebung $U(p)$, die keine zwei zu einander äquivalenten Punkte enthält.

Analog definieren wir die eigentliche Diskontinuität der Gruppe Γ in einer Ebene ω des Punktraums W.

Definition 2. Man sagt von der Gruppe G, sie enthalte *infinitesimale Transformationen*, wenn es bei beliebig klein vorgegebener positiver Zahl ε zu jedem Punkt (w, z) eines Bereichs äquivalente Punkte $(w', z') \neq (w, z)$ gibt, deren Koordinaten den Ungleichungen $|w' - w| < \varepsilon$, $|z' - z| < \varepsilon$ genügen.

Aus den Definitionen 1 und 2 folgt sofort

Satz 2. *Eine e.-d. Gruppe enthält keine infinitesimalen Transformationen.*

Satz 3. *In jeder Umgebung $U(p)$ eines Punktes p, in dem G e.-d. ist, gibt es einen Punkt q, der bei keiner Transformation ($\neq I$) von G fest bleibt.*

Beweis: Da G in p e.-d. sein soll, können in einer genügend klein gewählten Umgebung $U(p)$ nicht Fixpunkte von unendlich vielen Transformationen aus G liegen. Die Fixpunkte von endlich vielen linearen Transformationen ($\neq I$) können aber keine volle Umgebung von p ausfüllen.

3. Normalfolgen und ihre Grenzelemente

Wir stellen in den §§ 3 bis 5 die allgemeinen Ausführungen von P. J. Myrberg (Acta 46), soweit sie für uns wichtig sind, in einer unsern Zwecken angepaßten Formulierung für zwei Variable zusammen. Dabei soll der Gesichtspunkt der Dualität deutlich zur Geltung gebracht werden.

Jede unendliche Folge von linearen Transformationen enthält mindestens eine konvergente Teilfolge, d. h. eine Folge F von Transformationen $S_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ der Form (2), deren normierte Koeffizienten a_{ik} gegen endliche Grenzwerte b_{ik} streben, die nicht sämtlich 0 sind.

Definition 3. Jede solche Folge F von Transformationen S_ν heißt eine *Normalfolge*, $T = (b_{ik})$ ihre *Grenztransformation*; der Rang r der Grenzmatrix heißt der *Rang* von F.

Die Grenztransformation T einer Normalfolge F ist dann und nur dann nicht entartet, wenn $r(F) = 3$ ist. In diesem Fall konvergieren die Transformationen $S_\nu^{-1} S_{\nu+1}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ mit wachsendem ν gegen die Identität. Solche Transformationenfolgen können in den später ausschließlich verwendeten e.-d. Gruppen nicht vorkommen (Satz 2). Deshalb betrachten wir nur noch Normalfolgen mit *entarteter Grenztransformation.*

Eine entartete Grenztransformation ist notwendig in gewissen Punkten des Raumes nicht definiert, und zwar entweder a) *in einem Punkte,* oder b) *in* den Punkten *einer Ebene.* Die übrigen Punkte werden

im Fall a), wo $r(F) = 2$ ist, auf eine Ebene,

im Fall b), wo $r(F) = 1$ ist, auf einen Punkt abgebildet.

Definition 4. Die Mannigfaltigkeit der Bildpunkte bei der Grenztransformation heißt das 1. *Grenzelement* L_1 (F) *der Normalfolge* F.

Definition 5. Die erwähnten Ausnahmepunkte gegenüber der Grenztransformation sind diejenigen Punkte des Originalraums, deren homogene Koordinaten bei der Grenztransformation sämtlich 0 werden. Ihre Mannigfaltigkeit heißt das *2. Grenzelement* L_2 (F) *der Normalfolge* F.

$L_2(F)$ ist im Fall a), wo $r(F) = 2$ ist, ein Punkt,

im Fall b), wo $r(F) = 1$ ist, eine Ebene,

wie die folgende Übersicht ausführlich zeigt.

a) $r = 2$:

$$\left.\begin{aligned} t w_1' &= b_{11} w_1 + b_{12} w_2 + b_{13} w_3 \\ t w_2' &= b_{21} w_1 + b_{22} w_2 + b_{23} w_3 \\ t w_3' &= c_1\ w_1' + c_2\ w_2' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

b) $r = 1$:

$$\left.\begin{aligned} t w_1' &= b_{11} w_1 + b_{12} w_2 + b_{13} w_3 \\ t w_2' &= c_2\ w_1' \\ t w_3' &= c_3\ w_1' \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Bei $r = 2$ erhält man eine, bei $r = 1$ zwei lineare Gleichungen zwischen w_1, w_2, w_3; d. h.

a) L_1 ist eine Ebene, b) L_1 ist ein Punkt.

L_2 besteht aus denjenigen Punkten w, deren Koordinaten den Gleichungen $tw_i = \sum_{k=1}^{3} b_{ik} w_k = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ genügen, das bedingt im Fall

$$\text{a)} \qquad r = 2: \quad \left.\begin{aligned} t w_1' &= b_{11} w_1 + b_{12} w_2 + b_{13} w_3 = 0 \\ t w_2' &= b_{21} w_1 + b_{22} w_2 + b_{23} w_3 = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

$$\text{b)} \qquad r = 1: \quad t w_1' = b_{11} w_1 + b_{12} w_2 + b_{13} w_3 = 0 , \tag{6}$$

also bei $r = 2$ zwei lineare Gleichungen, bei $r = 1$ eine lineare Gleichung zwischen w_1, w_2, w_3, d. h.

a) L_2 ist ein Punkt, b) L_2 ist eine Ebene.

Ergänzung zum Fall $r = 2$: Durch die Grenztransformation (3) wird jeder Punkt von W, der nicht mit L_2 zusammenfällt, auf einen bestimmten Punkt der Ebene L_1 abgebildet. Seine Koordinaten w_i' sind stetige Funktionen der Koordinaten w_i des Originalpunkts. Man kann den Bildpunkt auf L_1 beliebig festlegen durch eine Gleichung

$$\alpha_1 w_1' + \alpha_2 w_2' + \alpha_3 w_3' = 0 , \tag{7}$$

die von der Gleichung

$$c_1 w_1' + c_2 w_2' - t w_3' = 0 , \tag{8}$$

welche L_1 definiert, linear unabhängig ist. Ersetzt man in (7) die w_i' durch die w_i vermöge (3), so ergibt sich eine lineare Gleichung in w_i. Die zu dem beliebig festgelegten Bildpunkt p gehörenden Originalpunkte liegen also auf einer Ebene α. Diese geht durch den Punkt L_2, denn dessen Koordinaten befriedigen nach der Ausübung der Grenztransformation die in w_i' homogene Gleichung (7).

Zusammenfassend erhalten wir

Satz 4. *Die Grenztransformation einer Normalfolge vom Rang 2 bildet alle Punkte von W mit Ausnahme des Punktes L_2 auf eine Ebene L_1 ab, und zwar ist jeder Punkt p von L_1 das Bild aller Punkte (mit Ausnahme von L_2) auf der Ebene, die durch p und L_2 geht. — Die Grenztransformation einer Normalfolge vom Rang 1 bildet alle Punkte von W auf einen Punkt L_1 ab, mit Ausnahme der Punkte einer Ebene L_2.*

Wendet man auf die Punkte einer Menge M die Transformationen S_ν einer Normalfolge F an, so erhält man eine unendliche Folge von Punktmengen $M_\nu = S_\nu M$. Diese besitzen wenigstens einen Häufungspunkt, d. h. einen Punkt, in dessen sämtliche Umgebungen unendlich viele Mengen M_ν eindringen.

Satz 5. [9]) *Enthält die abgeschlossene Menge M keinen Punkt von $L_2(F)$, so konvergiert jede aus einem Punkt p von M entstehende Punktfolge $p_\nu = S_\nu p$ gegen den Bildpunkt Tp, der dem Punkt p durch die Grenztransformation T von F auf $L_1(F)$ zugeordnet wird, und diese Konvergenz ist gleichmässig für alle Punkte von M. Dagegen ist die gleichmässige Konvergenz unmöglich in einer Menge M, die Punkte von $L_2(F)$ im Inneren enthält.*

Folgerung: Jeder abgeschlossene Bereich, der zu L_1 fremd ist, kann mit höchstens endlich vielen Mengen $M_\nu = S_\nu M$ (M abgeschlossen und fremd zu L_2) Punkte gemeinsam haben.

Definition 6. Die Folge der zu $F = (S_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ inversen Transformationen $S_\nu^* = S_\nu^{-1}$ soll die zu F *inverse Folge* heißen und mit F^* bezeichnet werden.

Definition 7. Unter einer *umkehrbar normalen Folge F* verstehen wir eine solche Folge, die samt ihrer inversen F^* normal ist. r und $r^* = r(F^*)$ seien die zugehörigen Rangzahlen, L_h und $L_h^* = L_h(F^*)$ $(h = 1, 2)$ die Grenzelemente.

Jede unendliche Folge von Transformationen aus G enthält eine umkehrbar normale Teilfolge.

Satz 6. *L_1 ist in L_2^* enthalten* (also auch L_1^* in L_2).

Beweis[10]): Fall a) $r = 2$. p sei ein beliebiger Punkt der Ebene L_1; q sei ein Punkt der Ebene α, die durch p und den Punkt L_2 bestimmt ist, und zwar sei q so gewählt, daß er weder mit L_2 zusammenfällt, noch auf L_1^* liegt, sonst beliebig auf α.

Fall b) $r = 1$. p sei der Punkt L_1; q sei ein Punkt, der weder auf der Ebene L_2, noch auf L_1^* liegt, sonst beliebig.

Die Punkte $q_\nu = S_\nu q$ (S_ν aus F) konvergieren gegen p, nach Satz 4. Angenommen, p läge außerhalb L_2^*. Dann gibt es nach Satz 5 eine Umgebung $U(p)$, deren Bilder bei der Ausführung der Transformationen von F^* gleichmäßig gegen eine Punktmenge auf L_1^* konvergieren. Andererseits gibt es in $U(p)$ unendlich viele Punkte $q_\nu = S_\nu q$, deren Bilder $S_\nu^{-1} q_\nu$ bei der Transformationsfolge F^* mit q zusammenfallen. q war aber außerhalb L_1^* gewählt. Folglich war die Annahme unzulässig, daß p außerhalb L_2^* liege. L_1 ist also ganz in L_2^* enthalten.

Satz 7. $r + r^* \leqq 3$.

---

[9]) Beweis bei *Myrberg*, Acta 46, 226 f.

[10]) Einen anderen Beweis dieses grundlegenden Sachverhalts findet man für Folgen vom Rang 1 im II. Teil, unter Satz 22.

Zum Beweis braucht nur gezeigt zu werden, daß nicht r und r^* gleichzeitig 2 sein können. Das folgt aber unmittelbar. Denn z. B. im Fall $r^* = 2$ ist L_2^* ein Punkt, nach Satz 6 also auch L_1 ein Punkt, also $r = 1$.

Beispiel 1

m, n seien zwei beliebig, aber fest gewählte ganze komplexe Zahlen $\neq 0$. Man betrachte die Transformation

$$T_{m,n}\begin{cases} w' = w + m \\ \\ z' = z + n \end{cases} \quad \text{bzw. homogen} \quad \begin{cases} t w_1' = w_1 \quad + m w_3 \\ t w_2' = \quad w_2 + n w_3 \\ t w_3' = \quad\quad w_3 \end{cases} . \qquad (*)$$

Die Potenzen $T_{m,n}^\nu$ ($m, n \neq 0$ fest; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) bilden eine Normalfolge F vom Rang $r = 1$ mit den Grenzelementen

L_1: der Punkt $q(mw_3, nw_3, 0)$, d. i. $q\left(\infty, \frac{n}{m}\right)$ auf ε_∞,

L_2: $w_3 = 0$, d. i. ε_∞ (unabhängig von m, n).

Die Folge ist umkehrbar normal, und wegen $T_{m,n}^* = T_{-m,-n}$ hat die inverse Folge dieselben Grenzelemente.

Die durch $T_{m,n}$ induzierte Transformation ist

$$\tilde{\tau}_{m,n}\begin{cases} \tilde{\omega}' = \dfrac{\tilde{\omega}}{-m\tilde{\omega} - n\tilde{\zeta} + 1} \\ \tilde{\zeta}' = \dfrac{\tilde{\zeta}}{-m\tilde{\omega} - n\tilde{\zeta} + 1} \end{cases} \quad \text{bzw. homogen} \quad \begin{cases} \lambda\tilde{\omega}_1' = \tilde{\omega}_1 \\ \lambda\tilde{\omega}_2' = \quad \tilde{\omega}_2 \\ \lambda\tilde{\omega}_3' = -m\tilde{\omega}_1 - n\tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_3 \end{cases} .$$

Die Potenzen $\tilde{\tau}_{m,n}^\nu$ ($m, n \neq 0$ fest; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) bilden eine Normalfolge $\tilde{\Phi}$ von Punkttransformationen in Ω vom Rang $\varrho(\tilde{\Phi}) = 1$ mit den Grenzelementen

$\tilde{\Lambda}_1$: der Nullpunkt in $\tilde{\Omega}$ (unabhängig von m, n),

$\tilde{\Lambda}_2$: $m\tilde{\omega}_1 + n\tilde{\omega}_2 = 0$, d. i. eine Ebene durch den Nullpunkt in $\tilde{\Omega}$.

Die zu $\tilde{\Phi}$ inverse Folge ist normal und hat dieselben Grenzelemente wie $\tilde{\Phi}$.

Im Punktraum W ist $\Lambda_1 = \Lambda_1^*$ die uneigentliche Ebene $\varepsilon\infty$; $\Lambda_2 = \Lambda_2^*$ ist das Ebenenbüschel mit dem Träger $q\left(\infty, \frac{n}{m}\right)$ auf ε_∞.

Beispiel 2

a) m, n seien fest gewählte komplexe Zahlen, die der Bedingung $|m| < 1 < |n|$ genügen. Man bilde die Transformation

$$T_{m,n}\begin{cases} w' = mw \\ z' = nz \end{cases} \text{bzw. homogen} \begin{cases} t w_1' = m w_1 \\ t w_2' = \qquad n w_2 \\ t w_3' = \qquad\qquad w_3 \end{cases}$$

und betrachte die Folge $T^{\nu}_{m,n}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Es ist eine Normalfolge mit den Grenzelementen

$$L_1 : (0, \infty) \text{ bzw. } (0, w_2, 0) \text{ und } L_2 : z = 0 \text{ bzw. } w_2 = 0.$$

Die Folge der inversen Transformationen hat die Grenzelemente

$$L_1^* : (\infty, 0) \text{ bzw. } (w_1, 0, 0) \text{ und } L_2^* : w = 0 \text{ bzw. } w_1 = 0.$$

b) Die Transformationen $T^{\nu}_{m,n}$ mit $|m| = |n| > 1$ bilden eine Folge vom Rang $r = 2$ mit $L_1 = \varepsilon_\infty$, $L_2 = (0, 0)$. Die inverse Folge hat den Rang $r^* = 1$. Ihre Grenzelemente sind $L_1^* = (0, 0)$, $L_2^* = \varepsilon_\infty$.

Die induzierten Folgen haben die Grenzelemente

a) $\tilde{\Lambda}_1$: $(1, 0, 0)$, d. i. die Ebene $w_1 = 0$, zugleich L_2^*;
$\tilde{\Lambda}_2$: $\omega_1 = 0$, d. i. das Büschel der Ebenen durch $w_2 = w_3 = 0$, also mit dem Träger L_1^*;
$\tilde{\Lambda}_1^*$: $(0, 1, 0)$, d. i. die Ebene $w_2 = 0$, zugleich L_2;
Λ_2^*: $\omega_2 = 0$, d. i. das Büschel der Ebenen durch $w_1 = w_3 = 0$, also mit dem Träger L_1;

b) Λ_1: $(0, 0, 1)$, d. i. die Ebene $w_3 = 0$, zugleich L_2^*;
$\tilde{\Lambda}_2$: $\tilde{\omega}_3 = 0$, d. i. das Büschel der Ebenen durch $(0, 0) = L_1^*$;
$\tilde{\Lambda}_1^*$: $\tilde{\omega}_3 = 0$, d. i. das Büschel der Ebenen durch $(0, 0) = L_2$;
$\tilde{\Lambda}_2^*$: $(0, 0, 1)$, d. i. die Ebene $w_3 = 0$, zugleich L_1.

4. Normale Diskontinuität

Definition 8. Eine *Folge von Transformationen*

$$T_n: \begin{cases} w' = f_n(w, z) \\ z' = g_n(w, z) \end{cases}$$

heißt *im Punkt p konvergent*, wenn es zu p eine Umgebung $U(p)$ und eine (nicht entartete) Transformation

$$S_0: \begin{cases} w' = l_1^{(0)}(w, z) \\ z' = l_2^{(0)}(w, z) \end{cases}$$

des Typus (1) gibt, so daß

$$\begin{cases} l_1^{(0)}(f_n(w, z), g_n(w, z)) \\ l_2^{(0)}(f_n(w, z), g_n(w, z)) \end{cases}$$

Paare von Folgen von Funktionen sind, die sich in $U(p)$ regulär verhalten und dort im elementaren Sinn konvergieren. — Entsprechend für Punkte auf der uneigentlichen Ebene.

Eine *Folge von Transformationen* heißt *in einem Bereich konvergent*, wenn sie in jedem Punkt dieses Bereichs konvergiert.

Definition 9. Eine diskontinuierliche lineare Gruppe G ohne infinitesimale Transformationen heißt *normal-diskontinuierlich (n.-d.) in einem Bereich A*, wenn es in jeder unendlichen Folge von Transformationen aus G eine Teilfolge gibt, die in jedem abgeschlossenen Teilbereich von A gleichmäßig konvergiert.

Wir sagen auch, G sei *n.-d. in jedem Punkt* von A, und die Menge der Punkte, in denen G n.-d. ist, nennen wir den *Normalbereich von G*. Er ist ein offener Bereich.

N.-d. (schlechtweg) nennen wir jede Gruppe, die einen nicht leeren Normalbereich besitzt.

5. Die Grenzelemente von Ebenenfolgen im Punktraum. Gruppen 1. Klasse

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:
F sei eine umkehrbar normale Folge von Punkttransformationen S_ν in W;

$S_\nu = (a_{ik}^{(\nu)}) \rightarrow T = (b_{ik})$, $\quad (i, k = 1, 2, 3)$;

F^* die zu F inverse Folge $S_\nu^* = S_\nu^{-1} = (a_{ik}^{(\nu)*}) \rightarrow T^* = (b_{ik}^*)$;

Φ die durch F induzierte Folge von Ebenentransformationen σ_ν in Ω: $\sigma_\nu = (\alpha_{ik}^{(\nu)}) \rightarrow \tau = (\beta_{ik})$;

$\tilde{\Phi}$ die Φ zugeordnete Folge von Punkttransformationen in $\tilde{\Omega}$. Rang und Grenzelemente seien entsprechend bezeichnet mit r, L_h bzw. ϱ, Λ_h $(h = 1, 2)$.

Es gilt $\alpha_{ik}^{(\nu)} = a_{ki}^{(\nu)*}$; daraus folgt, daß die durch F induzierte Folge ebenfalls umkehrbar normal ist, und zwar ist $\varrho = r^*$, da der Rang einer Matrix gegenüber Transposition invariant ist. Die Grenzelemente einer Folge von Ebenentransformationen stehen mit den Grenzelementen der inversen Folge der zugehörigen Punkttransformationen in einem einfachen Zusammenhang:

Satz 8. I. *Jede Ebene von Λ_1 inzidiert mit jedem Punkt von L_2^*.*

II. *Jede Ebene von Λ_2 inzidiert mit jedem Punkt von L_1^*.*

Falls man zum Punkt w in W die duale Ebene $\tilde{w}$ in $\tilde{\Omega}$ einführt, so hat man für die Punktmengen $\tilde{\Lambda}_h$ und die Ebenenmengen $\tilde{L}_h^*$ die Aussagen

I. Jede Ebene von $\tilde{L}_2^*$ inzidiert mit jedem Punkt von $\tilde{\Lambda}_1$,

II. Jede Ebene von $\tilde{L}_1^*$ inzidiert mit jedem Punkt von $\tilde{\Lambda}_2$;

und man erkennt, daß die Behauptung II für eine Folge F identisch ist mit der Behauptung I für die inverse Folge F^* im Dualraum. Es genügt also, etwa I zu beweisen.

Beweis von I. Λ_1 besteht aus allen Ebenen ω, deren Koordinaten die Gleichungen

$$\omega_i' = \sum_{k=1}^{3} \beta_{ik}\, \omega_k \quad (i = 1, 2, 3) \tag{9}$$

befriedigen, wo $\beta_{ik} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_{ik}^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu\to\infty} a_{ki}^{(\nu)*} = b_{ki}^*$ ist. L_2^* besteht aus allen Punkten w', deren Koordinaten die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{3} b_{ik}^*\, w_k' = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{10}$$

befriedigen. Die Gleichung der Ebene ω' in Punktkoordinaten ist $\Sigma\, \omega_i'\, w_i' = 0$. Setzt man darin nach (9) $\omega_1' = \sum\limits_{k=1}^{3} b_{ki}^*\, \omega_k$, so ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{3} \omega_k \Big(\sum_{i=1}^{3} b_{ki}^* w_i'\Big) = 0 \;.$$

Diese Gleichung gilt aber identisch in ω_k, wenn w' eine Lösung von (10) darstellt. Jeder Punkt von L_2^* liegt also auf jeder Ebene von Λ_1, wie in I behauptet wurde.

Aus Satz 6 entnimmt man ausführlich die folgende Anordnung der Grenzelemente.

a) Im Fall $\varrho = r^* = 2$:

Λ_1 ist das Ebenenbüschel mit dem Träger L_2^*;

Λ_2 ist die Ebene L_1^*.

b) Im Fall $\varrho = r^* = 1$:

Λ_1 ist die Ebene L_2^*;

Λ_2 ist das Ebenenbüschel mit dem Träger L_1^*.

Dieser Sachverhalt gestattet, den zu Satz 4 dualen Satz folgendermaßen zu fassen:

Satz 9. F sei eine umkehrbar normale Folge von Punkttransformationen S_ν, Φ die durch F induzierte Folge von Ebenentransformationen σ_ν, ε eine Ebene, die nicht zu Λ_2 gehört, also L_1^* nicht ganz enthält. *Die Grenzebene $\bar{\varepsilon}$ der Ebenenfolge $S_\nu \varepsilon$ ist*

a) *im Fall $r^* = 2$: die Ebene durch den Punkt L_2^* und den Schnittpunkt q von ε mit L_1^*;*

b) *im Fall $r^* = 1$: die Ebene L_2^*.*

Beweis: a) Λ_1 ist das Ebenenbüschel durch den Punkt L_2^*. Eine Einzelebene λ von Λ_1 ist bei der Grenztransformation T von F die Bildebene von allen Ebenen α desjenigen Ebenenbüschels, das durch λ und Λ_2 bestimmt wird, also von allen Ebenen α durch den Punkt $q = [\lambda, L_1^*]$, da $\Lambda_2 = L_1^*$ ist. Die Anfangsebene ε wird also auf die Ebene abgebildet, die durch die Punkte L_2^* und $[\varepsilon, L_1^*]$ bestimmt ist.

b) Satz 8 zeigt unmittelbar: $\bar{\varepsilon} = L_2^*$.

Man erhält nach dem Gesagten eine vollkommene Analogie im Verhalten der Punkt- und Ebenentransformationen, wenn man sich auf Gruppen beschränkt, aus deren Transformationen sich nur Normalfolgen vom Rang $r = 1$ bilden lassen. Solche Gruppen heißen nach Myrberg *Gruppen 1. Klasse.* Die genannte Analogie ist andererseits nur bei Gruppen 1. Klasse möglich, weil nach Satz 7 die Rangzahlen einer Normalfolge und der durch sie induzierten Folge der Bedingung $r + \varrho \leqq 3$ unterworfen sind. *In allen folgenden Betrachtungen ist nur noch von Gruppen 1. Klasse die Rede.*

6. Grenzmengen und Gruppendiskontinuität. — Bedingte Diskontinuität

Definition 10. Wir bilden die Vereinigungsmenge der ersten bzw. zweiten Grenzelemente aller Normalfolgen aus G und bezeichnen sie als die *erste* bzw. *zweite Grenzmenge* $\{L_h(G)\}$ $(h = 1, 2)$ der Gruppe.

Wir bilden ebenso $\{\Lambda_h(\Gamma)\}$ ($h = 1, 2$) für die Normalfolgen aus der induzierten Gruppe Γ.

Satz 10. *Jede Grenzmenge ist abgeschlossen und gegenüber G bzw. Γ invariant.*

Die Abgeschlossenheit folgt unmittelbar aus der Definition 10, die Invarianz daraus, daß das Grenzelement L_h einer Normalfolge F durch irgend eine Transformation aus G übergeht in das entsprechende Grenzelement TL_h der mit T umrahmten Normalfolge TFT^{-1}.

Aus den Definitionen 9 und 10 ergibt sich auf Grund der Sätze 4 und 5:

Satz 11 a. *Der Bereich N der normalen Diskontinuität von G ist*

$$N = W - \{L_2(G)\} .$$

Ferner: Jeder Punkt von $\{L_1\}$ ist Häufungspunkt von äquivalenten Punkten. G ist also in keinem Punkt von $\{L_1\}$ e.-d. Umgekehrt braucht aber nicht jeder Häufungspunkt von äquivalenten Punkten zu $\{L_1\}$ zu gehören. Man betrachte etwas das Beispiel 5 (Seite 102). Die zyklische Gruppe der Transformationen

$$T_\nu : \begin{cases} w' = m^\nu w \\ z' = n^\nu z \end{cases} \quad \text{mit } |m| < |n| < 1 \qquad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

enthält nur die Normalfolgen $F = (T_\nu)$ und $F^* = (T_\nu^*)$ (bzw. Teilfolgen von ihnen) mit den Grenzelementen (homogen geschrieben)

$$L_1 = (0, 0, 1) , \quad L_2 : \; w_3 = 0 ,$$
$$L_1^* = (1, 0, 0) , \quad L_2^* : \; w_1 = 0 .$$

Die Punkte der Ebene L_2 haben, mit Ausnahme des Fixpunktes $w_2 = w_3 = 0$, das Grenzelement $M = (0, 1, 0)$ auf L_2^*, und die Punkte der Ebene L_2^* haben, mit Ausnahme des Fixpunktes $w_1 = w_2 = 0$, das Grenzelement $M^* = (0, 1, 0)$ auf L_2. Jede Normalfolge aus G erzeugt aus jedem Punkt von $N = W - \{L_2\}$ eine Folge von äquivalenten Punkten, die gegen L_1 oder L_1^* konvergieren. Ein Punkt von $\{L_2\}$ dagegen wird, wenn er nicht zu $\{L_1\}$ gehört, gegen $M = M^*$ konvergieren. Allgemein: Der Bereich E der eigentlichen Diskontinuität besteht aus $E = W - \{L_1\} - \{M\}$, unter $\{M\}$ die Menge der Häufungspunkte außerhalb $\{L_1\}$ verstanden, nach denen Punkte aus $\{L_2\}$ konvergieren. Weil $\{L_2\}$ invariant und abgeschlossen ist, ist $\{M\}$ in $\{L_2\}$ enthalten.

Für die Funktionentheorie kommen, wie später dargelegt wird, nur n.-d. Gruppen in Frage. Neben dem Normalbereich N spielt der Bereich E der eigentlichen Diskontinuität eine untergeordnete Rolle. Dagegen ist es für manche Zwecke nützlich und wird schon durch die duale Stellung der 1. und 2. Grenzmenge nahegelegt, den Bereich $B = W - \{L_1\}$ zu betrachten. Zu seiner Abgrenzung bedürfen wir einer gemeinsamen Kennzeichnung aller Punkte außerhalb $\{L_1(G)\}$. Dazu dient die

Definition 11. Die Gruppe G heißt *bedingt-diskontinuierlich* (b.-d.) im Punkt p, wenn zu jeder vorgelegten Normalfolge F aus G eine Umgebung $U(p)$ von p und in ihr ein Punkt q samt einer Umgebung $V(q)$ sich angeben läßt, so daß bei der Ausführung der Transformationen von F nur endlich viele Bilder von $V(q)$ Punkte mit $U(p)$ gemeinsam haben.

Die Menge der Punkte, in denen G b.-d. ist, heißt der *Diskontinuitätsbereich* B von G.

Satz 11b. *Der Diskontinuitätsbereich B einer Gruppe G ist*

$$B = W - \{L_1(G)\}\,.$$

Beweis. Zunächst ist klar, daß B keinen Punkt von $\{L_1\}$ enthält, denn jeder solche Punkt ist das 1. Grenzelement einer Normalfolge F_0 von G. Jede volle Teilumgebung einer jeden vierdimensionalen Umgebung des Punktes $L_1(F_0)$ enthält notwendig Punkte q, die nicht auf dem 2. Grenzelement $L_2(F_0)$ liegen. Durch die Transformationen der Normalfolge F_0 wird jeder dieser Punkte q abgebildet auf eine Folge von äquivalenten Punkten, die gegen $L_1(F_0)$ konvergieren.

Andererseits enthält B jeden Punkt außerhalb $\{L_1\}$. Denn bei einer vorgelegten Normalfolge F_0 aus G konvergieren alle Punkte außerhalb der Ebene $L_2(F_0)$ gegen $L_1(F_0)$. p sei ein Punkt außerhalb $\{L_1\}$. Wir wählen $U(p)$ so klein, daß $L_1(F_0)$ nicht darin liegt.

a) Liegt p nicht auf $L_2(F_0)$, so konvergiert eine genügend kleine vierdimensionale $U(p)$ gegen $L_1(F_0)$, nur endlich viele der durch die Transformationen der Folge F_0 aus $U(p)$ erzeugten Bilder haben also Punkte mit $U(p)$ gemeinsam.

b) Liegt p auf $L_2(F_0)$, so gibt es trotzdem in jeder vierdimensionalen $U(p)$ einen Punkt q und dazu eine vierdimensionale Umgebung $V(q)$, die durch die Transformationen von F_0 in eine Folge von Umgebungen abgebildet wird, die gegen $L_1(F_0)$ konvergieren; nur endlich viele dieser Bilder haben also Punkte mit $U(p)$ gemeinsam.

Der Satz 11b zeigt, zusammen mit den Sätzen 4 und 5, die Bedeutung des Diskontinuitätsbereichs:

Satz 12. *B ist der maximale Bereich, der keinen Häufungspunkt von Bildern abgeschlossener Punktmengen aus dem Inneren des Normalbereichs enthält.*

Aus der Invarianz der Grenzmengen folgt

Satz 13. *Der Diskontinuitätsbereich und der Normalbereich von G sind invariant gegenüber G.*

Nach Satz 6 ist $\{L_1\}$ in $\{L_2\}$ enthalten. Und wie das schon herangezogene Beispiel 5 (Seite 102) zeigt, kann eine Gruppe auch außerhalb ihres Normalbereiches e.-d. sein. Daher

Satz 14. *Der Normalbereich ist ein Teilbereich des maximalen Bereiches der eigentlichen Diskontinuität, also auch des Diskontinuitätsbereichs.*

Zur Übersicht stellen wir noch einmal zusammen:
Maximaler Bereich der bedingten Diskontinuität (Diskontinuitätsbereich)
$B = W - \{L_1\}$,
maximaler Bereich der eigentlichen Diskontinuität
$E = W - \{L_1\} - \{M\}$,
maximaler Bereich der normalen Diskontinuität (Normalbereich)
$N = W - \{L_2\}$;

$$B \geqq E \geqq N .$$

7. Zusammenhang zwischen normaler Diskontinuität und bedingter Diskontinuität bei Gruppen 1. Klasse

Auf Grund des Zusammenhangs der Grenzelemente bei Normalfolgen aus Punkt- und Ebenentransformationen läßt sich bei Gruppen 1. Klasse die normale Diskontinuität auf die bedingte Diskontinuität im Dualraum zurückführen.

Hauptsatz 1. *Notwendig und hinreichend für die normale Diskontinuität einer Gruppe G im Punkt p ist bei Gruppen 1. Klasse die bedingte Diskontinuität der induzierten Gruppe Γ in jeder Ebene ε_p durch p.*

Bei allgemeinen Gruppen ist die Bedingung wohl hinreichend, aber nicht notwendig.

Beweis: 1. *Die bedingte Diskontinuität von Γ in jeder ε_p ist hinreichend für die normale Diskontinuität von G in p.* Die Voraussetzung besagt nach Satz 11: „Keine Ebene ε_p gehört zu $\{\Lambda_1(\Gamma)\}$“, die Behauptung: „p gehört nicht zu $\{L_2(G)\}$“. Angenommen, diese Behauptung sei falsch, p sei also ein Punkt von $\{L_2(G)\}$, z. B. von $L_2^*(F_0)$, wo F_0 eine Normalfolge aus G, Φ_0 die zugeordnete Folge aus Γ bezeichnet. Dann geht, nach Satz 8I, jede Ebene von $\Lambda_1(\Phi_0)$ durch p. Es gäbe also (mindestens) eine Ebene ε_p, die zu $\{\Lambda_1(\Gamma)\}$ gehört, im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. *Die bedingte Diskontinuität von Γ in jeder ε_p ist notwendig für die normale Diskontinuität von G in p.* Wir setzen voraus, G ist n.-d. in p, d. h. nach Satz 11a: „p gehört nicht zu $\{L_2(G)\}$“, und behaupten für Gruppen 1. Klasse: „Γ ist b.-d. in jeder ε_p“. Denn gäbe es eine Ebene ε_0 durch p, in der Γ nicht b.-d. wäre, so hieße das: ε_0 gehört zu $\{\Lambda_1(\Gamma)\}$, etwa zu $\Lambda_1(\Phi_0)$, wo Φ_0 eine Normalfolge aus Γ und später F_0 die ihr zugeordnete Folge aus G bezeichnet. Nach Satz 8I geht ε_0 durch jeden Punkt von $L_2^*(F)$, d. h. bei Gruppen 1. Klasse, wo jedes Grenzelement L_2 eine Ebene ist: ε_0 fällt mit $L_2^*(F)$ zusammen, jeder Punkt von ε_0 gehört zu $\{L_2(G)\}$, insbesondere p, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Damit ist der Hauptsatz 1 bewiesen, und man erkennt zugleich, weshalb die Einschränkung auf Gruppen 1. Klasse erforderlich ist.

In Verbindung mit den Sätzen 6 und 11 folgt insbesondere

Satz 15. *Ist eine lineare Gruppe Γ von Ebenentransformationen b.-d. in jeder Ebene durch den Punkt p, so ist die zugehörige Gruppe G von Punkttransformationen b.-d. in p.*

Dagegen braucht die bedingte Diskontinuität von G im Punkt p bereits nicht mehr zu bestehen, wenn Γ auch nur in einer einzigen Ebene durch p nicht b.-d. ist. Das zeigt das Beispiel 3 unten in der Dualform: Γ ist nicht b.-d. in ε_∞, trotzdem G nur in einem einzigen Punkt q von ε_∞ nicht b.-d. ist.

Wir können jetzt die frühere Erklärung der normalen Diskontinuität durch die folgende ersetzen, die in manchen Fällen handlicher ist.

Definition 9a. Eine diskontinuierliche lineare Gruppe G 1. Klasse ohne infinitesimale Transformationen heißt *n.-d. im Punkt p*, wenn die durch G induzierte Gruppe Γ von Ebenentransformationen b.-d. ist in *jeder* Ebene ε_p durch p.

Beispiel 3. Die Transformationen

$$T^{\nu}_{m,n}\begin{cases} w' = w + \nu m \\ z' = z + \nu n \end{cases} \quad (m, n \neq 0 \text{ ganz komplex, fest}; \ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

einer der im Beispiel 1 betrachteten Normalfolgen bilden zusammen mit den inversen Transformationen eine Gruppe G. Alle Normalfolgen aus G haben die gleichen Grenzelemente, daher ist

$$\{L_1(G)\} = q\left(\infty, \frac{n}{m}\right), \ \{L_2(G)\} = \varepsilon_\infty. \ G \text{ ist eine Gruppe 1. Klasse,}$$

denn alle ihre Normalfolgen haben den Rang 1. $N = W - \{L_2\}$ ist ein echter Teilbereich von $B = W - \{L_1\}$. Ein Punkt von $L_2 = \varepsilon_\infty$ wird in der Grenze abgebildet auf $M = \left(\infty, \frac{n}{m}\right) = L_1$. Die maximalen Bereiche B der bedingten und E der eigentlichen Diskontinuität sind also dieselben. — Die induzierte Gruppe Γ der Ebenentransformationen in W hat die Grenzmengen $\{\Lambda_1(\Gamma)\} = \varepsilon_\infty$, $\{\Lambda_2(\Gamma)\}$: das Ebenenbüschel mit dem Träger $q\left(\infty, \frac{n}{m}\right)$.

Zu Satz 14: Die bedingte Diskontinuität von Γ in ε_∞ ist gestört, trotzdem G nur in einem einzigen Punkt von ε_∞ nicht b.-d. ist.

Beispiel 4

Wir erweitern das vorige Beispiel dadurch, daß wir m, n nicht mehr fest gewählt, sondern ganz komplex variabel sein lassen. Die Transformationen $T^\nu_{m,n}$ bilden dann eine Gruppe G 1. Klasse mit den folgenden Grenzmengen: $\{L_1(G)\}$: alle Punkte auf ε_∞, deren Koordinaten als Quotient zweier ganzer komplexer Zahlen darstellbar sind; $\{L_2(G)\}$: ε_∞. Da jeder Punkt von ε_∞ durch Punkte von $\{L_1\}$ approximierbar ist, so gilt hier $\{L_1\} = \{L_2\}$, also $N = B$. Und wie im vorigen Beispiel gilt $E = B$. — Die Grenzmengen der induzierten Gruppe Γ sind $\{\Lambda_1(\Gamma)\} = \varepsilon_\infty$, $\{\Lambda_2(\Gamma)\} = \Omega$, d. i. die Gesamtheit der Ebenen im Punktraum.

Dieses Beispiel ist deswegen beachtenswert: die Gruppe G ist in jedem Punkt des Raumes W außer in den Punkten von ε_∞ n.-d.; dagegen ist die induzierte Gruppe Γ in keiner Ebene von Ω n.-d. Jede Ebene ω enthält ja einen Punkt von ε_∞, wegen Hauptsatz 1 (in der Dualform) kann daher Γ in keiner Ebene ω n.-d. sein.

Beispiel 5

Die durch $T_{m,n}\begin{cases} w_1' = m w_1 \\ w_2' = n w_2 \quad (m, n \text{ fest, komplex und } |m| < |n| < 1) \\ w_3' = w_3 \end{cases}$

erzeugte zyklische Gruppe G hat die Grenzelemente:

$$L_1: (0, 0, 1), \qquad L_2:\ w_3 = 0\,,$$
$$L_1^*: (1, 0, 0)\,, \qquad L_2^*:\ w_1 = 0\,.$$

Die durch $T_{m,n}$ induzierte Ebenentransformation ist

$$\tau_{m,n} = \begin{pmatrix} m^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & n^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Daher hat $\tilde{\Gamma}$ die Grenzelemente

$\tilde{\Lambda}_1$: (1, 0, 0) oder $w_1 = 0$, d. i. L_2^* ;

$\tilde{\Lambda}_2$: $\tilde{\omega}_1 = 0$, d. i. das Ebenenbüschel durch $(1, 0, 0) = L_1^*$;

$\tilde{\Lambda}_1^*$: (0, 0, 1) oder $w_3 = 0$, d. i. L_2 ;

$\tilde{\Lambda}_2^*$: $\omega_3 = 0$, d. i. das Ebenenbüschel durch $(0, 0, 1) = L_1$.

Die Bereiche B, E und N von G wurden in § 6 angegeben.

An diesem Beispiel lassen sich die Aussagen am Schluß von § 1 über Punkt- und Ebenenkonvergenz veranschaulichen. Man betrachte eine Normalfolge von Transformationen aus G mit den angegebenen Grenzelementen L_1, L_2. Φ sei die durch F induzierte Folge. ε_0 sei eine Ebene, die nicht zu $\Lambda_2(\Phi)$ gehört, also nicht durch $L_1^* = (1, 0, 0)$ geht. Der Schnittpunkt von ε_0 mit der Ebene L_2 sei s, er ist vom Punkt $w_2 = w_3 = 0$ verschieden. Jeder Punkt außerhalb einer kleinen Umgebung von s wird durch die Grenztransformation von F nach $L_1(F) = (0, 0, 1)$ abgebildet, s dagegen nach $M = (0, 1, 0)$. Andererseits konvergieren die durch die Transformationen von Φ erzeugten Bilder von ε_0 gleichmäßig gegen die Ebene $\Lambda_2(\Phi) = L_2^*$: $w_1 = 0$, die durch die Punkte L_1 und M hindurchgeht.

II. TEIL

Theorie der isometrischen Gebilde

In diesem Abschnitt behandeln wir die n.-d. linearen Gruppen 1. Klasse in zwei komplexen Variablen nach einem Verfahren, das zeigt, wie günstig es ist, die Gruppen der Punkt- und der Ebenentransformationen gleichzeitig zu betrachten. In beiden Gruppen wird die normale Diskontinuität vorausgesetzt. Das wesentliche Hilfsmittel ist einer Theorie der e.-d. Gruppen von L. R. Ford [3], [4] für die Gaußische Ebene entnommen. Dort werden isometrische Gebilde linearer Gruppen in einer Variablen mit großem Erfolg verwendet. Hier wird entsprechend jeder Transformation einer n.-d. Gruppe ein isometrisches Gebilde zugeordnet. Mit Hilfe der isometrischen Gebilde der Gruppe G kann

1. der maximale Bereich der bedingten Diskontinuität der durch G induzierten Ebenengruppe Γ,
2. der maximale Bereich der normalen Diskontinuität der Punktgruppe G

abgegrenzt werden. Unter der Voraussetzung, daß G und Γ n.-d. sind in einem Paar von inzidenten Elementen, wird

3. ein Fundamentalbereich der Gruppe G für ihren Normalbereich

konstruiert. Entsprechend dem Fordschen Nachweis, daß in der komplexen Ebene zu jeder e.-d. linearen Gruppe ein Fundamentalbereich existiert, der durch Kreise berandet wird, finden wir im Raum $W(w, z)$ zweier komplexer Veränderlichen zum Normalbereich jeder linearen Gruppe 1. Klasse mit normaler Diskontinuität in einem Paar inzidenter dualer Elemente einen Fundamentalbereich, der durch Projektivebenen [1] berandet wird. Jeder derartige Fundamentalbereich ist daher planarkonvex.

Die von Ford im klassischen Fall verwendeten Methoden bedürfen vor allem deswegen einer Umgestaltung, weil erst bei zwei und mehr Variablen die Begriffe der eigentlichen und der normalen Diskontinuität auseinanderfallen.

8. Isometrische Gebilde einer linearen Gruppe
Hilfsbetrachtungen über Projektivebenen

Wir schreiben die Transformationen der Gruppe G jetzt inhomogen

$$T:\begin{cases} w' = \dfrac{aw + bz + c}{gw + hz + k} \\[2ex] z' = \dfrac{dw + ez + f}{gw + hz + k} \end{cases} \quad \text{mit der Normierung } \Delta_T \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 1. \tag{11}$$

Wir erhalten dann für die Funktionaldeterminante von T den Ausdruck

$$D_T(w, z) = \frac{\partial(w', z')}{\partial(w, z)} = \frac{\Delta_T}{(gw + hz + k)^3} = \frac{1}{(gw + hz + k)^3}.$$

Die Normierung $\Delta_T = 1$ erleichtert die Darstellung der in diesem Teil auseinandergesetzten geometrischen Tatsachen. Sobald von der Konvergenz der Koeffizienten einer Transformationsfolge Gebrauch gemacht wird, kehrt man zur früheren Normierung: Maximum der Koeffizientenbeträge gleich 1 zurück. Insbesondere zur Erklärung der Normalfolgen, worunter nach Definition 3 jede Folge von Transformationen zu verstehen ist, deren nach § 1 normierte Koeffizienten gegen endliche, nicht sämtlich verschwindende Grenzwerte konvergieren.

Definition 12. Zu einer gegebenen Transformation T aus G betrachten wir die Punkte (w, z), in denen die Funktionaldeterminante D_T von T den Betrag 1 hat. Ihre Gesamtheit nennen wir das *isometrische Gebilde der Transformation* T.

Es ist eine „Projektivebene“ [1] Π mit der Darstellung

$$|gw + hz + k| = 1.$$

Eine solche Projektivebene ist eine analytische Hyperfläche, bestehend aus einer einparametrigen Schar analytischer Ebenen durch einen festen Punkt auf ε_∞. Diese Ebenenschar wird am deutlichsten wiedergegeben in der Darstellung

$$\Pi: \; gw + hz + k = e^{\theta\sqrt{-1}} \; (\theta \text{ ein reeller Parameter}) . \tag{12}$$

Wir nennen Π den *isometrischen Zylinder* der Transformation T. Jede Ebene (12) geht durch den Punkt $s\left(-\frac{h}{g}, \infty\right)$; s heißt der *Scheitel* von Π. Die zum selben Bündel gehörende, aber nicht in der Schar Π enthaltene Ebene

$$\alpha: \; gw + hz + k = 0 \tag{13}$$

nennen wir die *Achse* von Π. Jede Ebene (12) hat von α den Abstand $r = \frac{1}{\sqrt{|g|^2 + |h|^2}}$; r heißt der Radius von Π. Ein isometrischer Zylinder Π zerlegt die Ebenen durch s und damit die Punkte von W (mit Ausnahme von s) in drei Klassen:

I. „*Inneres von Π*": die Punkte (w, z) mit $|D_T| > 1$.
Hierzu gehören insbesondere die Punkte auf der Achse α.

II. „*Mantel von Π*": die Punkte (w, z) mit $|D_T| = 1$.

III. „*Äußeres von Π*": die Punkte (w, z) mit $|D_T| < 1$.
Hierzu gehören die Punkte auf der uneigentlichen Ebene ε_∞ (mit Ausnahme von s).
Den Scheitel s zählen wir zur Klasse II.

Die inhomogenen Koordinaten ω, ζ einer Ebene entnimmt man der Normalform $\omega w + \zeta z + 1 = 0$ ihrer Gleichung in Punktkoordinaten. Danach erhält man die folgenden Darstellungen in Ebenenkoordinaten.

$$\Pi: \; \omega = \frac{g}{k - e^{\theta\sqrt{-1}}}, \quad \zeta = \frac{h}{k - e^{\theta\sqrt{-1}}} \quad (\theta \text{ ein reeller Parameter}); \tag{14}$$

$$\alpha: \; \omega_\alpha = \frac{g}{k}, \quad \zeta_\alpha = \frac{h}{k}; \tag{15}$$

$$s: \quad \frac{\omega}{g} - \frac{\zeta}{h} = 0 .$$

Dabei ist zu beachten, daß bei einer n.-d. Gruppe die Koordinaten so gewählt werden können, daß für keine ihrer Transformationen $k = 0$ oder $g = h = 0$ ist.

Im Dualraum $\tilde{\Omega}$ werden die Ebenen der Schar Π durch die Punkte einer Kreislinie $\tilde{\Pi}$ wiedergegeben. Die Ebene $\tilde{s}$ dieses Kreises ist dem Scheitel s von Π auf ε_∞ in W dual zugeordnet, $\tilde{s}$ geht also durch den Nullpunkt von $\tilde{\Omega}$. In der Tat folgt aus den Gleichungen (14) und (15)

$$|k\omega - g| = |\omega|\,, \qquad |k\zeta - h| = |\zeta|\,,$$
$$|k|\cdot|\omega - \omega_\alpha| = |\omega|\,, \qquad |k|\cdot|\zeta - \zeta_\alpha| = |\zeta|\,,$$
also
$$|\omega|^2 + |\zeta|^2 = |k|^2\cdot(|\omega - \omega_\alpha|^2 + |\zeta - \zeta_\alpha|^2)\,.$$

Die entsprechende Gleichung in $\tilde{\omega}$, $\tilde{\zeta}$ wird von denjenigen Punkten von $\tilde{\Omega}$ befriedigt, deren Abstände vom Nullpunkt und vom Punkt $\tilde{\alpha}$ das Verhältnis $|k|$ haben. Sie erfüllen eine „Apollonius"-Kugel. Ihr Schnittkreis mit der Ebene s ist

$$\tilde{\Pi}: \begin{cases} |\tilde{\omega}|^2 + |\tilde{\zeta}|^2 - |k|^2\cdot(|\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_\alpha|^2 + |\tilde{\zeta} - \tilde{\zeta}_\alpha|^2) = 0 \\ h\tilde{\omega} - g\tilde{\zeta} = 0\,. \end{cases}$$

Der Kreis $\tilde{\Pi}$ ist das *isometrische Gebilde der Transformation* $\tilde{T}$. Er ist der Ort aller Punkte von $\tilde{W}$, die Träger von Ebenenbüscheln sind, in deren Ebenen die Funktionaldeterminante von $\tilde{T}$ den Betrag 1 hat.

Den Punkt $\tilde{\alpha}$ nennen wir den *Pol* des isometrischen Kreises $\tilde{\Pi}$, die Ebene $\tilde{s}$ seine *Leitebene*. $\tilde{\Pi}$ ist der Apolloniuskreis in $\tilde{s}$ in bezug auf den Nullpunkt $\tilde{\varepsilon}_\infty$ und den Punkt $\tilde{\alpha}$ mit dem Abstandsverhältnis $|k|$.

$\tilde{\Pi}$ zerlegt zunächst die *Punkte der Ebene* s in drei Klassen:

I. „*Inneres von* $\tilde{\Pi}$": die Punkte $(\tilde{\omega}, \tilde{\zeta})$ mit $|D_T| > 1$.
Hierzu gehört insbesondere der Pol $\tilde{\alpha}$.

II. „*Rand von* $\tilde{\Pi}$": die Punkte $(\tilde{\omega}, \tilde{\zeta})$ mit $|D_T| = 1$.

III. „*Außeres von* $\tilde{\Pi}$": die Punkte $(\tilde{\omega}, \tilde{\zeta})$ mit $|D_T| < 1$.
Hierzu gehört der Nullpunkt von $\tilde{\Omega}$.

Damit ist auch eine Einteilung aller *Ebenen* in $\tilde{\Omega}$ (zunächst mit Ausnahme von $\tilde{s}$) in drei Klassen gegeben, entsprechend der Einteilung ihrer Schnittpunkte mit $\tilde{s}$. Wir rechnen die Leitebene $\tilde{s}$ zum Rand von $\tilde{\Pi}$.

Die genaue Betrachtung der isometrischen Gebilde im Dualraum ist deswegen wichtig, weil wir damit für die durch G induzierte Ebenengruppe Γ die isometrischen Gebilde im Punktraum übersehen. Es sind

Apollonius-Kreise $\mathfrak{P}$ in Leitebenen durch den Nullpunkt; genauer: die Funktionaldeterminante ϑ der durch T induzierten Transformation τ in Ebenenkoordinaten hat den Betrag 1 in allen Ebenen von Ω, die durch einen Punkt eines Kreises $\mathfrak{P}$ gehen; das ist eine dreiparametrige Mannigfaltigkeit, nämlich die Ebenen aller Büschel, deren Träger zu $\mathfrak{P}$ gehören. Das duale Bild von $\mathfrak{P}$ ist eine Projektivebene $\tilde{\mathfrak{P}}$ in $\tilde{W}$. Die Leitebene σ und der Pol a von $\mathfrak{P}$ sind dem Scheitel $\tilde{\sigma}$ und der Achse $\tilde{a}$ von $\tilde{\mathfrak{P}}$ zugeordnet. (Vgl. die Beispiele 7—9, Seiten 117/9).

Zu jeder Transformation (11) gehört eine bestimmte Projektivebene Π_T als isometrisches Gebilde, mit Ausnahme der Transformationen mit $g = h = 0$, welche ε_∞ festlassen. Die Gesamtheit der Π_T (T aus G) nennen wir die *isometrischen Gebilde der Gruppe* G. Sie sind nicht invariant. Setzt man $T^{-1} = T^*$, $\Pi_{T^{-1}} = \Pi_T^*$ usw., so läßt sich vielmehr ihr Verhalten gegenüber Transformationen von G folgendermaßen beschreiben:

Satz 16. *Die Transformation T bildet das Innere von Π_T auf das Äußere von Π_T^* ab, den Mantel von Π_T auf den Mantel von Π_T^* und das Äußere von Π_T auf das Innere von Π_T^*. Dabei geht die Achse α_T über in ε_∞, ε_∞ in α_T^*, also der Scheitel s_T in s_T^*.*

Beweis: Wir setzen $Tp = p'$ und bezeichnen mit D^* die Funktionaldeterminante von T^* und mit $D(p)$ den Wert von D in p. Bilden wir $T^*(Tp) = p$, so muß das Produkt der entsprechenden Funktionaldeterminanten 1 sein: $D(p) \cdot D^*(p') = 1$. Aus $|D(p)| \lesseqgtr 1$ folgt also $|D^*(p')| \gtreqless 1$, womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist. Den Beweis der letzten Behauptungen entnimmt man den Transformationsformeln (11) unmittelbar:

$$T\alpha_T = \varepsilon_\infty; \quad T^*\alpha_T^* = \varepsilon_\infty; \text{ also } T\varepsilon_\infty = \alpha_T^*; \text{ endlich } Ts = s^*,$$

weil der Scheitel s der Schnittpunkt von α_T und ε_∞, s^* der Schnittpunkt von ε_∞ und α_T^* ist.

Die isometrischen Gebilde sind auch nicht normierungsinvariant, wohl aber ihre Achsen bzw. Pole. Ohne besondere Normierung wird nämlich

$$\Pi_T: \quad |gw + hz + k| = \psi ,$$

wenn $\psi = |\sqrt[3]{\Delta_T}|$ gesetzt wird; oder statt (12)

$$\Pi_T: \quad \frac{g}{\psi} w + \frac{h}{\psi} z + \frac{k}{\psi} = e^{\Theta \sqrt{-1}} .$$

Der Vergleich mit (15) zeigt die Unabhängigkeit der Achsen bzw. Pole von der Normierung.

Ehe wir Satz 16 weiter auswerten, geben wir zwei Sätze über die Ausartung von Projektivebenen.

Satz 17. *Man betrachte eine unendliche Folge von Projektivebenen* Π_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$. *Falls man aus den* Π_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *einer geeigneten Teilfolge der* Π_μ *je eine Ebene* ε_ν *derart auswählen kann, daß die* ε_ν *gegen* ε_∞ *konvergieren, so behaupten wir, jede Ebenenfolge* ε_ν *(je aus* Π_ν*) konvergiert gegen* ε_∞.

Man kann auch sagen, in der Folge der Π_ν konvergieren die Mäntel mit wachsendem ν gegen ε_∞, das Innere der Π_ν geht gegen den vollen Raum mit Ausschluß von ε_∞.

Beweis: Π_ν bestehe aus den Ebenen $\varepsilon_\nu(\theta)$: $g_\nu w + h_\nu z + k_\nu - e^{\theta\sqrt{-1}} = 0$. Wir setzen voraus, daß bei geeigneter Wahl des Parameters $\theta = \theta_0$ die Ebenenfolge $\varepsilon_\nu(\theta_0)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ gegen ε_∞ strebt. Dann geht aber die dritte homogene Punktkoordinate gegen 0, unabhängig von θ, also für jede Ebene aus Π_ν.

Satz 18. *Strebt auch nur eine Folge von Punkten* $p_\nu \neq s_\nu$ *(je aus* Π_ν*) gegen einen Punkt* q *auf* ε_∞ *(wo* q *nicht Häufungspunkt von Scheiteln der* Π_ν *ist), so strebt jede Folge von Ebenen* ε_ν *(je aus* Π_ν*) gegen* ε_∞.

Denn jedes ε_ν hat in s_ν bereits einen Punkt auf ε_∞.

9. Die isometrischen Gebilde bei eigentlich-diskontinuierlichen Gruppen

Wir versuchen jetzt, die Gruppe G so zu transformieren, daß zu jeder Transformation aus G (mit Ausnahme der Identität) ein bis auf die Normierung bestimmtes isometrisches Gebilde gehört. Das ist stets möglich unter der Voraussetzung, daß Γ *in einer Ebene* δ [samt einer Ebenenumgebung $\Phi(\delta)$] *e.-d.* ist. Denn dann gibt es nach Satz 3 (angewandt auf $\tilde{\Gamma}$ in $\tilde{\Omega}$) in $\Phi(\delta)$ eine Ebene ε, die gegenüber keiner Transformation von Γ fest bleibt. Diese Ebene ε denken wir uns durch eine lineare Transformation (die natürlich nicht zu Γ zu gehören braucht) in die uneigentliche Ebene ε_∞ geworfen. Wir operieren von jetzt an mit der entsprechend transformierten Gruppe und nennen diese wieder G. Wir haben damit folgendes erreicht:

1. ε_∞ *ist eine Ebene, in der* Γ *e.-d. ist.*
2. ε_∞ *ist gegenüber keiner Transformation von* Γ *fix*; daraus folgt: zu jeder Transformation $T_i (\neq I)$ aus G gehört bei fester Normierung ein eindeutig bestimmtes isometrisches Gebilde Π_i, und zu zwei verschiedenen Transformationen gehören isometrische Gebilde mit verschiedenen Achsen.

Hilfssatz. Konvergiert die Folge $\Pi_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ gegen ε_∞, so auch die Folge Π_ν^*.

Beweis: Zu den beiden inversen Transformationen

$$T_\nu : \begin{pmatrix} a_\nu & b_\nu & c_\nu \\ d_\nu & e_\nu & f_\nu \\ g_\nu & h_\nu & k_\nu \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_\nu^* : \begin{pmatrix} A_\nu & D_\nu & G_\nu \\ B_\nu & E_\nu & H_\nu \\ C_\nu & F_\nu & K_\nu \end{pmatrix}$$

gehören die isometrischen Gebilde

$$\Pi_\nu :\ g_\nu w + h_\nu z + k_\nu - e^{\theta\sqrt{-1}} = 0 \text{ und } \Pi_\nu^* :\ C_\nu w + F_\nu z + K_\nu - e^{\theta\sqrt{-1}} = 0\,.$$

Die Voraussetzung $\Pi_\nu \to \varepsilon_\infty$ drückt sich in den Transformationskoeffizienten aus in der Form $g_\nu \to 0$, $h_\nu \to 0$. Das hat zur Folge:

$$C_\nu = d_\nu h_\nu - e_\nu g_\nu \to 0, \quad F_\nu = g_\nu b_\nu - h_\nu a_\nu \to 0, \quad \text{w z. b. w.}$$

Satz 19. *Aus einer Folge von isometrischen Gebilden Π_ν, die zu Transformationen T_ν aus G gehören, läßt sich niemals eine Folge von Punkten p_ν je aus Π_ν so auswählen, daß die p_ν gegen einen Punkt auf ε_∞ konvergieren* — es sei denn, daß die p_ν gegen einen Häufungspunkt der s_ν konvergieren. (Kurz gesagt: Die Radien r_ν der Zylinder Π_ν können nicht beliebig groß werden.)

Beweis: Andernfalls müßte nach Satz 17 jede Folge von Ebenen ε_ν (je aus Π_ν) gegen ε_∞ konvergieren. Da nun eine Ebene ε_ν der Schar Π_ν mittels T_ν zu einer Ebene $\varepsilon_\nu' = T_\nu \varepsilon_\nu$ der Schar Π_ν^* äquivalent ist, so würde nach dem Hilfssatz jede Ebenenumgebung von ε_∞ Paare von verschiedenen äquivalenten Ebenen enthalten, was in Verbindung mit der oben festgestellten Eigenschaft 2 von ε_∞ der eigentlichen Diskontinuität von Γ in ε_∞ widerspricht.

Die entsprechenden Sätze gelten für die isometrischen Gebilde der Ebenengruppe Γ, vorausgesetzt, daß der Nullpunkt O (da er der uneigentlichen Ebene $\tilde{O}$ im Dualraum entspricht) ein Punkt eigentlicher Diskontinuität von G und gegenüber keiner Transformation von G fest ist, und das läßt sich durch eine affine Transformation stets erreichen, wenn G e.-d. ist. Man hat dann also insbesondere

Satz 19a. *Aus einer Folge von isometrischen Gebilden $\mathfrak{P}_\nu$, die zu Transformationen τ_ν aus Γ gehören, läßt sich niemals eine Folge von Ebenen ε_ν je aus $\mathfrak{P}_\nu$ so auswählen, daß die ε_ν gegen eine Ebene durch O konvergieren* — es sei denn, daß die ε_ν gegen eine Häufungsebene der Leitebenen σ_ν konvergieren. (Kurz gesagt: Die isometrischen Kreise $\mathfrak{P}_\nu$ können nicht beliebig nahe an O herankommen.)

10. Bestimmung des Diskontinuitätsbereichs und des Normalbereichs mittels der isometrischen Gebilde

Das Ziel dieses Paragraphen wird nach den Ausführungen im I. Teil erreicht sein, wenn es gelungen ist, die 1. und 2. Grenzmenge der Gruppen G und Γ mittels der isometrischen Gebilde abzugrenzen. Wie in der Einleitung erwähnt und in § 19 ausführlicher auseinandergesetzt ist, muß eine funktionentheoretisch brauchbare Gruppe einen nicht-leeren Normalbereich besitzen. *Wir setzen im folgenden die normale Diskontinuität in der Punkt- und in der Ebenengruppe voraus.* Das ist eine Einschränkung, die auch von Myrberg [9] für die Zwecke der Funktionentheorie als notwendig erkannt wurde. Das Beispiel 4 zeigt, daß diese beiden Voraussetzungen von einander unabhängig sind.

Wir wenden uns zuerst der Punktgruppe zu. *Wir betrachten nur Gruppen 1. Klasse.* Jeder Punkt der 1. Grenzmenge ist das 1. Grenzelement $L_1(F)$ einer Normalfolge F aus G. Durch ihre Transformationen wird jeder Punkt außerhalb $L_2(F)$ auf eine konvergente Folge von äquivalenten Punkten abgebildet. Ihr Häufungspunkt ist, unabhängig vom Ausgangspunkt, der Punkt $L_1(F)$. Setzen wir also voraus, daß O nicht zu $\{L_2(G)\}$ gehört, oder nach Satz 11:

(I) $$G \textit{ sei n.-d. in } O\,,$$

so können wir das 1. Grenzelement $L_1(F)$ einer jeden Normalfolge F aus G als Häufungspunkt der zu O äquivalenten Pole $a_\nu^* = T_\nu O$ bestimmen, wenn F aus den Transformationen T_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ besteht. Dieser Häufungspunkt ist nach Satz 9 mit dem Punkt $\Lambda_2(\Phi^*)$ identisch, wo Φ die F entsprechende Normalfolge von Ebenentransformationen bezeichnet.

Analog ist jede Ebene aus $\{\Lambda_1(T)\}$ das 1. Grenzelement $\Lambda_1(\Phi)$ einer Normalfolge Φ aus Γ. Durch ihre Transformationen wird jede Ebene außerhalb $\Lambda_2(\Phi)$ auf eine konvergente Folge von äquivalenten Ebenen abgebildet. Ihre Häufungsebene ist $\Lambda_1(\Phi)$, und zwar, weil es sich stets um Gruppen 1. Klasse handelt, unabhängig von der Ausgangsebene, sofern diese nur außerhalb $\Lambda_2(\Phi)$ gewählt wird. Nun ist die normale Diskontinuität einer Gruppe nicht für ein einzelnes Raumelement erklärt, sondern für ein Raumelement samt einer Umgebung. Ist daher unter der Voraussetzung der normalen Diskontinuität von G und Γ das Koordinatensystem bereits so gewählt, daß G in O n.-d. ist, so läßt sich außerdem durch eine lineare Transformation, die O fest läßt, erreichen, daß Γ in ε_∞ n.-d. ist. Wir machen daher im weiteren die Voraussetzung:

(II) $$\Gamma \textit{ sei n.-d. in } \varepsilon_\infty\,.$$

Dann können wir das 1. Grenzelement $\Lambda_1(\Phi)$ einer jeden Normalfolge Φ aus Γ als Häufungsebene der zu ε_∞ äquivalenten Achsen $\alpha_\nu^* = \tau_\nu \varepsilon_\infty$ bestimmen. Sie ist mit der Ebene $L_2(F^*)$ identisch, wo F die Φ entsprechende Normalfolge von Punkttransformationen bezeichnet. — Man kann jetzt außerdem dafür sorgen, daß keine Achse durch O geht und kein Pol auf ε_∞ liegt, sodaß für keine Transformation der Gruppe $k = 0$ oder $K = 0$ ist.

Definition 13. Ein Häufungspunkt der Pole von Γ heißt ein *Grenzpunkt* der Gruppe G. Dual: Eine Häufungsebene der Achsen von G heißt eine *Grenzebene* der Gruppe Γ.

Damit lassen sich die vorigen Ausführungen folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 20. *Unter den Voraussetzungen (I) und (II) gilt: die Menge der Grenzpunkte von G ist identisch mit der 1. Grenzmenge $\{L_1(G)\}$, die Menge der Grenzebenen von Γ ist identisch mit der 1. Grenzmenge $\{\Lambda_1(\Gamma)\}$.*

Zusatz. Die Häufungsebene der Achsen, die zu den Transformationen einer Normalfolge F aus G gehören, ist das 2. Grenzelement $L_2(F)$ dieser Normalfolge. Der Häufungspunkt der Pole, die zu den Transformationen einer Normalfolge Φ aus Γ gehören, ist das 2. Grenzelement $\Lambda_2(\Phi)$ dieser Normalfolge.

In Verbindung mit den früheren Sätzen 11 und 9b ergibt sich der

Hauptsatz 2. *Eine Gruppe G 1. Klasse erfülle die Voraussetzungen:*

(I) *G sei normal-diskontinuierlich in O,*

(II) *Γ sei normal-diskontinuierlich in ε_∞.*

Dann gilt:

1. Der Bereich B der bedingten Diskontinuität von G ist die Komplementärmenge zur Menge der Grenzpunkte von G.

Der Bereich B *der bedingten Diskontinuität von Γ ist die Komplementärmenge zur Menge der Grenzebenen von Γ.*

2. Der Bereich N der normalen Diskontinuität von G ist die Menge der Punkte, die auf keiner Grenzebene von Γ liegen.

Der Bereich N *der normalen Diskontinuität von Γ ist die Menge der Ebenen, die durch keinen Grenzpunkt von G gehen.*

11. Eigenschaften des Normalbereichs

Satz 21. *Zu jeder Normalfolge von Transformationen T_i aus G ($i = 1, 2, \ldots$) gehören isometrische Zylinder Π_i, deren Mäntel gegen die Häufungsebene $\tilde{\alpha}$ der Achsen α_i konvergieren.* Es gilt also insbesondere: *Die Radien der Π_i konvergieren gegen 0.*

Beweis: F sei eine beliebige Normalfolge aus G; da nur Gruppen 1. Klasse in Betracht gezogen werden, hat sie notwendig den Rang 1, ihre Grenztransformation bildet alle Punkte von W auf den Punkt $L_1(F)$ ab mit Ausnahme der Punkte einer Ebene $L_2(F)$. Aus der eigentlichen Diskontinuität von Γ in ε_∞ folgt: $L_2(F) = \Lambda_1(\Phi^*) \neq \varepsilon_\infty$ (Φ die durch F induzierte Normalfolge aus Γ). Aus der normalen Diskontinuität von Γ in ε_∞ folgt: $L_1(F)$ liegt im Endlichen, denn nach Hauptsatz 1 (in der Dualform) ist G e.-d. in jedem Punkt von ε_∞. Wir verlegen für die folgende Betrachtung den Ursprung des Koordinatensystems in W nach $L_1(F)$ und normieren wie im I. Teil. Dann gilt für die Koeffizienten der Transformationen T_i der Folge F: $a_i, \ldots, f_i \to 0$, $g_i \to \bar{g}$, $h_i \to \bar{h}$, $k_i \to \bar{k}$, wo $\bar{g}, \bar{h}, \bar{k}$ nicht alle 0 sind. Daher konvergieren die Funktionaldeterminanten $D_i(w, z)$, die zu den Transformationen T_i gehören, in allen Punkten von W gegen 0, außer in den Punkten der Ebene $\bar{g}w + \bar{h}z + \bar{k} = 0$. Das Innere von Π_i, das ist die Menge der Punkte, in denen $|D_i| > 1$ ist, konvergiert demnach gegen diese Ebene, und diese muß mit $L_2(F)$ übereinstimmen (wie schon im Zusatz zu Satz 20 festgestellt wurde).

Satz 21a. *Zu jeder Normalfolge von Transformationen τ_i aus Γ ($i = 1, 2, \ldots$) gehören isometrische Kreise $\mathfrak{P}_i$, deren Ränder gegen den Häufungspunkt $\bar{a}$ der Pole a_i konvergieren.* Es gilt also insbesondere: *Die Radien der $\mathfrak{P}_i$ konvergieren gegen* 0.

Satz 22. *Liegt ein Punkt x im Inneren von unendlich vielen verschiedenen Π_i der Gruppe G, so ist G nicht n.—d. in x.*

Denn aus den unendlich vielen T_i, die je zu Π_i gehören, läßt sich stets eine umkehrbar normale Teilfolge T_{i_ν} auswählen, und die Häufungsebene der Achsen α_{i_ν} geht nach Satz 21 durch x.

Satz 23. *Durch jeden Grenzpunkt geht eine Grenzebene*, womit aufs neue gezeigt ist, daß der Normalbereich im Diskontinuitätsbereich enthalten ist (Satz 14 bzw. Satz 6).

Beweis: Einer konvergenten Folge von Polen a_i entspricht eine Folge von isometrischen Kreisen $\mathfrak{P}_i$ aus Γ, deren Ränder nach Satz 21a gegen den Häufungspunkt $\bar{a}$ der a_i konvergieren. Andererseits bleiben sämtliche Pole von Γ und also auch ihre Häufungspunkte in einer Entfernung vom Nullpunkt O, die eine positive Schranke nicht unterschreitet, weil G in O e.-d. ist und die Pole unter einander äquivalent sind. Von einem gewissen i_0 ab wird daher das Abstandsverhältnis $xO : xa_i$ für irgendeinen Punkt x des Apolloniuskreises $\mathfrak{P}_i$ einen Betrag $|K_i| > 1$ haben. Die

Koordinaten $w_{a_i} = G_i/K_i$, $z_{a_i} = H_i/K_i$ dieser Pole a_i erteilen daher dem Ausdruck $|g_i w + h_i z + k_i|$ einen Wert

$$\left| g_i \frac{G_i}{K_i} + h_i \frac{H_i}{K_i} + k_i \right| = \frac{1}{|K_i|} < 1 \,,$$

d. h. a_i liegt im Inneren des zugeordneten isometrischen Zylinders Π_i, für $i > i_0$; nach Satz 22 geht also durch den Häufungspunkt $\bar{a}$ der a_i eine Grenzebene.

Aus dem Zusatz zu Satz 20 folgt insbesondere, daß $\Lambda_2(\Phi) = L_1^*(F)$ auf $L_2(F)$ liegt, wenn Φ die den $\mathfrak{P}_i$ entsprechende Normalfolge aus Γ bezeichnet, F die induzierte Folge aus G. Damit ist Satz 6 für Gruppen 1. Klasse aufs neue bewiesen.

In welcher Art der Diskontinuitätsbereich tatsächlich über den Normalbereich hinausragt, darüber gibt in vielen Fällen die folgende Beziehung Aufschluß. Zunächst ist selbstverständlich $B > \dot{N} + \dot{\mathrm{N}}$, wenn wir unter $\dot{\mathrm{N}}$ den Bereich derjenigen Punkte verstehen, die auf einer Ebene des Normalbereichs N von Γ liegen. Diese Beziehung läßt sich nun in allen mir bekannten Fällen zu einer genauen Bestimmung von B verschärfen (vgl. die Beispiele 6 und 8, Seite 116, 118). Insbesondere gilt

Satz 24. $B = \dot{N} + \dot{\mathrm{N}}$, *wenn die Punkte der 1. Grenzmenge von G diskret liegen.*

Ist nämlich x ein Punkt von B, der nicht zu N gehört, so liegt x nur dann auf keiner Ebene von N, wenn jede Ebene durch x einen Grenzpunkt enthält. Das ist aber unmöglich, da x selbst nach Voraussetzung kein Grenzpunkt ist, und da $\{L_1(G)\}$ eine diskrete Menge sein sollte.

12. Konstruktion eines Fundamentalbereichs für den Normalbereich

Definition 14. *Fundamentalbereich* K der Gruppe G für einen (nicht notwendig zusammenhängenden) Bereich A heißt ein Bereich mit folgenden Eigenschaften:

1. keine zwei Punkte sind äquivalent;
2. der Bereich ist maximal, d. h. jeder Punkt außerhalb K ist entweder zu einem Punkt von K äquivalent, oder er liegt außerhalb A.

Wir werden jetzt einen Fundamentalbereich zum Normalbereich einer linearen Gruppe G 1. Klasse konstruieren, vorausgesetzt, daß sie samt ihrer induzierten Gruppe Γ n.-d. ist in einem Paar von inzidenten Elementen. Das ist nämlich, wie wir jetzt zeigen wollen, eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein Bereich außerhalb aller Π_i von G existiert, und ein solcher erweist sich als ein Fundamentalbereich von G für N.

Definition 15. Die Menge der Punkte des Grundraumes W, zu denen eine Umgebung existiert, die nicht ins Innere eines isometrischen Gebildes von G eindringt, heißt der *Außenbereich* R von G.

Die Existenz eines Außenbereichs steht fest, sobald 1. ε_∞ keine Grenzebene ist und 2. auf ε_∞ ein Punkt q vorhanden ist, gegen den sich die Scheitel s_i der isometrischen Gebilde von G nicht häufen können. Will man dieses Verhalten durch eine Annahme über die Gruppen G und Γ erzwingen, so genügt dazu nicht die eigentliche Diskontinuität von G in q, weil die Scheitel nur *paar*weise äquivalent sind. Hierzu ist vielmehr notwendig und hinreichend, daß durch den Punkt q keine Häufungsebene von Achsen der Π_i von G hindurchgeht. Also folgt nach Hauptsatz 2: eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Außenbereiches R ist die normale Diskontinuität von G in einem Punkt q auf ε_∞. Da andererseits die normale Diskontinuität von Γ in ε_∞ bereits verlangt und ausgenützt worden ist, so kommt zu den früheren Voraussetzungen jetzt noch hinzu:

(III) *Der Normalbereich N von G und der Normalbereich* N *von Γ sollen inzidente Elemente enthalten.*

Der Außenbereich R ist von vornherein so konstruiert, daß er keine zwei äquivalenten Punkte enthält. Denn jede Transformation T_i aus G wirft jeden Punkt von R ins Innere von Π_i^* (Satz 16), also aus R heraus. Es handelt sich jetzt noch darum, das zweite Kennzeichen für einen Fundamentalbereich, die Maximaleigenschaft in bezug auf ein geeignetes Gebiet, nachzuweisen. Dieses Gebiet wird der Normalbereich von G sein.

Aus den Definitionen 13 und 15 folgt zunächst: Durch keinen Punkt des Außenbereichs geht eine Grenzebene. Mit anderen Worten:

Satz 25. *Der Außenbereich R ist im Normalbereich von G enthalten.*

Das Schlußstück unserer Konstruktion bildet der

Satz 26. *Ein Punkt x, der samt einer Umgebung außerhalb R liegt, ist entweder äquivalent zu einem Punkt von R, oder er liegt nicht in N.*

Beweis: x_0 sei ein Punkt von N außerhalb R; er liegt also samt einer $U(x_0)$ im Inneren von mindestens einem Π_i, sagen wir von Π_1.

1. Fall: Der Punkt $x_1 = T_1 x_0$ liegt samt einer $U(x_1)$ im Äußeren aller Π_i von G; dann liegt er in R, und der Satz ist bewiesen.

2. Fall: Der Punkt x_1 liegt im Inneren eines Π_i aus G, etwa im Inneren von Π_2. Liegt dann $x_2 = T_2 x_1$ im Äußeren aller Π_i von G, so hat man

einen zu x_0 äquivalenten Punkt in R gefunden. Andernfalls führt die Fortsetzung des Verfahrens zu einem zu x_0 äquivalenten Punkt in R oder zu einer unendlichen Folge von äquivalenten Punkten

$$x_1 = T_1 x_0, \; x_2 = T_2 x_1 = T_2 T_1 x_0, \; x_3 = T_3 x_2 = T_3 T_2 T_1 x_0, \; \ldots,$$

wobei jeweilen x_i in Π_{i+1} liegt. Diese letzte Möglichkeit wollen wir ad absurdum führen. Wir betrachten dazu die Transformationen U_i, die x_0 in x_i überführen:

$$U_1 = T_1, \quad U_2 = T_2 T_1, \quad U_3 = T_3 T_2 T_1, \; \ldots .$$

Für die Funktionaldeterminante D_{T_i} gilt im Punkt x_{i-1}:

$$|D_{T_i}(x_{i-1})| > 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

daher ist auch

$$|D_{U_i}(x_0)| = |D_{T_1}(x_0)| \cdot |D_{T_2}(x_1)| \cdot \ldots \cdot |D_{T_{i-1}}(x_{i-2})| \cdot |D_{T_i}(x_{i-1})| > 1 .$$

x_0 liegt also im Inneren aller isometrischen Gebilde Π_{U_i} $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Schließen wir den Fall aus, daß zwei Transformationen U_i einander gleich sind. Dann liegt x_0 außerhalb N, nach Satz 22, im Widerspruch zur Voraussetzung. Der eben ausgeschlossene Fall kann aber gar nicht eintreten. Denn aus $U_{n+p} = U_n$ würde folgen $T_{n+p} T_{n+p-1} \ldots T_{n+1} = I$. Das widerspräche der Annahme, daß x_i (für jedes i) im Inneren von Π_{i+1} liegen sollte, weil dann stets $|D_{T_{i+1}}(x_i)| > 1$ ist.

Aus Satz 26, zusammen mit der Tatsache, daß keine zwei Punkte von R äquivalent sind, folgt der

Satz 27. *R ist ein Fundamentalbereich von G für N.*

13. Ausdehnung auf die induzierte Gruppe

Ist unter der Voraussetzung der normalen Diskontinuität von G und Γ in inzidenten dualen Elementen das Koordinatensystem so gewählt worden, daß Γ in ε_∞ und G in einem Punkt q auf ε_∞ n.-d. ist, so läßt sich außerdem durch eine affine Transformation erreichen, daß G im Nullpunkt O und Γ in einer Ebene ε_0 durch O n.-d. ist. Dann ist auf die Punktgruppe $\tilde{\Gamma}$ im Dualraum $\tilde{\Omega}$ die eben entwickelte Theorie anwendbar: es existiert ein Außenbereich $\tilde{\mathrm{P}}$, bestehend aus allen Punkten $\tilde{\varepsilon}$, die samt einer Umgebung außerhalb aller isometrischen Zylinder $\tilde{\mathfrak{P}}_i$ von $\tilde{\Gamma}$ liegen, und $\tilde{\mathrm{P}}$ ist ein Fundamentalbereich von $\tilde{\Gamma}$ für $\tilde{\mathrm{N}}$. (Dabei bezeichnet $\tilde{\mathrm{N}}$ die Menge aller Punkte, in denen $\tilde{\Gamma}$ n.-d. ist.)

Die in § 12 abgeleiteten Sätze gelten also mutatis mutandis für den Außenbereich P der Ebenengruppe Γ: er besteht aus allen Ebenen, die samt einer Umgebung im Äußeren aller isometrischen Kreise $\mathfrak{P}_i$ von Γ liegen. P enthält insbesondere eine Ebene δ durch den Nullpunkt O samt einer Ebenenumgebung $\Psi(\delta)$.

Zusammenfassend erhalten wir den

Hauptsatz 3

Voraussetzungen:

(I) G sei eine Gruppe 1. Klasse, normal-diskontinuierlich in einem Bereich N;

(II) die durch G induzierte Gruppe Γ sei normal-diskontinuierlich in einem Bereich $\mathbf{N}$;

(III) N und $\mathbf{N}$ mögen inzidente Elemente aufweisen, insbesondere im Nullpunkt und in der uneigentlichen Ebene.

Behauptung: Der Außenbereich R von G ist ein Fundamentalbereich von G für N. Der Außenbereich P *von Γ ist ein Fundamentalbereich von Γ für* $\mathbf{N}$.

Durch diesen Satz werden die Bereiche der normalen Diskontinuität der Gruppen G und Γ auf eine neue Weise bestimmt:

$$N = R + \text{die äquivalenten Bereiche zu } R;$$
$$\mathbf{N} = \mathrm{P} + \text{die äquivalenten Bereiche zu } \mathrm{P}.$$

Die Unabhängigkeit der normalen Diskontinuität von G und Γ wurde schon durch das Beispiel 4 belegt. Das folgende Beispiel 6 (automorphe Kollineationen der Einheitskugel) wird zeigen, daß G und Γ n.-d. sein können, ohne es in inzidenten Elementen zu sein. Gruppen der letzten Art werden durch unsere Konstruktion nur erfaßt, wenn die Existenz des Außenbereichs anderweitig gesichert ist, wie etwa im folgenden

Beispiel 6

Die Kollineationen mit ganzen komplexen Koeffizienten, die die Hyperkugel

$$H: w\bar{w} + z\bar{z} = 1$$

in sich überführen, bilden eine Gruppe 1. Klasse; ihre 1. Grenzelemente sind Punkte von H, die auf H überall dicht liegen. Ihre 2. Grenzelemente sind die Tangentialebenen an H in diesen Punkten (vgl. hierzu Myrberg, Math. Ann. **93**, 1924, 81 ff.). Daher ist N das Innere, $\mathbf{N}$ das Äußere von H. *N und* $\mathbf{N}$ *haben keine inzidenten Elemente.* Die Bereiche der bedingten Diskontinuität sind

für G: $B = N + \dot{\mathbf{N}}$ ($\dot{\mathbf{N}}$ die Menge der Punkte, die auf einer Ebene aus $\mathbf{N}$ liegen);

für Γ: B = N + N (N die Menge der Ebenen, die durch einen Punkt von N gehen).

Ein Fundamentalbereich für das Innere von H läßt sich nach der angegebenen Methode konstruieren, da die Existenz eines O enthaltenden Außenbereichs aus der Theorie der quadratischen Formen erschlossen werden kann [vgl. Hutchinson (8)].

Beispiel 7

Übersichtlich sind die Verhältnisse etwa bei der hyperfuchsschen Gruppe G mit der erzeugenden Transformation

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ und der induzierten } \tau_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Da der Nenner frei von z ist, sind die Schnittkreise der isometrischen Zylinder mit allen Ebenen $z = konst.$ dieselben. Andererseits entnimmt man den induzierten Transformationen, daß ihre isometrischen Kreise alle in der Leitebene $z = 0$ liegen. Bezeichnet F die Normalfolge der Transformationen T_n $(n = 1, 2, \ldots)$, Φ die induzierte Folge, so hat man

$$\alpha_n \to \bar{\alpha} = L_2(F) = \Lambda_1^*(\Phi)\colon\ w = 1; \qquad L_2^*(F) = \Lambda_1(\Phi)\colon\ w = -1;$$
$$a_n \to \bar{a} = \Lambda_2(\Phi) = L_1^*(F)\colon\ w = 1,\ z = 0;\ \Lambda_2^*(\Phi) = L_1(F)\colon\ w = -1,\ z = 0.$$

Die Grenzpunkte der Gruppe liegen also auf der invarianten Hyperkugel $|w|^2 + |z|^2 = 1$, und die Grenzebenen sind die Tangentialebenen in den Grenzpunkten. Ein Fundamentalbereich für die Punktgruppe ist der Bereich R außerhalb aller isometrischen Zylinder von G. Sein Schnitt mit irgend einer Ebene $z = konst.$, speziell mit $z = 0$, ist in der folgenden Figur wiedergegeben:

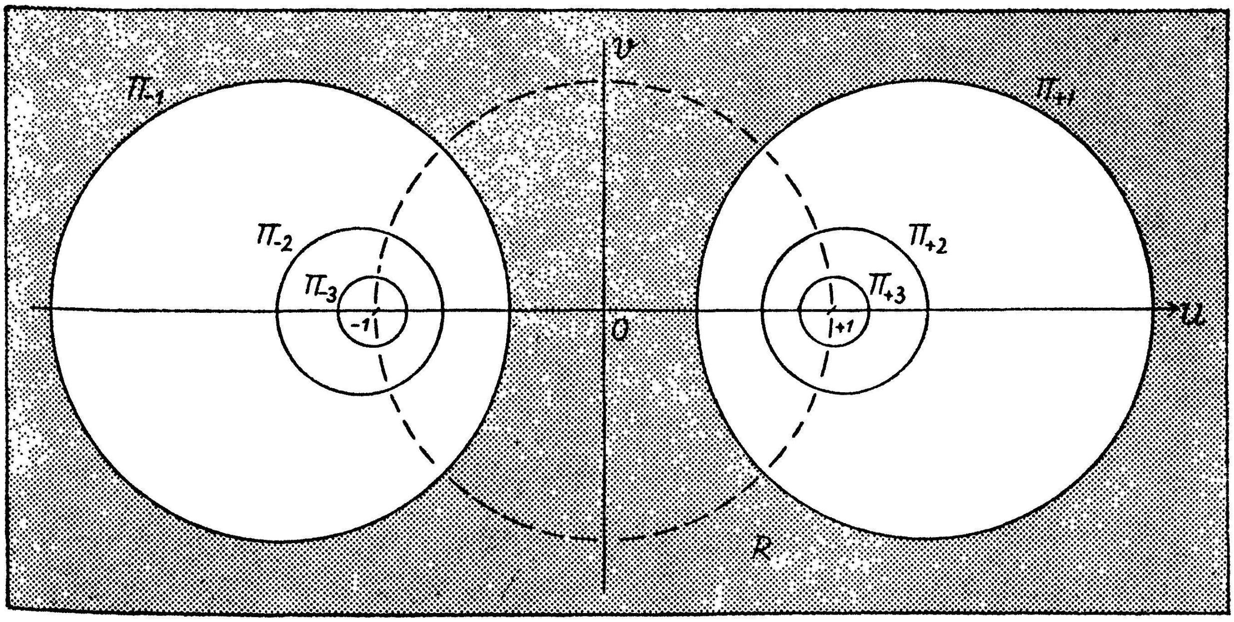

Fig. 1

Beispiel 8. Die Transformationen

$$T_n \begin{cases} w' = \dfrac{(2q^n - p^n)\,w + (1 - p^n)\,z + 2\,(q^n - p^n)}{(p^n - q^n)\,w + (p^n - 1)\,z + 2\,p^n - q^n} \\[2ex] z' = \dfrac{z}{(p^n - q^n)\,w + (p^n - 1)\,z + 2\,p^n - q^n} \end{cases}$$

(p, q feste komplexe Zahlen mit den Bedingungen $|p| < 1,\ pq = 1$) bilden für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ eine unimodulare Gruppe 1. Klasse mit folgenden Grenzelementen:

$$L_1 \begin{cases} w = -2 \\ z = 0 \end{cases}, \quad L_2\colon\ w + 1 = 0\,; \quad L_1^* \begin{cases} w = -1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad L_2^*\colon\ w + z + 2 = 0\,.$$

Die durch T_n in $\Omega(\omega, \zeta)$ induzierte Transformation ist

$$\tau_n \begin{cases} \omega' = \dfrac{(2p^n - q^n)\,\omega + (q^n - p^n)}{(2p^n - 2q^n)\,\omega + 2q^n - p^n} \\[2ex] \zeta' = \dfrac{(1 - q^n)\,\omega + \zeta + q^n - 1}{(2p^n - 2q^n)\,\omega + 2q^n - p^n} \end{cases}.$$

Γ hat die Grenzelemente

$$\Lambda_1 \begin{cases} \omega = \frac{1}{2} \\ \zeta = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \text{das ist } L_2^*\,; \quad \Lambda_2\colon\ -\omega + 1 = 0, \quad \text{das ist } L_1^*\,;$$

$$\Lambda_1^* \begin{cases} \omega = 1 \\ \zeta = 0 \end{cases}, \quad \text{das ist } L_2\,; \quad \Lambda_2^*\colon\ -2\omega + 1 = 0, \quad \text{das ist } L_1\,.$$

Die Normalbereiche von G und Γ existieren und enthalten inzidente Elemente, insbesondere im Nullpunkt und in ε_∞. Daher existiert zu jeder Transformation aus G bzw. Γ das isometrische Gebilde und zwar ist

$$\Pi_n\colon\ |(p^n - q^n)\,w + (p^n - 1)\,z + 2p^n - q^n| = 1, \quad \Pi_n^* = \Pi_{-n}\,,$$

$$\mathfrak{P}_n\colon \begin{cases} |w|^2 + |z|^2 = |2q^n - p^n|^2 \cdot (|w - w_a|^2 + |z - z_a|^2), \\ z = 0 \end{cases} \quad \mathfrak{P}_n^* = \mathfrak{P}_{-n}\,;$$

oder einfacher

$$\mathfrak{P}_n\colon \begin{cases} |w|^2 = |2q^n - p^n|^2 \cdot |w - w_a|^2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Achse α_n: $(p^n - q^n)\,w + (p^n - 1)\,z + 2p^n - q^n = 0$,
Pol a_n: $w_a = (2p^n - 2q^n)\,/\,(2q^n - p^n)$, $z_a = 0$;
Scheitel s_n: $(-(p^n - 1)\,/\,(p^n - q^n),\ \infty)$,
Leitebene σ_n: $z = 0$.

Der Außenbereich und damit ein Fundamentalbereich von G für N bzw. von Γ für N ist

R: die Menge der Punkte, für die gleichzeitig

$$|(p^n - q^n)\,w + (p^n - 1)\,z + 2p^n - q^n| > 1\,,$$

P: die Menge der Ebenen, für die gleichzeitig

$$|(2p^n - 2q^n)\,\omega + 2q^n - p^n| > 1$$

ist für $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Man bestätigt: $\Pi_n \to L_2$, $\alpha_n \to L_2$ usw.
$\mathrm{P}_n \to \Lambda_2$, $a_n \to \Lambda_2$ usw.

Endlich $B = N \dotplus \mathrm{N}$, $\mathrm{B} = \mathrm{N} \dotplus \overline{N}$ (vgl. Beispiel 6).

Beispiel 9. Ich vertausche im vorigen Punkt- und Ebenengruppe und setze nachträglich $p = \frac{1}{2}$. Für diesen Spezialfall läßt sich der Fundamentalbereich R bequem veranschaulichen. Man hat

$$T_n = \begin{pmatrix} 2p^n - q^n & 0 & q^n - p^n \\ 1 - q^n & 1 & q^n - 1 \\ 2p^n - 2q^n & 0 & 2q^n - p^n \end{pmatrix}, \quad \tau_n = \begin{pmatrix} 2q^n - p^n & 1 - p^n & 2q^n - 2p^n \\ 0 & 1 & 0 \\ p^n - q^n & p^n - 1 & 2p^n - q^n \end{pmatrix};$$

$$L_1: \begin{cases} w = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}, \quad L_2: -w + 1 = 0\,, \text{ zugleich } \Lambda_1^*: \begin{cases} \omega = -1 \\ \zeta = 0 \end{cases};$$

$$L_1^*: \begin{cases} w = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad L_2^*: -2w + 1 = 0\,, \text{ zugleich } \Lambda_1: \begin{cases} \omega = 2 \\ \zeta = 0 \end{cases};$$

$$\Pi_n: \; |(2p^n - 2q^n)\,w + 2q^n - p^n| = 1\,;$$

$$\mathfrak{P}_n: \begin{cases} |w|^2 + |z|^2 = |2p^n - q^n|^2 \left(\left| w - \dfrac{p^n - q^n}{2p^n - q^n} \right|^2 + \left| z - \dfrac{p^n - 1}{2p^n - q^n} \right|^2 \right) \\ (p^n - 1)\,w - (p^n - q^n)\,z = 0 \end{cases};$$

$$\alpha_n: \; (2p^n - 2q^n)\,w + 2q^n - p^n = 0\,, \quad w_{\alpha_n} = \frac{p^n - 2q^n}{2p^n - 2q^n}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} w_{\alpha_n} = 1\,, \text{ d. i. } L_2\,; \quad \lim_{n\to-\infty} w_{\alpha_n} = \tfrac{1}{2}\,, \text{ d. i. } L_2^*\,;$$

$$a_n: \; w_{a_n} = \frac{p^n - q^n}{2p^n - q^n}\,, \quad z_{a_n} = \frac{p^n - 1}{2p^n - q^n}\,,$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} w_{a_n} = 1\\ \lim\limits_{n\to\infty} z_{a_n} = 0\end{array}\right\},\ \text{d.i. } A_2 \text{ bzw. } L_1^*,\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to-\infty} w_{a_n} = \frac{1}{2}\\ \lim\limits_{n\to-\infty} z_{a_n} = \frac{1}{2}\end{array}\right\},\ \text{d.i. } A_2^* \text{bzw. } L_1;$$

R: die Menge der Punkte, für die gleichzeitig

$$|(2p^n - 2q^n)\,w + 2q^n - p^n| > 1$$

ist, also in jeder Ebene $z = konst.$ die Punkte, die samt einer Umgebung gleichzeitig im Äußeren gewisser Kreise liegen, wie die folgende Figur 2 es zeigt.

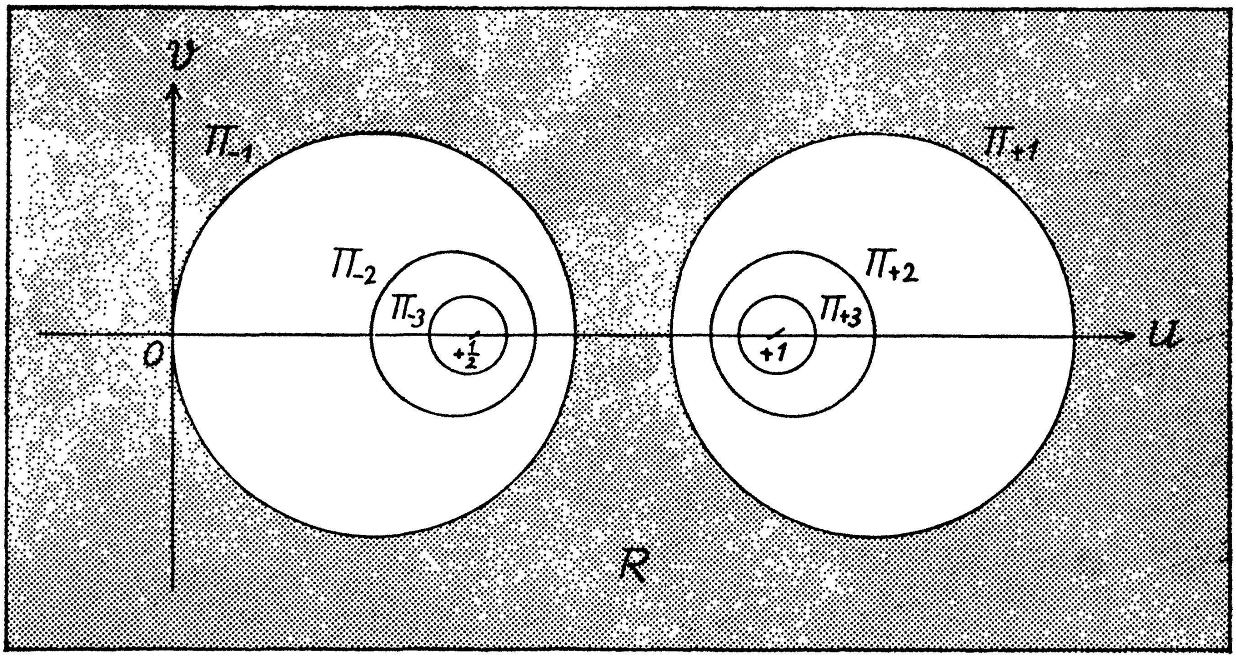

Fig. 2

III. TEIL

Ergänzungen und Hinweise

14. Der Rand des Normalbereichs

Definition 16. p heißt ein *Randpunkt* des Bereichs A, wenn p nicht zu A gehört, wenn aber jede Umgebung $U(p)$ von p Punkte von A enthält.

Definition 17. Ein (schlichter) Bereich A heißt, nach Behnke und Peschl [1], *planarkonvex*, wenn es in jedem Randpunkt p von A eine (analytische) Ebene (Stützebene) gibt, die nicht in A eindringt.

Satz 28. *N ist planarkonvex.*

Denn durch jeden Randpunkt von N geht eine Grenzebene. Diese verläuft ganz außerhalb N, ist also eine Stützebene für N.

15. Allgemeine Eigenschaften der Fundamentalbereiche

Die allgemeinen Angaben über Fundamentalbereiche geben wir im wesentlichen in der Darstellung von Fubini.

Satz 29. *Ist A ein Bereich, der keine zwei äquivalenten Punkte enthält, so können sich keine zwei zu A äquivalenten Bereiche überdecken.*

Beweis: Angenommen, $A_1 = T_1 A$ und $A_2 = T_2 A$ (T_1, T_2 aus G) haben einen nicht leeren Durchschnitt B, und z sei ein Punkt aus B, also $z = T_1 x = T_2 y$ (x, y aus A). Wäre $x \neq y$ für irgend einen Punkt z des Durchschnitts B, so wäre x äquivalent zu y, gegen die Voraussetzung über A. Ist $x = y$ für jeden Punkt z des Durchschnitts B, so ist $T_1 = T_2$.

Satz 30. *Jeder abgeschlossene Teilbereich des Normalbereichs von G wird durch endlich viele zu R äquivalente Bereiche (einschließlich R) einfach überdeckt. Diese Bereiche passen lückenlos aneinander.*

Beweis: A sei ein abgeschlossener Teilbereich von N. $TR = R'$ (T aus G) liegt im Inneren von Π_T^*. R' kann also nur dann Punkte von A enthalten, wenn Π_T^* Punkte von A enthält. Aber nur endlich viele isometrische Zylinder von G können Punkte von A enthalten (Satz 22). Also enthalten nur endlich viele zu R äquivalente Bereiche Punkte von A. Diese Bereiche überdecken sich nicht, nach geeigneten Abmachungen über die Ergänzung des offenen Bereiches R durch Randpunkte (Satz 29). Sie schließen andererseits lückenlos aneinander (Satz 26).

16. Der Rand von R: Erzeugende der Gruppe Planarkonvexität von R

Ein Randpunkt von R kann nicht im Inneren eines isometrischen Zylinders von G liegen. Die Randpunkte von R zerfallen in drei Arten:

1. Randpunkte von N;
2. Innere Punkte von N auf dem Mantel eines einzigen isometrischen Zylinders von G („*einfache Randpunkte*“);
3. Innere Punkte von N, die gleichzeitig auf den Mänteln von mehreren (natürlich endlich vielen) isometrischen Zylindern von G liegen („*mehrfache Randpunkte*“).

Wir betrachten die Randpunkte von R näher, die im Inneren des Normalbereichs liegen.

Satz 31. *Die Randpunkte zweiter Art von R erfüllen Teile von Projektivebenen, „Seiten" von R genannt, die paarweise äquivalent sind.*

Beweis: p sei ein Randpunkt zweiter Art. p liege auf Π_T. $p' = Tp$ liegt dann auf Π_T^*.

p' ist ebenfalls ein Randpunkt zweiter Art. Denn erstens liegt p' nicht im Inneren eines Π_S. Sonst wäre $|D_S(p')| > 1$, also $|D_{ST}(p)| = |D_T(p)| \cdot |D_S(p')| > 1$ wegen $|D_T(p)| = 1$. $|D_{ST}(p)| > 1$ widerspricht aber der Voraussetzung, daß p ein Randpunkt von R sei. Zweitens kann p' nicht auf dem Mantel eines anderen isometrischen Zylinders als Π_T^* liegen. Läge nämlich p' etwa auf Π_S, so wäre $|D_{ST}(p)| = |D_T(p)| \cdot |D_S(p')| = 1$, d. h. p läge auf Π_{ST}, während p auf dem Mantel von Π_T allein liegen sollte.

In einer genügend kleinen Umgebung von p verläuft außer Π_T kein isometrischer Zylinder von G. Die Punkte von Π_T innerhalb einer solchen Umgebung sind daher ebenfalls Randpunkte zweiter Art, ebenso ihre Bilder auf Π_T^*. Ein Teil des Randes von R wird also aus Mantelstücken von Projektivebenen gebildet, und diese sind paarweise äquivalent. Diese Randstücke sind entweder vollständige Projektivebenen, oder sie werden ihrerseits von Randpunkten erster oder dritter Art begrenzt.

Die Äquivalenztransformationen zwischen den dreidimensionalen Seiten eines Fundamentalbereichs bilden unter gewissen Voraussetzungen ein Erzeugendensystem für G.

Definition 18. *Aneinandergrenzend* heißen zwei Fundamentalbereiche, die eine dreidimensionale Seite gemeinsam haben.

Satz 32. *Von einem Fundamentalbereich für N möge man zu jedem seiner Bildbereiche gelangen können, indem man eine endliche Kette aneinandergrenzender Fundamentalbereiche durchschreitet. Dann ist jede Transformation V von G entweder eine Transformation T_i, die den Ausgangsbereich in einen angrenzenden Fundamentalbereich transformiert, oder V ist ein Produkt solcher Transformationen.*

Zum Beweis verwenden wir eine sofort einleuchtende Tatsache, die wir vorausschicken als

Hilfssatz. $T_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ seien diejenigen Transformationen aus G, die den Fundamentalbereich K_0 in einen angrenzenden Bereich transformieren. $UK_0 = K_j$ (U aus G) sei irgend ein Bildbereich von K_0. Dann sind UT_iU^{-1} diejenigen Transformationen, die K_j in einen Nachbarbereich transformieren.

Beweis von Satz 32: K_j sei der Bildbereich von K_0 bei der Transformation V: $K_j = VK_0$. Weiter sei $K_0, K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_s}, K_j$ eine

Kette aneinandergrenzender Bilder von K_0. Setze $j = i_{s+1}$. Die Transformation, die K_0 in K_{i_1} transformiert, ist eine Transformation T_i. Zu zeigen ist noch: Wenn der Satz richtig ist für die Transformation V', die K_0 in $K_{i_r} (r \leqq s)$ transformiert, so ist er auch richtig für die Transformation V'', die K_0 in K_0 in $K_{i_{r+1}}$ transformiert. Nach dem Hilfssatz ist nun die Transformation X, die K_{i_r} in $K_{i_{r+1}}$ transformiert, vom Typus $X = V'TV'^{-1}$, wo T eine der Transformationen ist, die K_0 in einen angrenzenden Fundamentalbereich transformieren. Daraus folgt $V''K_0 = K_{i_{r+1}} = V'TV'^{-1}V'K_0$, also $V'' = V'T$. Nach Induktionsvoraussetzung ist V' eine Transformation T_i oder ein Produkt solcher Transformationen, also ist auch V'' ein Produkt solcher Transformationen, w. z. b. w.

Die Voraussetzung von Satz 32 läßt sich auch so fassen: *Jeder Punkt x_0 von R soll mit allen zu x_0 äquivalenten Punkten durch Kurven verbindbar sein, die den Normalbereich nicht verlassen.* Denn jeder zu R äquivalente Bereich liegt vollständig im Inneren eines Π_i. — Diese Bedingung ist in einem zusammenhängenden Teil des Normalbereichs stets erfüllt (und nur solche kommen als Existenzbereiche automorpher Funktionen in Betracht, vgl. § 19).

Der Rand des Außenbereichs R wird nach unserer Konstruktion gebildet aus Stücken von Projektivebenen oder von Häufungsgebilden von Projektivebenen (zugleich Rand von N). Als solche kommen nur wieder Projektivebenen oder (analytische) Ebenen vor [1]. Daraus folgt

Satz 33. *R ist planarkonvex.*

17. Spezialisierung

a) *Komplexe Gruppen in einer Variablen (Theorie von Ford).*

Alle Gruppen ohne infinitesimale Transformationen sind Gruppen 1. Klasse. Die Dualität fällt weg. Die normale und die bedingte Diskontinuität fallen mit der eigentlichen Diskontinuität zusammen. Jedes 2. Grenzelement L_2 ist mit dem zugehörigen L_1^* identisch. Unter der Voraussetzung, daß die Gruppe G e.-d. ist, wird das Koordinatensystem so gewählt, daß G im uneigentlichen Punkt p_∞ der komplexen Ebene e.-d. ist. Die isometrischen Gebilde sind Kreise (für die z-Ebene die Schnittgebilde der isometrischen Zylinder mit der Ebene $w = 0$). Ihre Zentren (Schnittpunkte der Zylinderachsen mit $w = 0$) sind zu p_∞ äquivalent, und jeder Häufungspunkt solcher Zentren (Grenzpunkt) ist ein 1. Grenzelement L_1. Der maximale Bereich E der eigentlichen Diskontinuität von G ist die von den Grenzpunkten befreite Ebene. Man erhält im Außenbereich R einen von Kreisbögen berandeten Fundamentalbereich für E. Vgl. [3], [4].

b) *Reelle Gruppen in zwei Variablen.*

G sei eine Gruppe von linearen Transformationen

$$T_i: \begin{cases} x' = \dfrac{a_i x + b_i y + c_i}{g_i x + h_i y + k_i} \\ y' = \dfrac{d_i x + e_i y + f_i}{g_i x + h_i y + k_i} \end{cases}, \text{ mit der Normierung } \Delta_{T_i} = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ d_i & e_i & f_i \\ g_i & h_i & k_i \end{vmatrix} = 1,$$

in zwei reellen Variablen x, y und mit reellen Koeffizienten. G enthalte keine infinitesimale Transformationen und sei eine Gruppe 1. Klasse. Γ sei die durch G induzierte Gruppe in den kontragredienten Variablen ξ, η. Die Theorie der eigentlichen, der bedingten und der normalen Diskontinuität von G ist in den früheren Ausführungen enthalten. Im einzelnen findet man folgendes. Die reelle Ebene V schneidet die uneigentliche analytische Ebene ε_∞ in einer Geraden γ_∞, der uneigentlichen Geraden von V. Wenn Γ e.-d. ist, so läßt sich durch eine lineare Transformation erreichen, daß Γ e.-d. ist in γ_∞. Dann gehört zu jeder Transformation T_i aus G ein isometrisches Gebilde Π_i als Ort derjenigen Punkte, in denen die Funktionaldeterminante

$$D_i(x, y) = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = \frac{1}{(g_i x + h_i y + k_i)^3}$$

den Betrag 1 hat. Man findet

$$\Pi_i\colon\ g_i x + h_i y + k_i = \pm 1,$$

also ein Parallelenpaar mit dem gemeinsamen Punkt $s_i\left(-\dfrac{h_i}{g_i}, \infty\right)$ auf γ_∞. Wir nennen Π_i den isometrischen Streifen der Transformation T_i, s_i den Scheitel von Π_i,

$$\alpha_i\colon\ g_i x + h_i y + k_i = 0$$

die Achse von Π_i. Der Abstand der Achse von den Randgeraden ist $r_i = \dfrac{1}{\sqrt{g_i^2 + h_i^2}}$. Der Streifen Π_i zerlegt die Geraden durch s_i und damit die Punkte von V (zunächst mit Ausnahme von s_i) in drei Klassen: Inneres, Rand, Äußeres von Π_i, je nachdem $|D_i(x, y)| \gtreqless 1$ ist. Wir rechnen s_i zum Rand von Π_i.

Wenn G e.-d. ist, läßt sich unabhängig von der vorigen Koordinatenwahl durch eine lineare Transformation erreichen, daß G e.-d. ist im Nullpunkt O. Dann gehört zu jeder Transformation τ_i aus Γ ein isometrisches Gebilde als Ort derjenigen Geraden, in denen die Funktionaldeterminante $\vartheta_i(\xi, \eta)$ der Transformation τ_i den Betrag 1 hat. Man findet

$$\mathfrak{P}_i : \left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 - K_i^2\left((x - x_{a_i})^2 + (y - y_{a_i})^2\right) = 0 \\ H_i x - G_i y = 0 \end{array} \right. ,$$

wobei a_i der Punkt ist mit den Koordinaten

$$x_{a_i} = G_i / K_i , \quad y_{a_i} = H_i / K_i .$$

$\mathfrak{P}_i$ ist also das Punktepaar, in dem die Leitgerade σ_i den Apolloniuskreis der Punkte mit dem Abstandsverhältnis $|K_i|$ von O und a_i schneidet. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind

$$\begin{aligned} P_i^{(1)} : \quad x &= \frac{G_i}{1 - K_i} , \quad y = \frac{H_i}{1 - K_i} , \\ P_i^{(2)} : \quad x &= \frac{G_i}{1 + K_i} , \quad y = \frac{H_i}{1 + K_i} . \end{aligned}$$

Wir nennen diese Punkte das *isometrische Punktepaar* von τ_i, a_i heißt der Pol von $\mathfrak{P}_i$. Das isometrische Punktepaar $\mathfrak{P}_i$ zerlegt die Punkte von σ_i und damit die Geraden von V (zunächst mit Ausnahme von σ_i) nach der Einteilung ihrer Schnittpunkte mit σ_i in drei Klassen: Inneres, Rand, Äußeres von $\mathfrak{P}_i$, je nachdem $|\vartheta_i(\xi, \eta)| \gtreqless 1$ ist. Wir rechnen σ_i zum Rand von $\mathfrak{P}_i$.

Zur Gewinnung der übrigen Ergebnisse ist analog zum komplexen Fall vorauszusetzen:

(I) *G sei n.-d. in einem Bereich N*, insbesondere in O;

(II) *Γ sei n.-d. in einem Bereich* N, insbesondere in γ_∞.

Eine Häufungsgerade der Achsen der isometrischen Streifen von G heißt eine *Grenzgerade* von Γ; ein Häufungspunkt der Pole der isometrischen Punktepaare von Γ heißt ein *Grenzpunkt* von G.

Der *Diskontinuitätsbereich B* (der maximale Bereich der bedingten Diskontinuität) *von G* (bzw. B von Γ) ist die Komplementärmenge zur Menge der Grenzpunkte von G (bzw. der Grenzgeraden von Γ).

Der *Normalbereich N von G* (bzw. N von Γ) ist die Menge der Punkte (Geraden), die auf keiner Grenzgeraden von Γ liegen (die durch keinen Grenzpunkt von G gehen).

Der Normalbereich ist im Diskontinuitätsbereich enthalten. Es gilt $B > N \dot{+} \dot{\mathrm{N}}$, und wenn die Menge der Grenzpunkte von G diskret ist, so gilt sogar $B = N \dot{+} \dot{\mathrm{N}}$.

Weiter wird vorausgesetzt:

(III) *Die Normalbereiche N und* N *sollen inzidente Elemente enthalten.*

Dann läßt sich (nach geeigneter Koordinatenwahl) ein Außenbereich R von G konstruieren: die Menge der Punkte, die samt einer Umgebung im Äußeren alle isometrischen Streifen Π_i von G liegen. R enthält einen Punkt auf γ_∞ samt einer Umgebung. R ist ein *Fundamentalbereich von G für N*. Ebenso läßt sich unter der Voraussetzung (III) ein Außenbereich P von Γ konstruieren: die Menge der Geraden, die samt einer Umgebung im Äußeren aller $\mathfrak{P}_i$ von Γ liegen. P enthält eine Gerade durch O samt einer Umgebung. P *ist ein Fundamentalbereich von Γ für* N.

18. Verallgemeinerung: Gruppen in n Variablen

Die Theorie der isometrischen Gebilde ist ohne weiteres auf den Raum W_{2n} von n Variablen zu übertragen; natürlich wirkt sich die Einschränkung auf Gruppen 1. Klasse um so stärker aus, je größer die Variablenzahl ist. Man betrachtet nebeneinander: die Gruppe G der Punkttransformationen und die durch G induzierte Gruppe Γ der Transformationen der $2(n-1)$-dimensionalen analytischen Ebenen M_{2n-2} in W_{2n}. Falls G und Γ e.-d. sind, läßt sich das Koordinatensystem so wählen, daß zu jeder Transformation T_i aus G bzw. τ_i aus Γ ein bestimmtes isometrisches Gebilde Π_i bzw. $\mathfrak{P}_i$ gehört. Π_i ist eine $(2n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit von Punkten; diese liegen auf einer einparametrigen Schar von analytischen Ebenen M_{2n-2}, die durch eine und dieselbe lineare Mannigfaltigkeit M_{2n-4} innerhalb der uneigentlichen $2(n-1)$-dimensionalen analytischen Ebene ε_∞ gehen. $\mathfrak{P}_i$ ist eine $(2n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit von analytischen Ebenen M_{2n-2}; diese gehen durch eine einparametrige Schar von Punkten, die auf einer und derselben linearen Mannigfaltigkeit M_2 durch den Nullpunkt liegen.

Zum Nachweis dieser Behauptungen denke man sich wieder die Determinante Δ der Transformation $T = (a_{ik})$ auf 1 normiert und die Elemente der letzten Zeile $a_{n+1,\,k}$ mit g_k bezeichnet, ihre Unterdeterminanten mit G_k $(k = 1, \ldots, n+1)$. Dann hat man die Darstellungen:

$$\Pi: \quad |g_1 w_1 + \cdots + g_n w_n + g_{n+1}| = 1\,,$$

$$\text{Achse } \alpha \text{ von } \Pi: \quad g_1 w_1 + \cdots + g_n w_n + g_{n+1} = 0\,;$$

$$\mathfrak{P}: \begin{cases} |w_1|^2 + \cdots + |w_n|^2 = |G_{n+1}|^2 \cdot \left(|w_1 - w_1^{(a)}|^2 + \cdots + |w_n - w_n^{(a)}|^2\right) & (*) \\[4pt] \dfrac{w_1}{G_1} = \dfrac{w_2}{G_2} = \cdots = \dfrac{w_n}{G_n}\,. & (**) \end{cases}$$

$$\text{Pol } a \text{ von } \mathfrak{P}: \quad w_i^{(a)} = \frac{G_i}{G_{n+1}} \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

$\mathfrak{P}$ ist also ein Kreis, nämlich der Schnitt der Ebene (**) mit der Apolloniuskugel (*). Die Punkte von $\mathfrak{P}$ haben vom Nullpunkt und vom Pol a das konstante Abstandsverhältnis $|G_{n+1}|$. Das isometrische Gebilde einer Transformation aus G zerlegt die Punkte, dasjenige einer Transformation aus Γ zerlegt die $2(n-1)$-dimensionalen analytischen Ebenen des Raumes W_{2n} in drei Klassen: Inneres, Rand und Äußeres. Zum Äußeren von Π bzw. $\mathfrak{P}$ gehören ε_∞ bzw. O, zum Inneren gehören α bzw. a. Jeder Häufungspunkt von Polen, die zu Transformationen aus Γ gehören, heißt ein *Grenzpunkt* von G, jede Häufungsebene von Achsen, die zu Transformationen aus G gehören, heißt eine *Grenzebene* von Γ. Die Menge der Grenzpunkte bildet die 1. Grenzmenge von G, diejenige der Grenzebenen die 1. Grenzmenge von Γ.

Der maximale *Bereich B der bedingten Diskontinuität* von G ist die Komplementärmenge zur 1. Grenzmenge von G. Der maximale Bereich B der bedingten Diskontinuität von Γ ist die Komplementärmenge zur 1. Grenzmenge von Γ.

Der maximale *Bereich N der normalen Diskontinuität* von G ist die Menge der Punkte, die nicht auf einer Grenzebene von Γ liegen. Der maximale Bereich N der normalen Diskontinuität von Γ ist die Menge der $2(n-1)$-dimensionalen analytischen Ebenen, die nicht durch einen Grenzpunkt von G gehen.

N ist ein Teilbereich von B.

Wenn N und N inzidente Elemente haben, so ist nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems ein *Fundamentalbereich von G für N* der Bereich R derjenigen Punkte, die samt einer Umgebung im Äußeren aller isometrischen Gebilde Π_i von G liegen. Analog ist ein Fundamentalbereich von Γ für N der Bereich P derjenigen $2(n-1)$-dimensionalen analytischen Ebenen, die samt einer Umgebung im Äußeren aller $\mathfrak{P}_i$ von Γ liegen.

19. Der Normalbereich als Existenzbereich automorpher Funktionen

Um die Bedeutung der verwendeten Begriffe, insbesondere des Diskontinuitätsbereichs und des Normalbereichs für die Theorie der automorphen Funktionen klar zu machen, knüpft man am besten (wie Myrberg, [9], p. 87 ff. oder [10], Kap. 5) an die Darstellung dieser Funktionen durch Poincaré an. Er bedient sich unendlicher Reihen, die im Falle zweier Variablen die Gestalt haben

$$\Theta(w,z) = \sum H(w',z') \cdot \left(\frac{\partial(w',z')}{\partial(w,z)}\right)^p. \qquad (*)$$

Darin ist über alle Bilder von (w, z) vermöge Transformationen aus G zu summieren. p bedeutet eine ganze Zahl, $H(w, z)$ eine rationale Funktion, z. B.

$$H(w, z) = \frac{m_1 w + m_2 z + m_3}{n_1 w + n_2 z + n_3} ,$$

wo $n_1 w + n_2 z + n_2 = 0$ eine Ebene ist, die keinen Grenzpunkt enthält. Eine solche Ebene existiert nach Voraussetzung (II), und wir haben das Koordinatensystem bereits so gewählt, daß ε_∞ eine solche Ebene ist. Die Funktionaldeterminante einer unimodularen Transformation

$$T_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ d_i & e_i & f_i \\ g_i & h_i & k_i \end{pmatrix} \text{ hat den Wert } \frac{\partial(w', z')}{\partial(w, z)} = \frac{1}{(g_i w + h_i z + k_i)^3} .$$

Der zweite Faktor des allgemeinen Reihengliedes wird also ∞ in den Punkten der zur Transformation T_i gehörenden Achse α_i. Unendlich viele Glieder der θ-Reihe sind also unbeschränkt, wenn man sich einer Grenzebene nähert. Dagegen konvergiert die θ-Reihe gleichmäßig und absolut — nach Abspaltung von jeweils höchstens endlich vielen Gliedern — in jedem Bereich, der von allen Grenzebenen einen festen positiven Abstand hat.

Die θ-Reihen (*) stellen daher analytische Funktionen dar, die außerhalb der 2. Grenzmenge $L_2(G)$ sich wie rationale Funktionen verhalten. Sie erfüllen die Gleichung

$$\Theta(w', z') = \theta(w, z) \left(\frac{\partial(w', z')}{\partial(w, z)}\right)^{-p} .$$

Der Quotient zweier verschiedener θ-Funktionen mit dem gleichen Exponenten p ist demnach eine automorphe Funktion von G; diese hat außerhalb $\{L_2(G)\}$ nur algebraische Singularitäten.

Wenn nun die Ebenen L_2 diskret liegen in W, so definiert jede θ-Reihe (*) eine einzige analytische Funktion, mit dem Normalbereich $W - \{L_2(G)\}$ von G als Existenzbereich. Jede Ebene L_2 erweist sich dann nämlich als wesentlich singuläre Fläche dieser Funktion. Aber auch ohne die Voraussetzung, daß die Ebenen L_2 diskret liegen in W und ohne Bezugnahme auf die analytische Darstellung der Funktionen durch θ-Reihen — was bei mehreren Variablen eine Einschränkung bedeutet — findet man bei Gruppen ohne invarianten Punkt oder invariante Ebene, daß jede Ebene L_2 eine wesentlich singuläre Fläche für jede automorphe Funktion von G ist. Diese Ergebnisse veranlassen Myrberg, unter den automorphen

Funktionen einer Gruppe 1. Klasse diejenigen Funktionen zu verstehen, die nur in den Punkten der Grenzebenen von Γ wesentlich singulär sind. *Jeder zusammenhängende Teilbereich des Normalbereichs von G ist der Existenzbereich einer solchen Funktion.* Es handelt sich dabei um Funktionen mit festen wesentlichen Singularitäten (d. h. solchen, die von der Gruppe allein abhängen) — im Gegensatz zu Funktionen mit einer normal-diskontinuierlichen linearen automorphen Gruppe, die nicht zur 1. Klasse gehört; in diesem allgemeineren Fall können bewegliche Singularitäten im Inneren des Normalbereichs auftreten; sie hängen nicht mehr von der Gruppe allein, sondern von den einzelnen Funktionen ab.

(Eingegangen den 3. Mai 1939.)

LITERATUR

1. *H. Behnke* und *E. Peschl*, Konvexität in bezug auf analytische Ebenen im kleinen und im großen. Math. Ann. **111** (1935), 158—177.
2. *H. Behnke* und *P. Thullen*, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Berlin 1934.
3. *L. R. Ford*, On the foundations of the theory of discontinuous groups of linear transformations. Proc. Natl. Acad. Sci., **13** (1927), 286—288.
4. *L. R. Ford*, Automorphic functions. New York 1929. (Mit Literaturverzeichnis.)
5. *G. Fubini*, Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe. Pisa 1908. (Mit Literaturverzeichnis.)
6. *G. Giraud*, Leçons sur les fonctions automorphes. Paris 1920.
7. *A. Hurwitz*, Zur Theorie der automorphen Funktionen von beliebig vielen Variablen. Math. Ann. **61** (1905), 325—368 = Math. Werke I, 606—651.
8. *J. I. Hutchinson*, A method for constructing the fundamental region of a discontinuous group of linear transformations. Trans. Am. Math. Soc. **8** (1907), 261—269.
9. *P. J. Myrberg*, Über die automorphen Funktionen mehrerer Veränderlichen. Math. Ann. **93** (1925), 61—97.
10. *P. J. Myrberg*, Untersuchungen über die automorphen Funktionen beliebig vieler Variablen. Acta math. **46** (1925), 215—336. (Mit Literaturverzeichnis.)
11. *P. J. Myrberg*, Über diskontinuierliche Gruppen und automorphe Funktionen von mehreren Variablen. Atti del congresso internaz. dei matematici, Bologna 1928, III., 293—295. Bologna 1930.
12. *W. Wirtinger*, Zur Theorie der automorphen Funktionen von n Veränderlichen. Sitzungsber. d. Acad. d. Wiss. Wien, **108** (1899), 1239—1249.