Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Über eine besondere Klasse von involutorischen Cremona-Transformationen und die darin invarianten algebraischen Kurven.

Autor: Emch, Arnold

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11876

Über eine besondere Klasse von involutorischen Cremona-Transformationen und die darin invarianten algebraischen Kurven

Von ARNOLD EMCH, Urbana, Illinois (U. S. A.)

§ 1. Einleitung

In frühern Arbeiten[1]) untersuchte ich involutorische Cremona-Transformationen, die sich wie folgt ergeben: Man betrachte in einem projektiven Überraume S_r von r Dimensionen r Hyperkegel $(a_i\,\lambda_i)^2 = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, worin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ die Parameter sind, welche die einhüllenden Tangentialhyperebenen bestimmen. Für jedes Wertsystem derselben schneiden sich die r zugehörigen Hyperebenen in einem bestimmten Punkt (x) von S_r. Von (x) lassen sich eindeutig r weitere Hypertangentialebenen an die Hyperkegel legen, deren Parameter $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_r$ durch die λ eindeutig bestimmt sind und daher rationale Funktionen der λ sind. Man hat

$$\varrho\lambda'_1 = \Phi_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \ldots, \varrho\lambda'_r = \Phi_r(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) .$$

Umgekehrt folgt sofort

$$\sigma\lambda_1 = \Phi_1(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_r), \ldots, \sigma\lambda_r = \Phi_r(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_r) .$$

Deutet man die λ und λ' als Koordinaten in den projektiven Überräumen S_r^λ und $S_r^{\lambda'}$ so besteht also zwischen ihnen eine involutorische Cremona-Transformation, deren Ordnung und Fundamentalelemente bestimmt wurden. Als Beispiele wurden die Fälle der Ebene und des gewöhnlichen Raumes behandelt.

Betrachtet man zwei bestimmte entsprechende Wertsysteme $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$; $(\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_r)$, so geht aus der Konstruktion hervor, daß auch

$$(\lambda'_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda'_s, \lambda'_{s+1}, \ldots, \lambda_{r-1}, \lambda_r) ,$$
$$(\lambda_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_k, \ldots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda'_{r-1}, \lambda'_r) ,$$

entsprechende Wertsysteme oder Punkte der Transformation sein müssen. Irgend eine Anzahl Transpositionen (λ_i, λ'_i) zwischen den zwei Zeilen

---

[1]) Geometrische Anwendungen der binären (n, n)-Verwandtschaft, Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 4, 1932, pp. 65—73.

On involutorial Cremonatransformations in S_r, Vol. 37, 1933, pp. 100—109. The Tohoku Mathematical Journal.

führt zu zwei entsprechenden Punkten. Es wäre interessant wenn notwendige und hinreichende Kriterien für Transformationen dieser Art überhaupt aufgestellt werden könnten.

Daß noch andere Transformationen dieser Art existieren können, geht aus dem einfachen Beispiel

$$T_r \equiv \varrho x_i = \frac{1}{x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

hervor.

Es ist der Zweck dieser Arbeit, die Folgerungen aus der erwähnten Eigenschaft für die Transformationen T_2 und T_3 zu ziehen. Daraus ergeben sich dann neue Eigenschaften für die ebene elliptische Kurve dritter Ordnung und einer Raumkurve 7. Ordnung vom Geschlecht 3.

§ 2. Die Δ_8-Konfiguration und die elliptische Kurve 3. Ordnung

1. Sei $\varrho x_i' = \dfrac{1}{x_i}$, $i = 1, 2, 3$ eine involutorische quadratische Transformation T_2, deren Fundamentalpunkte $A_1(1, 0, 0)$; $A_2(0, 1, 0)$; $A_3(0, 0, 1)$, und die invarianten Punkte $B(1, 1, 1)$; $B_1(-1, 1, 1)$; $B_2(1, -1, 1)$; $B_3(1, 1, -1)$ sind. Nun führe man die oben angegebenen acht möglichen Permutationen aus, dann erhält man die vier Paare von entsprechenden Punkten P_i, P_i':

$$\begin{array}{ll} P_1(a_1, \; a_2, \; a_3); & P_2(a_2 a_3, a_2, \; a_3) \\ P_1'(a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2); & P_2'(a_1, \; a_3 a_1, a_1 a_2) \\ & \\ P_3(a_1, \; a_3 a_1, a_3); & P_4(a_1, \; a_2, \; a_1 a_2) \\ P_3'(a_2 a_3, a_2, \; a_1 a_2); & P_4'(a_2 a_3, a_3 a_1, a_3). \end{array} \tag{1}$$

Man kann das sofort bestätigen. Zum Beispiel, der P_3 entsprechende Punkt ist $\left(\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_3 a_1}, \dfrac{1}{a_3}\right) \equiv (a_2 a_3, a_2, a_1 a_2) = P_3'$. Es ergibt sich weiter, daß die Verbindungslinien gewisser Punktepaare in der in folgender Tabelle angegebenen Weise in den Punkten A_1, A_2, A_3 zusammenlaufen:

$$A_1 \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_2 \\ P_1' P_2' \\ P_3 P_4' \\ P_3' P_4 \end{array} \right. , \qquad A_2 \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_3 \\ P_1' P_3' \\ P_2 P_4' \\ P_2' P_4 \end{array} \right. , \qquad A_3 \left\{ \begin{array}{l} P_1 P_4 \\ P_1' P_4' \\ P_2 P_3' \\ P_2' P_3 \end{array} \right. . \tag{2}$$

Addiert man die Koordinaten entsprechender Punkte in derselben Reihenfolge, so erhält man den Punkt $O(a_1+a_2a_3, a_2+a_3a_1, a_3+a_1a_2)$, so daß also die Verbindungslinien entsprechender Punkte P_iP_i' von (1) durch O gehen. Die Konfiguration der acht Punkte von (1) sei mit $\varDelta_8$ bezeichnet. Man hat also

Satz 1. *Die acht Punkte der Konfiguration $\varDelta_8$ liegen zu zweien auf vier Geraden durch jeden der drei Punkte A_1, A_2, A_3. Die Verbindungsgeraden der vier Punktepaare entsprechender Punkte gehen durch einen Punkt O.*

2. Nun sind bekanntlich die Kurven C_3 dritter Ordnung des Netzes auf den sieben Punkten (A_i) und (B_i) invariant in T_2. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte auf jeder C_3 gehen alle durch einen festen Punkt O von C_3, den sogenannten isologen Punkt von C_3. Man betrachte eine bestimmte elliptische C_3 des Netzes und ihren isologen Punkt O. Sei s eine beliebige Sekante durch O, welche C_3 in einem Paare P_i, P_i' entsprechender Punkte schneidet. Umgekehrt bestimmt ein solches Paar die C_3 eindeutig. Konstruiert man die zu diesem Paare gehörige Konfiguration $\varDelta_8$, so ist klar, daß alle Punktepaare P_iP_i' von $\varDelta_8$ auf C_3 liegen. Folglich liegt jede auf irgend einem Paar entsprechender Punkte von C_3 aufgebauten $\varDelta_8$ auf C_3.

Es ist weiter bekannt, daß $BB_1B_2B_3$ ein Steinersches Quadrupel auf C_3 und $A_1A_2A_3$ sein Diagonaldreieck ist. Solcher Quadrupel gibt es ∞^1 und folglich ebensoviele Diagonaldreiecke. Folglich

Satz 2. *Auf jeder elliptischen Kurve dritter Ordnung gibt es ∞^1 Steinersche Quadrupel mit ebensovielen zugehörigen Diagonaldreiecken $A_1A_2A_3$. Verbunden mit jedem solchen Dreieck sind ∞^1 $\varDelta_8$ — Konfigurationen die alle auf derselben C_3 liegen, so daß also jedesmal die acht Punkte zu zweien auf vier Geraden durch jeden der Punkte A_1, A_2, A_3 gehen und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte jeder $\varDelta_8$ durch den isologen Punkt O der C_3 laufen.*

§ 3. Die $\varDelta_{16}$-Konfiguration und eine Raumkurve 7. Ordnung vom Geschlecht 3

1. Man betrachte die kubische Transformation T in S_3,

$$\varrho x_i' = \frac{1}{x_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4 .$$

Sei $P_1(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ein beliebiger Punkt, dann ist sein entsprechender $P_1'(a_2a_3a_4, a_1a_3a_2, a_1a_2a_4, a_1a_2a_3)$. Irgend eine Anzahl Transpositionen zwischen Paaren vertikal untereinander stehenden Koordinaten des Punktepaares $P_1 P_1'$, z. B.

$$\begin{array}{llllll} P_6(a_2a_3a_4, & a_1a_3a_4, & a_3 & , & a_4), \\ P_6'(\ a_1 & . \quad a_2 & , a_1a_2a_4, & & a_1a_2a_3), \end{array}$$

gibt wieder ein Paar entsprechender Punkte. Der inverse Punkt von P_6 ist

$$\left(\frac{1}{a_2 a_3 a_4}, \frac{1}{a_1 a_3 a_4}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}\right).$$

Multipliziert man mit $a_1a_2a_3a_4$, so ergibt sich P_6', w. z. w. In ähnlicher Weise ist P_6' der inverse Punkt von P_6. Werden alle möglichen $2^4 = 16$ Reihen von Transpositionen ausgeführt, so ergeben sich 8 Paare entsprechender Punkte $P_i P_i' \equiv P_i' P_i$, welche eine Konfiguration Δ_{16} bilden:

$$\begin{array}{ll}
P_1(\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\ ); & P_5(\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_1a_2a_3), \\
P_1'(a_2a_3a_4, a_1a_3a_4, a_1a_2a_4, a_1a_2a_3); & P_5'(a_2a_3a_4, a_1a_3a_4, a_1a_2a_4,\ a_4\ ), \\[1ex]
P_2(a_2a_3a_4,\ a_2,\ a_3,\ a_4\ ); & P_6(a_2a_3a_4, a_1a_3a_4,\ a_3,\ a_4\ ), \\
P_2'(\ a_1, a_1a_3a_4, a_1a_2a_4, a_1a_2a_3); & P_6'(\ a_1,\ a_2, a_1a_2a_4, a_1a_2a_3), \\[1ex]
P_3(\ a_1, a_1a_3a_4,\ a_3,\ a_4\ ); & P_7(a_2a_3a_4,\ a_2, a_1a_2a_4,\ a_4\ ), \\
P_3'(a_2a_3a_4,\ a_2, a_1a_2a_4, a_1a_2a_3); & P_7'(\ a_1, a_1a_3a_4,\ a_3, a_1a_2a_3), \\[1ex]
P_4(\ a_1,\ a_2, a_1a_2a_4,\ a_4\ ); & P_8(a_2a_3a_4,\ a_2,\ a_3, a_1a_2a_3), \\
P_4'(a_2a_3a_4, a_1a_3a_4,\ a_3, a_1a_2a_3); & P_8'(\ a_1, a_1a_3a_4, a_1a_3a_4,\ a_4\ ).
\end{array}$$

Die 16 Punkte können in Paare gruppiert werden. Verbindungsgeraden durch die Punkte $A_1(1, 0, 0, 0)$; $A_2(0, 1, 0, 0)$; $A_3(0, 0, 1, 0)$; $A_4(0, 0, 0, 1)$ gehen, wie leicht folgt und wie in folgender Tabelle angegeben ist:

$$A_1 \left\{ \begin{array}{l} P_1\ P_2 \\ P_1'\ P_2' \\ P_3\ P_6 \\ P_3'\ P_6' \\ P_4\ P_7 \\ P_4'\ P_7' \\ P_5\ P_8 \\ P_5'\ P_8' \end{array} \right. \qquad
A_2 \left\{ \begin{array}{l} P_1\ P_3 \\ P_1'\ P_3' \\ P_2\ P_6 \\ P_2'\ P_6' \\ P_4\ P_8' \\ P_4'\ P_8 \\ P_5\ P_7' \\ P_5'\ P_7 \end{array} \right. \qquad
A_3 \left\{ \begin{array}{l} P_1\ P_5 \\ P_1'\ P_5' \\ P_2\ P_8 \\ P_2'\ P_8' \\ P_3\ P_7' \\ P_3'\ P_7 \\ P_4\ P_6' \\ P_4'\ P_6 \end{array} \right. \qquad
A_4 \left\{ \begin{array}{l} P_1\ P_4 \\ P_1'\ P_4' \\ P_2\ P_7 \\ P_2'\ P_7' \\ P_3\ P_8' \\ P_3'\ P_8 \\ P_5\ P_6' \\ P_5'\ P_6 . \end{array} \right.$$

Eine Linie A_iP_i wird durch T in die Linie A_iP_i' transformiert, so daß also die acht durch jeden A_i gehenden Linien als Gruppe invariant sind. P_1P_2, P_3P_6 durch A_1, und P_1P_3, P_2P_6 bilden zusammen ein Vierseit in der Ebene $a_4x_3 - a_3x_4 = 0$; $P_1'P_2'$, P_3P_6' durch A_1, und $P_1'P_3'$, $P_2'P_6'$ ein Vierseit in der konjugierten Ebene $a_3x_3 - a_4x_4 = 0$. In ähnlicher Weise bilden P_4P_7, $P_5'P_8'$ durch A_1, und P_4P_8', $P_5'P_7$ durch A_2 Vierseite in konjugierten Ebenen durch A_1A_2. Die Verbindungslinie irgend eines Paares P_iP_i', z. B. $P_7(a_2a_3a_4,\ a_2,\ a_1a_2a_4,\ a_4)$, $P_7'(a_1,\ a_1a_3a_4,\ a_3,\ a_1a_2a_3)$, geht, wie leicht ersichtlich durch den festen Punkt $O(a_1+a_2a_3a_4,\ a_2+a_1a_3a_4,\ a_3+a_1a_2a_4,\ a_4+a_1a_2a_3)$.

Zusammenfassend hat man den

Satz 3. *Die acht Linien durch jede von zwei der vier Ecken A_i bilden vier Vierseite in zwei Paaren von konjugierten Ebenen durch die zwei Ecken. Die Punkte der Δ_{18} liegen zu zweien auf acht Linien durch jede der vier Ecken A_i. Die Verbindungslinie entsprechender Punkte der Δ_{18} gehen alle durch einen festen Punkt O.*

2. Bekanntlich bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte P_i, P_i' von T einen kubischen Geradenkomplex mit der Gleichung

$$P_{12}P_{13}P_{23} + P_{12}P_{14}P_{42} + P_{13}P_{14}P_{34} + P_{23}P_{42}P_{34} = 0 \;.$$

Sei $O(b_1b_2b_3b_4)$ die Spitze eines kubischen Komplexkegels K, dann hat dieser die Gleichung

$$(b_1x_2-b_2x_1)(b_1x_3-b_3x_1)(b_2x_3-b_3x_2)+(b_1x_2-b_2x_1)(b_1x_4-b_4x_1)(b_4x_2-b_2x_4)+$$
$$(b_1x_3-b_3x_1)(b_1x_4-b_4x_1)(b_3x_4-b_4x_3)+(b_2x_3-b_3x_2)(b_4x_2-b_2x_4)(b_3x_4-b_4x_3)=0.$$

Auf jeder Erzeugenden g von K liegen zwei entsprechende Punkte P_i, P_i' von T. Ist O' der O entsprechende Punkt, so ist auch $O'O$ eine Erzeugende von K. Ferner sind auch OA_i, $i = 1, 2, 3, 4$, solche. Es handelt sich jetzt darum, den Ort entsprechender Punkte P_i, P_i' auf K zu bestimmen. Die Verbindungsgerade zweier entsprechender Punkte $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $P'(x_2x_3x_4, x_1x_3x_4, x_1x_2x_4, x_1x_2x_3)$ geht durch $O(b_1, b_2, b_3, b_4)$, wenn

$$\begin{aligned}\lambda x_1 + \mu x_2x_3x_4 &= b_1,\\ \lambda x_2 + \mu x_1x_3x_4 &= b_2,\\ \lambda x_3 + \mu x_1x_2x_4 &= b_3,\\ \lambda x_4 + \mu x_1x_2x_3 &= b_4.\end{aligned}$$

Eliminiert man λ und μ aus den drei ersten dieser Gleichungen und dann aus den drei letzten, so ergeben sich die kubischen Kegel

$$K_4 = b_1x_1(x_2^2 - x_3^2) + b_2x_2(x_3^2 - x_1^2) + b_3x_3(x_1^2 - x_2^2) = 0,$$
$$K_1 = b_2x_2(x_3^2 - x_4^2) + b_3x_3(x_4^2 - x_2^2) + b_4x_4(x_2^2 - x_3^2) = 0,$$

mit den Spitzen A_4 und A_1 und der gemeinschaftlichen Erzeugenden $A_1A_4(x_2 = 0, x_3 = 0)$ und Tangentialebene $b_2x_2 - b_3x_3 = 0$. Daraus folgt, daß A_1A_4 von der Schnittkurve 9. Ordnung zweimal in Abzug kommt und daß die residuale Schnittkurve der beiden Kegel von der 7. Ordnung ist, und daß diese die in T invariante Kurve auf K ist. Diese Kurve C_7 geht einfach durch A_1 und A_4, und da irgend zwei Ecken A_i und A_k durch Elimination zwei solche Kegel geben, auch durch A_2 und A_3. Die invarianten Punkte von T, (1, 1, 1, 1); (—1, 1, 1, 1); (1, —1, 1, 1); (1, 1, —1, 1); (1, 1, 1, —1); (—1, —1, 1, 1); (—1, 1, —1, 1); (—1, 1, 1, —1); liegen natürlich auch auf K und folglich auf C_7. Es ist weiter leicht zu beweisen, daß C_7 jede Kante A_iA_k außer in A_i und A_k noch in einem dritten Punkte P_{ik} schneidet und auch durch O' geht.

3. Das Geschlecht von C_7 kann man wie folgt bestimmen. Von einem allgemeinen Punkte P projiziere man C_7 auf K_1, wobei eine residuale Kurve C_{14} der Ordnung $3.7 - 7 = 14$ herauskommt. K_4 schneidet C_{14} in $3.14 - 6 = 36$ Punkten, weil C_7 beide, K_1 und K_4 der Linie A_iA_4 in drei Punkten berührt. Der Polarkegel von P in bezug auf K_1 schneidet C_7 außerhalb A_1 in 12 Punkten, was $36 - 12 = 24$ eigentliche Schnittpunkte übrig läßt. Diese gruppieren sich in 12 Paare entsprechender Punkte die von P in 12 Doppelpunkte der Projektionskurve C_7' von C_7 auf eine beliebige Projektionsebene projiziert werden. Das Geschlecht von C_7' und folglich von C_7 ist somit $\frac{6 \cdot 5}{2} - 12 = 3$. Wegen der Wichtigkeit dieser Kurve soll sie noch auf eine zweite Art abgeleitet werden. Einem Büschel von Ebenen entspricht in T ein dazu projektivisches Büschel von kubischen Flächen F_3 (Cayley), die in den A_i Doppelpunkte haben. Ihr Erzeugnis ist eine in T invariante Fläche F_4 der 4. Ordnung. Sei OO' die Axe des Ebenenbüschels. Die zu einer Ebene des Büschels durch A_i entsprechende F_3 schneidet diese Ebene in OO', OA_i und $O'A_i$, folglich enthält F_4 die fünf Geraden OO', OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, so daß der Schnitt von F_4 mit K eine residuale C_7 enthält. Daß diese mit der obigen identisch ist, geht sofort daraus hervor, daß irgend eine Ebene des Büschels K außer OO' in zwei Erzeugenden schneidet, welche jede zwei entsprechende Punkte in T enthalten, durch welche auch die invariante kubische Kurve in dieser Ebene geht.

4. Jedes Paar entsprechender Punkte $P_i' \, P_i'$ auf K bestimmt eine Δ_{18} Konfiguration vollständig mit acht Paaren, deren Verbindungslinien alle durch O gehen, und folglich auf C_7 liegen. Daraus folgt der

Satz 4. *Auf jedem Kegel des kubischen geraden Komplexes, der zu der involutorischen kubischen Transformation T gehört, liegt eine in T invariante Kurve 7. Ordnung C_7 vom Geschlecht 3. Auf ihr gibt es ∞^1 Δ_{16} Konfigurationen, so daß also in jeder die 16 Punkte achtmal zu zweien auf Geraden durch jeden der vier Ecken A_i und die Spitze des Komplexkegels K liegen.*

5. Zum Schlusse soll erwähnt werden, daß diese Untersuchungen auf irgend einen projektiven S_r ausgedehnt werden können mit Resultaten, die den obigen analog sind.

(Eingegangen den 29. Juli 1938.)