

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Über eine besondere Klasse von involutorischen Cremona-Transformationen und die darin invarianten algebraischen Kurven.
Autor: Emch, Arnold
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-11876>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über eine besondere Klasse von involutorischen Cremona-Transformationen und die darin invarianten algebraischen Kurven

Von ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois (U. S. A.)

§ 1. Einleitung

In frühern Arbeiten¹⁾ untersuchte ich involutorische Cremona-Transformationen, die sich wie folgt ergeben: Man betrachte in einem projektiven Überräume S_r von r Dimensionen r Hyperkegel $(a_i \lambda_i)^2 = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$, worin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ die Parameter sind, welche die einhüllenden Tangentialhyperebenen bestimmen. Für jedes Wertsystem derselben schneiden sich die r zugehörigen Hyperebenen in einem bestimmten Punkt (x) von S_r . Von (x) lassen sich eindeutig r weitere Hypertangentialebenen an die Hyperkegel legen, deren Parameter $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r$ durch die λ eindeutig bestimmt sind und daher rationale Funktionen der λ sind. Man hat

$$\varrho \lambda'_1 = \Phi_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r), \dots, \varrho \lambda'_r = \Phi_r(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) .$$

Umgekehrt folgt sofort

$$\sigma \lambda_1 = \Phi_1(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r), \dots, \sigma \lambda_r = \Phi_r(\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r) .$$

Deutet man die λ und λ' als Koordinaten in den projektiven Überräumen S_r^λ und $S_r^{\lambda'}$ so besteht also zwischen ihnen eine involutorische Cremona-Transformation, deren Ordnung und Fundamentelemente bestimmt wurden. Als Beispiele wurden die Fälle der Ebene und des gewöhnlichen Raumes behandelt.

Betrachtet man zwei bestimmte entsprechende Wertsysteme $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r); (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_r)$, so geht aus der Konstruktion hervor, daß auch

$$\begin{aligned} &(\lambda'_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda'_s, \lambda'_{s+1}, \dots, \lambda_{r-1}, \lambda_r) , \\ &(\lambda_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_k, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda'_{r-1}, \lambda'_r) , \end{aligned}$$

entsprechende Wertsysteme oder Punkte der Transformation sein müssen. Irgend eine Anzahl Transpositionen (λ_i, λ'_i) zwischen den zwei Zeilen

¹⁾ Geometrische Anwendungen der binären (n, n) -Verwandtschaft, Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 4, 1932, pp. 65—73.

On involutorial Cremona transformations in S_r , Vol. 37, 1933, pp. 100—109. The Tohoku Mathematical Journal.

führt zu zwei entsprechenden Punkten. Es wäre interessant wenn notwendige und hinreichende Kriterien für Transformationen dieser Art überhaupt aufgestellt werden könnten.

Daß noch andere Transformationen dieser Art existieren können, geht aus dem einfachen Beispiel

$$T_r \equiv \varrho x_i = \frac{1}{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

hervor.

Es ist der Zweck dieser Arbeit, die Folgerungen aus der erwähnten Eigenschaft für die Transformationen T_2 und T_3 zu ziehen. Daraus ergeben sich dann neue Eigenschaften für die ebene elliptische Kurve dritter Ordnung und einer Raumkurve 7. Ordnung vom Geschlecht 3.

§ 2. Die Δ_8 -Konfiguration und die elliptische Kurve 3. Ordnung

1. Sei $\varrho x'_i = \frac{1}{x_i}, i = 1, 2, 3$ eine involutorische quadratische Transformation T_2 , deren Fundamentalpunkte $A_1(1, 0, 0); A_2(0, 1, 0); A_3(0, 0, 1)$, und die invarianten Punkte $B(1, 1, 1); B_1(-1, 1, 1); B_2(1, -1, 1); B_3(1, 1, -1)$ sind. Nun führe man die oben angegebenen acht möglichen Permutationen aus, dann erhält man die vier Paare von entsprechenden Punkten P_i, P'_i :

$$\begin{aligned} P_1(a_1, a_2, a_3); & \quad P_2(a_2 a_3, a_2, a_3) \\ P'_1(a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2); & \quad P'_2(a_1, a_3 a_1, a_1 a_2) \\ P_3(a_1, a_3 a_1, a_3); & \quad P_4(a_1, a_2, a_1 a_2) \\ P'_3(a_2 a_3, a_2, a_1 a_2); & \quad P'_4(a_2 a_3, a_3 a_1, a_3). \end{aligned} \quad (1)$$

Man kann das sofort bestätigen. Zum Beispiel, der P_3 entsprechende Punkt ist $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_3 a_1}, \frac{1}{a_3}\right) \equiv (a_2 a_3, a_2, a_1 a_2) = P'_3$. Es ergibt sich weiter, daß die Verbindungslinien gewisser Punktepaare in der in folgender Tabelle angegebenen Weise in den Punkten A_1, A_2, A_3 zusammenlaufen:

$$A_1 \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_2 \\ P'_1 P'_2 \\ P_3 P'_4 \\ P'_3 P_4 \end{array} \right., \quad A_2 \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_3 \\ P'_1 P'_3 \\ P_2 P'_4 \\ P'_2 P_4 \end{array} \right., \quad A_3 \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_4 \\ P'_1 P'_4 \\ P_2 P'_3 \\ P'_2 P_3 \end{array} \right. . \quad (2)$$

Addiert man die Koordinaten entsprechender Punkte in derselben Reihenfolge, so erhält man den Punkt $O(a_1+a_2a_3, a_2+a_3a_1, a_3+a_1a_2)$, so daß also die Verbindungslinien entsprechender Punkte $P_iP'_i$ von (1) durch O gehen. Die Konfiguration der acht Punkte von (1) sei mit Δ_8 bezeichnet. Man hat also

Satz 1. *Die acht Punkte der Konfiguration Δ_8 liegen zu zweien auf vier Geraden durch jeden der drei Punkte A_1, A_2, A_3 . Die Verbindungsgeraden der vier Punktepaare entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt O .*

2. Nun sind bekanntlich die Kurven C_3 dritter Ordnung des Netzes auf den sieben Punkten (A_i) und (B_i) invariant in T_2 . Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte auf jeder C_3 gehen alle durch einen festen Punkt O von C_3 , den sogenannten isologen Punkt von C_3 . Man betrachte eine bestimmte elliptische C_3 des Netzes und ihren isologen Punkt O . Sei s eine beliebige Sekante durch O , welche C_3 in einem Paare P_i, P'_i entsprechender Punkte schneidet. Umgekehrt bestimmt ein solches Paar die C_3 eindeutig. Konstruiert man die zu diesem Paare gehörige Konfiguration Δ_8 , so ist klar, daß alle Punktepaare $P_iP'_i$ von Δ_8 auf C_3 liegen. Folglich liegt jede auf irgend einem Paar entsprechender Punkte von C_3 aufgebauten Δ_8 auf C_3 .

Es ist weiter bekannt, daß $BB_1B_2B_3$ ein Steinersches Quadrupel auf C_3 und $A_1A_2A_3$ sein Diagonaldreieck ist. Solcher Quadrupel gibt es ∞^1 und folglich ebensoviele Diagonaldreiecke. Folglich

Satz 2. *Auf jeder elliptischen Kurve dritter Ordnung gibt es ∞^1 Steinersche Quadrupel mit ebensovielen zugehörigen Diagonaldreiecken $A_1A_2A_3$. Verbunden mit jedem solchen Dreieck sind $\infty^1 \Delta_8$ — Konfigurationen die alle auf derselben C_3 liegen, so daß also jedesmal die acht Punkte zu zweien auf vier Geraden durch jeden der Punkte A_1, A_2, A_3 gehen und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte jeder Δ_8 durch den isologen Punkt O der C_3 laufen.*

§ 3. Die Δ_{16} -Konfiguration und eine Raumkurve 7. Ordnung vom Geschlecht 3

1. Man betrachte die kubische Transformation T in S_3 ,

$$\varrho x'_i = \frac{1}{x_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Sei $P_1(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ein beliebiger Punkt, dann ist sein entsprechender $P'_1(a_2a_3a_4, a_1a_3a_2, a_1a_2a_4, a_1a_2a_3)$. Irgend eine Anzahl Transpositionen

zwischen Paaren vertikal untereinander stehenden Koordinaten des Punktepaares $P_1 P'_1$, z. B.

$$P_6(a_2 a_3 a_4, a_1 a_3 a_4, a_3, a_4),$$

$$P'_6(a_1, a_2, a_1 a_2 a_4, a_1 a_2 a_3),$$

gibt wieder ein Paar entsprechender Punkte. Der inverse Punkt von P_6 ist

$$\left(\frac{1}{a_2 a_3 a_4}, \frac{1}{a_1 a_3 a_4}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4} \right).$$

Multipliziert man mit $a_1 a_2 a_3 a_4$, so ergibt sich P'_6 , w. z. w. In ähnlicher Weise ist P'_6 der inverse Punkt von P_6 . Werden alle möglichen $2^4 = 16$ Reihen von Transpositionen ausgeführt, so ergeben sich 8 Paare entsprechender Punkte $P_i P'_i \equiv P'_i P_i$, welche eine Konfiguration Δ_{16} bilden:

$$\begin{array}{ll} P_1(a_1, a_2, a_3, a_4); & P_5(a_1, a_2, a_3, a_1 a_2 a_3), \\ P'_1(a_2 a_3 a_4, a_1 a_3 a_4, a_1 a_2 a_4, a_1 a_2 a_3); & P'_5(a_2 a_3 a_4, a_1 a_3 a_4, a_1 a_2 a_4, a_4), \\ P_2(a_2 a_3 a_4, a_2, a_3, a_4); & P_6(a_2 a_3 a_4, a_1 a_3 a_4, a_3, a_4), \\ P'_2(a_1, a_1 a_3 a_4, a_1 a_2 a_4, a_1 a_2 a_3); & P'_6(a_1, a_2, a_1 a_2 a_4, a_1 a_2 a_3), \\ P_3(a_1, a_1 a_3 a_4, a_3, a_4); & P_7(a_2 a_3 a_4, a_2, a_1 a_2 a_4, a_4), \\ P'_3(a_2 a_3 a_4, a_2, a_1 a_2 a_4, a_1 a_2 a_3); & P'_7(a_1, a_1 a_3 a_4, a_3, a_1 a_2 a_3), \\ P_4(a_1, a_2, a_1 a_2 a_4, a_4); & P_8(a_2 a_3 a_4, a_2, a_3, a_1 a_2 a_3), \\ P'_4(a_2 a_3 a_4, a_1 a_3 a_4, a_3, a_1 a_2 a_3); & P'_8(a_1, a_1 a_3 a_4, a_1 a_3 a_4, a_4). \end{array}$$

Die 16 Punkte können in Paare gruppiert werden. Verbindungsgeraden durch die Punkte $A_1(1, 0, 0, 0)$; $A_2(0, 1, 0, 0)$; $A_3(0, 0, 1, 0)$; $A_4(0, 0, 0, 1)$ gehen, wie leicht folgt und wie in folgender Tabelle angegeben ist:

$$\begin{array}{c} A_1 \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_2 \\ P'_1 P'_2 \\ P_3 P_6 \\ P'_3 P'_6 \\ P_4 P_7 \\ P'_4 P'_7 \\ P_5 P_8 \\ P'_5 P'_8 \end{array} \right. \quad A_2 \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_3 \\ P'_1 P'_3 \\ P_2 P_6 \\ P'_2 P'_6 \\ P_4 P'_8 \\ P'_4 P_8 \\ P_5 P'_7 \\ P'_5 P_7 \end{array} \right. \quad A_3 \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_5 \\ P'_1 P'_5 \\ P_2 P_8 \\ P'_2 P'_8 \\ P_3 P'_7 \\ P'_3 P_7 \\ P_4 P'_6 \\ P'_4 P_6 \end{array} \right. \quad A_4 \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_4 \\ P'_1 P'_4 \\ P_2 P_7 \\ P'_2 P'_7 \\ P_3 P'_8 \\ P'_3 P_8 \\ P_5 P'_6 \\ P'_5 P_6 \end{array} \right. . \end{array}$$

Eine Linie $A_i P_i$ wird durch T in die Linie $A_i P'_i$ transformiert, so daß also die acht durch jeden A_i gehenden Linien als Gruppe invariant sind. $P_1 P_2, P_3 P_6$ durch A_1 , und $P_1 P_3, P_2 P_6$ bilden zusammen ein Vierseit in der Ebene $a_4 x_3 - a_3 x_4 = 0$; $P'_1 P'_2, P'_3 P'_6$ durch A_1 , und $P'_1 P'_3, P'_2 P'_6$ ein Vierseit in der konjugierten Ebene $a_3 x_3 - a_4 x_4 = 0$. In ähnlicher Weise bilden $P_4 P_7, P'_5 P'_8$ durch A_1 , und $P_4 P'_8, P'_5 P_7$ durch A_2 Vierseite in konjugierten Ebenen durch $A_1 A_2$. Die Verbindungslinie irgend eines Paares $P_i P'_i$, z. B. $P_7(a_2 a_3 a_4, a_2, a_1 a_2 a_4, a_4)$, $P'_7(a_1, a_1 a_3 a_4, a_3, a_1 a_2 a_3)$, geht, wie leicht ersichtlich durch den festen Punkt $O(a_1 + a_2 a_3 a_4, a_2 + a_1 a_3 a_4, a_3 + a_1 a_2 a_4, a_4 + a_1 a_2 a_3)$.

Zusammenfassend hat man den

Satz 3. *Die acht Linien durch jede von zwei der vier Ecken A_i bilden vier Vierseite in zwei Paaren von konjugierten Ebenen durch die zwei Ecken. Die Punkte der Δ_{18} liegen zu zweien auf acht Linien durch jede der vier Ecken A_i . Die Verbindungslinie entsprechender Punkte der Δ_{18} gehen alle durch einen festen Punkt O .*

2. Bekanntlich bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte P_i, P'_i von T einen kubischen Geradenkomplex mit der Gleichung

$$P_{12} P_{13} P_{23} + P_{12} P_{14} P_{42} + P_{13} P_{14} P_{34} + P_{23} P_{42} P_{34} = 0 .$$

Sei $O(b_1 b_2 b_3 b_4)$ die Spitze eines kubischen Komplexkegels K , dann hat dieser die Gleichung

$$(b_1 x_2 - b_2 x_1)(b_1 x_3 - b_3 x_1)(b_2 x_3 - b_3 x_2) + (b_1 x_2 - b_2 x_1)(b_1 x_4 - b_4 x_1)(b_4 x_2 - b_2 x_4) + \\ (b_1 x_3 - b_3 x_1)(b_1 x_4 - b_4 x_1)(b_3 x_4 - b_4 x_3) + (b_2 x_3 - b_3 x_2)(b_4 x_2 - b_2 x_4)(b_3 x_4 - b_4 x_3) = 0.$$

Auf jeder Erzeugenden g von K liegen zwei entsprechende Punkte P_i, P'_i von T . Ist O' der O entsprechende Punkt, so ist auch $O'O$ eine Erzeugende von K . Ferner sind auch $OA_i, i = 1, 2, 3, 4$, solche. Es handelt sich jetzt darum, den Ort entsprechender Punkte P_i, P'_i auf K zu bestimmen. Die Verbindungsgerade zweier entsprechender Punkte $P(x_1, x_2, x_3, x_4) P'(x_2 x_3 x_4, x_1 x_3 x_4, x_1 x_2 x_4, x_1 x_2 x_3)$ geht durch $O(b_1, b_2, b_3, b_4)$, wenn

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \mu x_2 x_3 x_4 &= b_1, \\ \lambda x_2 + \mu x_1 x_3 x_4 &= b_2, \\ \lambda x_3 + \mu x_1 x_2 x_4 &= b_3, \\ \lambda x_4 + \mu x_1 x_2 x_3 &= b_4. \end{aligned}$$

Eliminiert man λ und μ aus den drei ersten dieser Gleichungen und dann aus den drei letzten, so ergeben sich die kubischen Kegel

$$\begin{aligned} K_4 &= b_1 x_1 (x_2^2 - x_3^2) + b_2 x_2 (x_3^2 - x_1^2) + b_3 x_3 (x_1^2 - x_2^2) = 0, \\ K_1 &= b_2 x_2 (x_3^2 - x_4^2) + b_3 x_3 (x_4^2 - x_2^2) + b_4 x_4 (x_2^2 - x_3^2) = 0, \end{aligned}$$

mit den Spitzen A_4 und A_1 und der gemeinschaftlichen Erzeugenden $A_1 A_4$ ($x_2 = 0, x_3 = 0$) und Tangentialebene $b_2 x_2 - b_3 x_3 = 0$. Daraus folgt, daß $A_1 A_4$ von der Schnittkurve 9. Ordnung zweimal in Abzug kommt und daß die residuale Schnittkurve der beiden Kegel von der 7. Ordnung ist, und daß diese die in T invariante Kurve auf K ist. Diese Kurve C_7 geht einfach durch A_1 und A_4 , und da irgend zwei Ecken A_i und A_k durch Elimination zwei solche Kegel geben, auch durch A_2 und A_3 . Die invarianten Punkte von T , $(1, 1, 1, 1)$; $(-1, 1, 1, 1)$; $(1, -1, 1, 1)$; $(1, 1, -1, 1)$; $(1, 1, 1, -1)$; $(-1, -1, 1, 1)$; $(-1, 1, -1, 1)$; $(-1, 1, 1, -1)$; liegen natürlich auch auf K und folglich auf C_7 . Es ist weiter leicht zu beweisen, daß C_7 jede Kante $A_i A_k$ außer in A_i und A_k noch in einem dritten Punkte P_{ik} schneidet und auch durch O' geht.

3. Das Geschlecht von C_7 kann man wie folgt bestimmen. Von einem allgemeinen Punkte P projiziere man C_7 auf K_1 , wobei eine residuale Kurve C_{14} der Ordnung $3 \cdot 7 - 7 = 14$ herauskommt. K_4 schneidet C_{14} in $3 \cdot 14 - 6 = 36$ Punkten, weil C_7 beide, K_1 und K_4 der Linie $A_i A_4$ in drei Punkten berührt. Der Polarkegel von P in bezug auf K_1 schneidet C_7 außerhalb A_1 in 12 Punkten, was $36 - 12 = 24$ eigentliche Schnittpunkte übrig läßt. Diese gruppieren sich in 12 Paare entsprechender Punkte die von P in 12 Doppelpunkte der Projektionskurve C'_7 von C_7 auf eine beliebige Projektionsebene projiziert werden. Das Geschlecht von C'_7 und folglich von C_7 ist somit $\frac{6 \cdot 5}{2} - 12 = 3$. Wegen der Wichtigkeit dieser Kurve soll sie noch auf eine zweite Art abgeleitet werden. Einem Büschel von Ebenen entspricht in T ein dazu projektivisches Büschel von kubischen Flächen F_3 (Cayley), die in den A_i Doppelpunkte haben. Ihr Erzeugnis ist eine in T invariante Fläche F_4 der 4. Ordnung. Sei OO' die Axe des Ebenenbüschels. Die zu einer Ebene des Büschels durch A_i entsprechende F_3 schneidet diese Ebene in OO' , OA_i und $O'A_i$, folglich enthält F_4 die fünf Geraden OO' , OA_1 , OA_2 , OA_3 , OA_4 , so daß der Schnitt von F_4 mit K eine residuale C_7 enthält. Daß diese mit der obigen identisch ist, geht sofort daraus hervor, daß irgend eine Ebene des Büschels K außer OO' in zwei Erzeugenden schneidet, welche jede zwei entsprechende Punkte in T enthalten, durch welche auch die invariante kubische Kurve in dieser Ebene geht.

4. Jedes Paar entsprechender Punkte $P'_i P'_i$ auf K bestimmt eine Δ_{18} Konfiguration vollständig mit acht Paaren, deren Verbindungslinien alle durch O gehen, und folglich auf C_7 liegen. Daraus folgt der

Satz 4. *Auf jedem Kegel des kubischen geraden Komplexes, der zu der involutorischen kubischen Transformation T gehört, liegt eine in T invariante Kurve 7. Ordnung C_7 vom Geschlecht 3. Auf ihr gibt es $\infty^1 \Delta_{18}$ Konfigurationen, so daß also in jeder die 16 Punkte achtmal zu zweien auf Geraden durch jeden der vier Ecken A_i und die Spitze des Komplexkegels K liegen.*

5. Zum Schlusse soll erwähnt werden, daß diese Untersuchungen auf irgend einen projektiven S_r ausgedehnt werden können mit Resultaten, die den obigen analog sind.

(Eingegangen den 29. Juli 1938.)