

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 12 (1939-1940)

**Artikel:** Über einen Hartogs'schen Satz.  
**Autor:** Fueter, Rud.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-12795>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über einen Hartogs'schen Satz

Von RUD. FUETER, Zürich

Bekanntlich sind die analytischen Funktionen  $f(z_1, z_2)$  der beiden komplexen Variablen  $z_1, z_2$  ein Spezialfall der von mir eingeführten rechtsregulären Funktionen einer Quaternionenvariablen<sup>1)</sup>. Es fragt sich, ob man die Theorie der letztern für die Theorie der Funktionen  $f(z_1, z_2)$  verwertbar gestalten kann. Im folgenden zeige ich, wie ein Hauptresultat von Hartogs<sup>2)</sup> sich fast selbstverständlich aus den Elementen der Theorie der rechtsregulären Funktionen einer Quaternionenvariablen ergibt. Von der letztern braucht man nur: Die Definition der rechts-, resp. linksregulären Funktion  $w = f(z)$ , resp.  $v = g(z)$ , wo  $z = \sum_{(k)} x_k i_k$  ( $x_k$  reell) die Quaternionenvariable ist:

$$\sum_{(k)} \frac{\partial f(z)}{\partial x_k} i_k = 0, \quad \sum_{(k)} i_k \frac{\partial g(z)}{\partial x_k} = 0 ;$$

den I. Hauptsatz:

$$\int_{(R)} f(\zeta) dZ g(\zeta) = 0, \quad (\text{I})$$

wo  $R$  eine geschlossene, endliche, zweiseitige, sich nirgends durchdringende Hyperfläche ist, in deren Innern  $f(z)$  und  $g(z)$  überall regulär sind; die Folgerungen aus I:

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta) dZ \Delta((\zeta - z)^{-1}), \quad (\text{II})$$

wo  $\Delta((\zeta - z)^{-1}) = -4n(\zeta - z)^{-1}(\zeta - z)^{-1}$  ist, und  $f(z)$  die vorigen Bedingungen erfüllt; ferner  $\left( f^{(k)}(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x_k}, \quad g^{(k)}(z) = \frac{\partial g(z)}{\partial x_k} \right)$ :

$$\int_{(R)} (f^{(k)}(\zeta) dZ g(\zeta) + f(\zeta) dZ g^{(k)}(\zeta)) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \text{ } ^3) \quad (\text{III})$$

wo  $f(z)$  und  $g(z)$  bloß auf  $R$  selbst eindeutig und rechts-, resp. linksregulär sein müssen; schließlich die Ausführungen über den Punkt Unendlich<sup>4)</sup>.

<sup>1)</sup> Siehe hiezu meinen Osloer Vortrag. C. R. Congrès Int., Oslo, t. 1, p. 75 (1936), sowie die Literaturangaben in Comm. Math. Helv. vol. 10, p. 306.

<sup>2)</sup> Siehe z. B. *Osgood*: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Bd. 2. A. 1929, S. 206.

<sup>3)</sup> Comm. Math. Helv. Vol. 10, p. 309.

<sup>4)</sup> Comm. Math. Helv. Vol. 9, p. 331/332.

1. Wir setzen:

$$z = \sum_{k=0}^3 x_k i_k = z_1 + z_2 i_2, \quad z_1 = x_0 + i_1 x_1, \quad z_2 = x_2 + i_1 x_3 .$$

Es seien  $g(z_1, z_2)$  und  $h(z_1, z_2)$  zwei im beliebig vorgegebenen Hyper-  
raume  $H$  analytische Funktionen von  $z_1, z_2$ . Bekanntlich ist dann:

$$f(z) = g(z_1, z_2) + i_2 h(z_1, z_2)$$

eine rechtsreguläre Funktion von  $z$ . Wir wollen sie *eine in  $H$  analytische  
rechtsreguläre Funktion* nennen. Dann gilt der

**1. Satz:** *Damit die in  $H$  rechtsreguläre Funktion  $w = f(z)$  in  $H$  ana-  
lytisch ist, ist notwendig und hinreichend, daß in  $H$ :*

$$f^{(0)}(z) + f^{(1)}(z) i_1 = 0, \quad f^{(2)}(z) + f^{(3)}(z) i_1 = 0$$

*ist.*

Die Notwendigkeit erkennt man aus den Riemann-Cauchy'schen  
Differentialgleichungen der analytischen Funktionen  $g$  und  $h$ , die man  
so schreiben kann:

$$\begin{aligned} g^{(0)} + g^{(1)} i_1 &= 0, \quad g^{(2)} + g^{(3)} i_1 = 0, \\ h^{(0)} + h^{(1)} i_1 &= 0, \quad h^{(2)} + h^{(3)} i_1 = 0 . \end{aligned} \tag{a}$$

Multipliziert man die zweiten von links mit  $i_2$  und addiert sie zu den  
ersten, so folgen die Gleichungen des Satzes.

Sind umgekehrt die letztern erfüllt, so kann man sie sofort in die  
Gleichungen (a) zerlegen, falls  $f = g + i_2 h$  gesetzt wird, wo  $g, h$  nur  $i_1$   
enthalten. Diese sind aber hinreichend dafür, daß  $g$  und  $h$  in  $H$  analytisch  
in  $z_1, z_2$  sind (die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen sind  
schon für die rechtsregulären Funktionen vorausgesetzt).

**2. Satz:** *Damit die in  $H$  rechtsreguläre Funktion  $w = f(z)$  in  $H$  ana-  
lytisch ist, ist notwendig und hinreichend, daß auch  $f(z) i_1$  in  $H$  rechts-  
regulär ist.*

Die Notwendigkeit erkennt man daraus, daß auch  $g i_1$  und  $h i_1$  in  $H$   
analytische Funktionen von  $z_1, z_2$  sind.

Ist umgekehrt  $f(z)i_1$  in  $H$  rechtsregulär, so muß nach der Definition:

$$\sum_{(k)} f^{(k)}(z)i_k = 0, \quad \sum_{(k)} f^{(k)}(z)i_1 i_k = 0$$

sein; oder:

$$(f^{(0)} + f^{(1)}i_1) + (f^{(2)} + f^{(3)}i_1)i_2 = 0, \quad [(f^{(0)} + f^{(1)}i_1) - (f^{(2)} + f^{(3)}i_1)i_2]i_1 = 0,$$

woraus sofort die Gleichungen von Satz 1 folgen. Daher muß  $f(z)$  analytisch in  $H$  sein.

**3. Satz:** *Besitzt die im Punkte  $z = 0$  rechtsreguläre Funktion  $w = f(z)$  die Reihenentwicklung:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} p_{n_1 n_2 n_3}(z),$$

so ist sie dann und nur dann analytisch rechtsregulär, wenn:

$$c_{n_1 n_2 + 1 n_3} = c_{n_1 n_2 n_3 + 1} i_1; \quad n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Beweis nach *Schuler*, *Comm. Math. Helv.*, Vol. 10, p. 332 u. ff. Im folgenden wird dieser Satz nicht verwendet.

Man kann Satz 2 so verallgemeinern:

**4. Satz:** *Ist  $w = f(z)$  rechtsregulär in  $H$ , und ist  $\varphi(z_1, z_2)$  eine bestimmte, in  $H$  analytische Funktion von  $z_1, z_2$ , die aber keine reelle Konstante sein darf, so ist  $f(z)$  dann und nur dann analytisch in  $H$ , wenn auch  $f(z)\varphi(z_1, z_2)$  in  $H$  rechtsregulär ist.*

2. Es sei  $R$  eine geschlossene, sich nirgends durchdringende zweiseitige endliche Hyperfläche, und  $w = f(z)$  auf  $R$  eine eindeutige, *analytische* rechtsreguläre Funktion. Dann ist auch  $f(z)i_1$  auf  $R$  rechtsregulär und  $f(z)$  genügt auf  $R$  den beiden Gleichungen von Satz 1. Wir setzen:

$$F(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta) dZ \Delta((\zeta - z)^{-1}), \quad G(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta) i_1 dZ \Delta((\zeta - z)^{-1}).$$

$F(z)$  und  $G(z)$  sind zwei im ganzen Innern von  $R$  existierende, rechtsreguläre Funktionen von  $z$ . Nun ist aber, da:

$$\frac{\partial \Delta((\zeta - z)^{-1})}{\partial x_k} = - \frac{\partial \Delta((\zeta - z)^{-1})}{\partial \xi_k},$$

ist, nach Formel (III):

$$\begin{aligned} F^{(k)}(z) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta) dZ \frac{\partial \Delta((\zeta - z)^{-1})}{\partial x_k} = - \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta) dZ \frac{\partial \Delta((\zeta - z)^{-1})}{\partial \xi_k} = \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f^{(k)}(\zeta) dZ \Delta((\zeta - z)^{-1}), \end{aligned}$$

und entsprechend:

$$G^{(k)}(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f^{(k)}(\zeta) i_1 dZ \Delta((\zeta - z)^{-1}).$$

Berücksichtigt man hier die beiden Gleichungen von Satz 1 für  $f(z)$ , so wird:

$$F^{(0)}(z) = -G^{(1)}(z), F^{(1)}(z) = G^{(0)}(z), F^{(2)}(z) = -G^{(3)}(z), F^{(3)}(z) = G^{(2)}(z).$$

Da aber  $F(z)$  und  $G(z)$  rechtsregulär im Innern von  $R$  sind, so muß:

$$\sum_{(k)} F^{(k)}(z) i_k = 0, \quad \sum_{(k)} G^{(k)}(z) i_k = 0$$

sein. Setzt man in der zweiten Gleichung die gefundenen Werte von  $G^{(k)}(z)$  ein, so wird:

$$F^{(1)}(z) - F^{(0)}(z) i_1 + F^{(3)}(z) i_2 - F^{(2)}(z) i_3 = 0,$$

oder:

$$-(F^{(0)}(z) + F^{(1)}(z) i_1 - (F^{(2)}(z) + F^{(3)}(z) i_1) i_2) i_1 = 0.$$

Läßt man hier den Faktor  $-i_1$  weg, und vergleicht die Formel mit der ersten, so folgt:

$$F^{(0)}(z) + F^{(1)}(z) i_1 = 0, \quad F^{(2)}(z) + F^{(3)}(z) i_1 = 0,$$

welche nach Satz 1 aussagen, daß  $F(z)$  im Innern von  $R$  eine analytische rechtsreguläre Funktion ist. Ebenso natürlich  $G(z) = F(z) i_1$ .

**5. Satz:** *Ist  $w = f(z)$  auf der endlichen, geschlossenen zweiseitigen Hyperfläche  $R$  eindeutig und analytisch rechtsregulär, so ist:*

$$F(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta) dZ \Delta((\zeta - z)^{-1})$$

*eine im ganzen Innern von  $R$  analytisch rechtsreguläre Funktion.*

Genau ebenso beweist man den

**6. Satz:** *Ist  $w = f(z)$  auf der endlichen, geschlossenen zweiseitigen Hyperfläche  $R$  eindeutig und analytisch rechtsregulär, so ist:*

$$F^*(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R)} f(\zeta) dZ \Delta ((\zeta - z)^{-1})$$

eine überall außerhalb von  $R$  (inklusive den Punkt Unendlich) analytische rechtsreguläre Funktion.

Man sieht, daß  $F^*(\infty) = 0$  sein muß.

**7. Satz:** *Eine analytisch rechtsreguläre Funktion, die im Punkte Unendlich regulär ist, ist eine Konstante. Daher muß die Funktion  $F^*(z)$  von Satz 6 überall außerhalb  $R$  null sein.*

Es sei  $w = f(z)$  die analytisch rechtsreguläre Funktion, die im Punkte Unendlich regulär ist. Wir dürfen voraussetzen, daß sie in letztem Punkte null ist, also für alle  $z: |z| \geq r$ , durch:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} c_{n_1 n_2 n_3} q_{n_1 n_2 n_3}(z), \quad |z| \geq r,$$

gegeben ist. Ist  $t$  ein reeller Parameter, der absolut größer als 1 ist, so ist auch:

$$f(tz) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n-3} \sum_{(n)} c_{n_1 n_2 n_3} q_{n_1 n_2 n_3}(z), \quad |z| \geq r,$$

analytisch rechtsregulär in  $z$ . Somit muß auch:

$$f_n(z) = \sum_{(n)} c_{n_1 n_2 n_3} q_{n_1 n_2 n_3}(z), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

eine analytisch rechtsreguläre Funktion für alle  $|z| \geq r$  sein. Nach Satz 4 ist dann auch

$$f_n^*(z) = f_n(z) (x_0 + i_1 x_1)^{n+2}$$

rechtsregulär für alle  $z: |z| \geq r$ .  $f_n^*(z)$  ist daher auch in  $\infty$  regulär, da

$$\lim_{z \rightarrow \infty} q_{n_1 n_2 n_3}(z) (x_0 + i_1 x_1)^{n+2} = 0$$

wird, wie man auch gegen unendlich geht. Denn es ist:

$$|q_{n_1 n_2 n_3}(z) (x_0 + i_1 x_1)^{n+2}| \leq 2(n+2)! \frac{1}{\sqrt{\frac{x_2^2 + x_3^2}{x_0^2 + x_1^2} + 1}^{n+2}} \frac{1}{|z|} \leq \frac{2(n+2)!}{|z|}.$$

Somit muß auch die Entwicklung gelten: <sup>5)</sup>

$$f_n^*(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{(\nu)} d_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} q_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(z), \quad |z| \geq r.$$

Dies ist aber unmöglich, außer wenn  $f_n(z) \equiv 0$  ist. Denn es ist  $f_n^*(tz) = t^{-1} f_n^*(z)$ ; die rechte Seite erhält aber wenigstens den Faktor  $t^{-3}$ . Also müssen alle  $f_n(z) \equiv 0$  sein,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ .

3. Aus diesen Sätzen ergibt sich sofort folgender (verallgemeinerter) Hartogs'scher Satz:

**8. Satz:** *Ist  $w = f(z)$  eine auf der geschlossenen endlichen, zweiseitigen, sich nirgends durchdringenden Hyperfläche  $R$  eindeutige und analytische rechtsreguläre Funktion, so ist  $f(z)$  auch im ganzen Innern von  $R$  analytisch rechtsregulär.*

Das Innere bedeutet stets den Hyperraumteil, in dem der Punkt Unendlich nicht liegt.

Wenn  $w = f(z)$  auf  $R$  regulär ist, so ist sie auch in dem abgeschlossenen Hyperraume  $H$ , der durch alle Hyperkugeln um jeden Punkt von  $R$  mit einem bestimmten Radius  $r$  bedeckt wird, noch regulär.  $H$  werde nach außen durch  $R'$ , nach innen durch  $R''$  begrenzt. Liegt  $z$  in  $H$ , so ist nach (II):

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \left( \int_{(R')} - \int_{(R'')} f(\zeta) dZ \Delta((\zeta - z)^{-1}) \right).$$

Da  $f(z)$  analytisch rechtsregulär ist, so ist das zweite Integral null. Also ist:

$$f(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{(R')} f(\zeta) dZ \Delta((\zeta - z)^{-1});$$

diese Funktion ist im ganzen Innern von  $R'$ , also auch von  $R$  analytisch rechtsregulär. Sie stimmt in  $H$  mit der gegebenen Funktion  $f(z)$  überein, ist also deren analytische Fortsetzung.

(Eingegangen den 21. August 1939)

---

<sup>5)</sup> Comm. Math. Helv. Vol. 9, p. 332. Es ist praktisch, überall  $q_{n_1 n_2 n_3}(z)$  statt  $p_{n_1 n_2 n_3}(z^{-1}) n(z)^{-1} z^{-1}$  zu nehmen.