

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 11 (1938-1939)

**Artikel:** Interpolationsverfahren zur Integrationsmethode von Meißner.  
**Autor:** Völlm, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-11895>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Interpolationsverfahren zur Integrationsmethode von Meißner

Von E. VÖLLM, Zürich

## 1. Einleitung.

Der Integrationsmethode von Meißner für gewöhnliche Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung liegt die Deutung einer Funktion  $p = p(u)$  als Stützfunktion einer Kurve zugrunde<sup>1)</sup>. Ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung

$$p'' = f(u, p, p') \quad (1)$$

gegeben, so läßt sich das Linienbild der Lösung zu gegebenen Anfangswerten dank der einfachen Beziehung

$$\varrho(u) = p(u) + p''(u) \text{ }^2) \quad (2)$$

für den Krümmungsradius  $\varrho(u)$  leicht durch Kreisbögen annähern. Die Methode gibt eine Näherung 2. Ordnung für  $p(u)$  und 1. Ordnung für  $p'(u)$ . Das von Meißner angegebene Interpolationsverfahren verbessert die Genauigkeit wesentlich, ohne jedoch die Ordnung der Annäherung zu erhöhen. Im folgenden wird eine Modifikation des Interpolationsverfahrens geschildert, die den Grad der Annäherung je um 1 erhöht, also 3. Ordnung für  $p$  und 2. Ordnung für  $p'$  ist. Beispiele zeigen, daß das abgeänderte Verfahren bei unerheblich größerer Zeichenarbeit höhere Genauigkeit oder aber gleiche Genauigkeit bei geringerem Arbeitsaufwand ergibt.

## 2. Herleitung des Interpolationsverfahrens.

In einer Funktion  $p = p(u)$  wird die Unabhängige  $u$  aufgefaßt als Winkel eines Strahles mit der Nullrichtung  $0x$  (Fig. 1), der Funktionswert als Entfernung  $0Q$  eines Lotes  $g(u)$  zu diesem Strahl vom Nullpunkt  $0$ .  $g(u)$  umhüllt eine Kurve  $C$ , das *Linienbild* der Funktion  $p(u)$ .

---

<sup>1)</sup> Meißner, E., Über die Integration von totalen Differentialgleichungen. Erschienen in der Schweiz. Bauzeitung, Bd. 62 (1913), Nr. 15 und 16, oder

Meißner, E., Graphische Analysis vermitteltst des Linienbildes einer Funktion. Verlag Schweiz. Bauzeitung, in Kommission bei Rascher & Cie., 1932. Die folgenden Hinweise beziehen sich auf letztere Publikation.

<sup>2)</sup> Meißner, a. a. O., Seite 9.

Die Funktion heißt *Stützfunktion* von  $C$ . Ist  $P$  der Berührungspunkt der Geraden  $g(u)$  mit dem Linienbild, so ergibt sich der Krümmungsradius  $PP' = \varrho$  aus (2) <sup>3)</sup>.

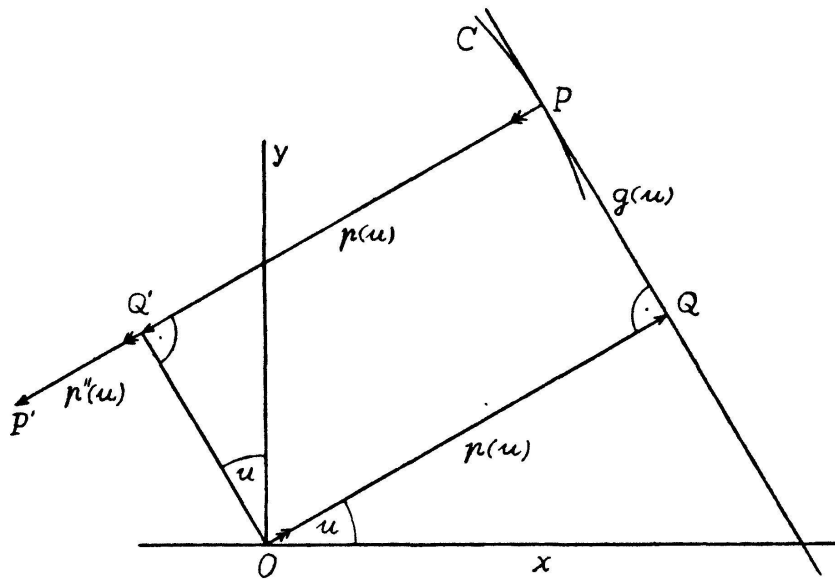


Fig. 1

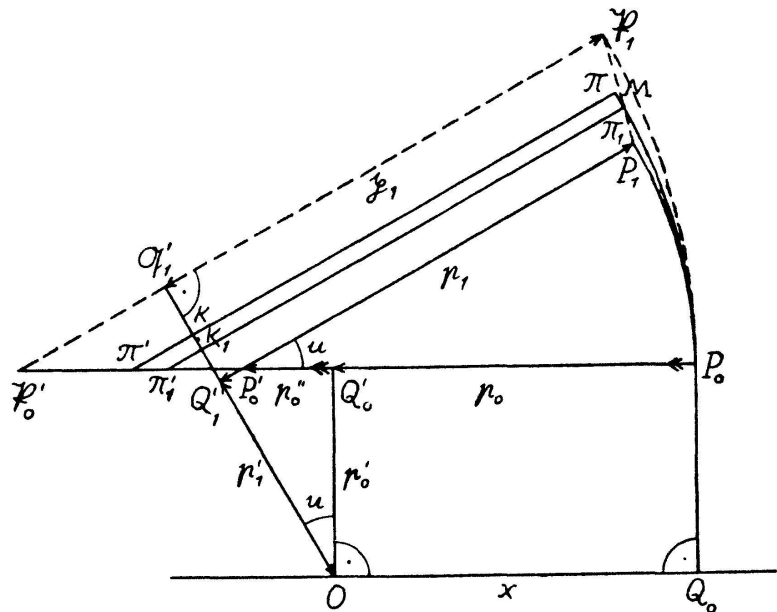


Fig. 2

Ist die Differentialgleichung (1) zu integrieren mit den Anfangswerten  $p(0) = p_0, p'(0) = p'_0$ , so hat das Integral ein Linienbild (Fig. 2) mit dem Anfangspunkt  $P_0$ , dessen Koordinaten  $x = p_0, y = p'_0$  sind. Nach (1) und (2) ist der Krümmungsradius hier

$$\varrho_0 = p_0 + f(0, p_0, p'_0)$$

und der Krümmungsmittelpunkt  $P'_0$  hat die Koordinaten  $x = -f(0, p_0, p'_0) = -p''_0, y = p'_0$ . Von diesem Kreis nehmen wir einen Bogen von

<sup>3)</sup> Für die Beweise und Einzelheiten, insbesondere bezüglich der Vorzeichendeutung, siehe die zitierte 2. Publikation.

willkürlichem Zentriwinkel  $u$  als Näherung des Linienbildes von  $p(u)$ . Bezeichnen wir mit  $P_1$  seinen Endpunkt und mit  $Q'_1$  den Fußpunkt des Lotes von  $O$  auf den Radius  $P'_0P_1$ , so sind  $P_1Q'_1 = p_1$  und  $OQ'_1 = p'_1$  Näherungswerte für  $p(u)$  und  $p'(u)$ . Ihnen entspricht ein neuer, der Differentialgleichung entnommener Wert

$$p''_1 = f(u, p_1, p'_1).$$

Zeichnen wir jetzt mit  $P_0 \mathfrak{P}'_0 = p_1 + p''_1 = \varrho_1$  als Radius und  $\mathfrak{P}'_0$  als Mittelpunkt einen zweiten Kreisbogen vom Zentriwinkel  $u$ , so erreichen wir einen Punkt  $\mathfrak{P}_1$ . Ist  $\Omega'_1$  der Fußpunkt des Lotes von  $O$  auf  $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}'_0$ , so können  $p_1 = \mathfrak{P}_1 \Omega'_1$  und  $p'_1 = O \Omega'_1$  als andere Näherungswerte für  $p(u)$  und  $p'(u)$  gelten. Für die vier erwähnten Näherungswerte findet man an Hand der Fig. 2 folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} p_1 = P_1 Q'_1 &= P_1 P'_0 + P'_0 Q'_1 = p_0 + p''_0 + p'_0 \sin u - p''_0 \cos u \\ &= p_0 + p'_0 \sin u + p''_0 (1 - \cos u) \end{aligned} \quad (3)$$

$$p'_1 = O Q'_1 = p'_0 \cos u + p''_0 \sin u \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p_1 = \mathfrak{P}_1 \Omega'_1 &= \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}'_0 + \mathfrak{P}'_0 \Omega'_1 = p_1 + p''_1 - Q'_0 \mathfrak{P}'_0 \cos u + p'_0 \sin u \\ &= p_1 + p''_1 - (p_1 + p''_1 - p_0) \cos u + p'_0 \sin u \\ &= p_0 \cos u + p'_0 \sin u + p_1 (1 - \cos u) + p''_1 (1 - \cos u) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p'_1 = p'_0 \cos u + Q'_0 \mathfrak{P}'_0 \sin u &= p'_0 \cos u + (p_1 + p''_1 - p_0) \sin u \\ &= p'_0 \cos u + (p_1 - p_0) \sin u + p''_1 \sin u \end{aligned} \quad (6)$$

Um die Ordnung der mit diesen Werten erzielten Annäherung beurteilen zu können, wollen wir sie nach Potenzen der Unabhängigen  $u$  entwickeln und die Ergebnisse mit der Entwicklung des genauen Wertes  $p(u)$  vergleichen. Für die beiden ersten Größen erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + p'_0 \left( u - \frac{u^3}{6} \dots \right) + p''_0 \left( \frac{u^2}{2} \dots \right) \\ &= p_0 + p'_0 u + p''_0 \frac{u^2}{2} - p'_0 \frac{u^3}{6} \dots \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} p'_1 &= p'_0 \left( 1 - \frac{u^2}{2} \dots \right) + p''_0 (u - \dots) \\ &= p'_0 + p''_0 u - p'_0 \cdot \frac{u^2}{2} - \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Um auch  $p_1$  und  $p'_1$  bis zur 3. bzw. 2. Ordnung zu entwickeln, betrachten wir zunächst

$$p''_1 = f(u, p_1, p'_1)$$

und setzen voraus, daß die Funktion  $f$  in der Umgebung des Tripels  $(0, p_0, p'_0)$  nach Taylor entwickelbar sei. Da  $p''_1$  in (5) mit  $(1 - \cos u)$  und in (6) mit  $\sin u$  multipliziert erscheint, wird es genügen,  $f$  bis zur 1. Ordnung zu entwickeln, um für  $p_1$  und  $p'_1$  die gewünschte Ordnung zu erhalten.

Mit den Abkürzungen

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u \quad \frac{\partial f}{\partial p} = f_p \quad \frac{\partial f}{\partial p'} = f_{p'} ,$$

wobei alle Werte der Ableitungen für das Tripel  $(0, p'_0, p''_0)$  zu nehmen sind, und unter Berücksichtigung von

$$f(0, p_0, p'_0) = p''_0$$

erhalten wir:

$$p''_1 = p''_0 + f_u \cdot u + f_p(p_1 - p_0) + f_{p'}(p'_1 - p'_0) + \dots$$

oder, nach Verwertung von (7) und (8) bis zur 1. Ordnung:

$$p''_1 = p''_0 + (f_u + f_p p'_0 + f_{p'} \cdot p''_0) u + \dots$$

Aus der Differentialgleichung (1) folgt aber, daß

$$f_u + f_p \cdot p'_0 + f_{p'} p''_0 = p'''(0) = p'''_0$$

so daß

$$p''_1 = p''_0 + p'''_0 \cdot u + \dots$$

ist. Mit diesem Ergebnis und (7) ergibt sich aus (5) die Entwicklung

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 \left(1 - \frac{u^2}{2} \dots\right) + p'_0 \left(u - \frac{u^3}{6} \dots\right) + (p_0 + p'_0 u \dots) \left(\frac{u^2}{2} \dots\right) + \\ &\quad + (p''_0 + p'''_0 u + \dots) \left(\frac{u^2}{2} \dots\right) \\ &= p_0 + p'_0 \cdot u + p''_0 \cdot \frac{u^2}{2} + (2p'_0 + 3p'''_0) \frac{u^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

und aus (6) die Entwicklung

$$\begin{aligned} p'_1 &= p'_0 \left(1 - \frac{u^2}{2} \dots\right) + (p'_0 u + \dots) (u + \dots) + (p''_0 + p'''_0 u) (u + \dots) \\ &= p'_0 + p''_0 u + (p'_0 + 2p'''_0) \frac{u^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Nach (7) und (9) stimmen sowohl  $p_1$  als auch  $p_1$  mit dem genauen Wert

$$p(u) = p_0 + p_0' u + p_0'' \frac{u^2}{2} + p_0''' \cdot \frac{u^3}{6} + \dots$$

bis zur 2. Ordnung überein, während das folgende *gewogene Mittel*

$$\frac{2p_1 + p_1}{3} = p_0 + p_0' u + p_0'' \frac{u^2}{2} + \left( \frac{-2p_0' + 2p_0' + 3p_0'''}{3} \right) \frac{u^3}{6} + \dots$$

eine Näherung 3. Ordnung ist.

Entsprechend sind nach (8) und (10)  $p_1'$  und  $p_1'$  Näherungen 1. Ordnung für den genauen Wert

$$p'(u) = p_0' + p_0'' u + p_0''' \frac{u^2}{2}$$

während der Mittelwert

$$\frac{p_1' + p_1'}{2} = p_0' + p_0'' u + \left( \frac{-p_0' + p_0' + 2p_0'''}{2} \right) \frac{u^2}{2}$$

bis zur 2. Ordnung richtig ist.

Sind in Fig. 2  $\pi_1'$  und  $\pi'$  die Punkte, welche die Strecke  $P_0'P_1'$  im Verhältnis 1:2 bzw. 1:1 teilen und  $\kappa_1\pi_1$  das zwischen  $OQ_1'$  und  $P_1P_1$  liegende Stück der Parallelen zu  $P_0'P_1$  durch  $\pi_1'$ , dann ist

$$\kappa_1\pi_1 = \frac{2p_1 + p_1}{3} \quad \text{und} \quad \pi_1'P_0 = \pi_1'\pi_1 = \frac{2\varrho_0 + \varrho_1}{3} .$$

Die durch  $\pi'$  gehende Parallele zu  $P_0'P_1$  hat von  $O$  den Abstand

$$O\kappa = \frac{p_1' + p_1'}{2} .$$

Ist  $\pi$  die Projektion von  $\pi_1$  auf diese Parallele, so wird  $\kappa\pi = \kappa_1\pi_1$ . Zusammenfassend erhalten wir also folgende

**Konstruktion:** Mit dem Radius  $\varrho_0 = p_0 + f(0, p_0, p_0')$  und Mittelpunkt  $P_0'$  zeichne man den Probebogen  $P_0'P_1$  von willkürlichem Zentriwinkel  $u$ . Aus den abgelesenen Näherungswerten  $p_1$  und  $p_1'$  ergibt die Differentialgleichung einen neuen Radius  $\varrho_1 = p_0 + f(u, p_1, p_1')$ , dem

ein Krümmungsmittelpunkt  $\mathfrak{P}'_0$  entspräche. Jetzt teile man  $P'_0 \mathfrak{P}'_0$  im Verhältnis 1 : 2, mache  $\pi'_1 \pi_1 = \pi'_1 P_0$  und parallel zu  $P'_0 P_1$  und projiziere endlich  $\pi_1$  auf die durch den Mittelpunkt  $\pi'$  von  $P'_0 \mathfrak{P}'_0$  gehende Parallele zu  $P'_0 P_1$  nach  $\pi$ . Die Gerade  $\pi \pi_1$  mit Berührungspunkt  $\pi$  ist dann ein Element des gesuchten Linienbildes von  $p$ , und zwar näherungsweise 3. Ordnung für  $p$  und 2. Ordnung für  $p'$ . Schließen wir mit der Bemerkung, daß nach dem Verfahren von Meißner in Fig. 2 an Stelle von  $\pi$  der Punkt  $M$  treten würde.

### 3. Kontrollbeispiel.

Die Güte der Methode wurde an derselben Differentialgleichung von bekannter Lösung erprobt wie bei Meißner<sup>4)</sup>, nämlich an der Gleichung

$$p''(u) = p(u).$$

Mit den Anfangswerten  $p(0) = p'(0) = A$  besitzt sie die Lösung  $p(u) = A \cdot e^u$ . Der Krümmungsradius des Linienbildes wird gemäß (2)  $\varrho(u) = p(u) + p''(u) = 2p(u)$ .

Ohne die Zeichnungen wiederzugeben, stellen wir die aus ihnen gewonnenen Messungsergebnisse zusammen und vergleichen sie mit den nach Meißner erhaltenen Werten. In den beiden folgenden Tabellen stehen die letzteren Zahlen in der Spalte „interpoliert  $M$ “, die dem eben dargelegten gewogenen Verfahren entsprungenen in der Spalte „interpoliert  $V$ “. Mit  $A = 8$  cm und dem Intervall  $\Delta u = \frac{\pi}{12} \sim 15^\circ$  ergaben sich:

$u^0$	Berechnet $p = p'$	Funktionswerte $p$ interpoliert				Ableitung $p'$ interpoliert			
		$V$	Fehler	$M$	Fehler	$V$	Fehler	$M$	Fehler
0	8,00	8,00	—	8,00	—	8,00	—	8,00	—
15	10,39	10,38	—0,01	10,40	+0,01	10,38	—0,01	10,39	—
30	13,50	13,51	+0,01	13,58	+0,08	13,49	—0,01	13,57	+0,07
45	17,55	17,58	—0,03	17,70	+0,15	17,55	—	17,66	+0,11
60	22,80	22,80	—	23,07	+0,27	22,80	—	23,01	+0,21

<sup>4)</sup> Meißner, a. a. O., Seite 42/44.

Wir stellen also fest, daß die sehr guten Näherungswerte nach Meißner durch das neue Interpolationsverfahren noch erheblich verbessert werden. Während nämlich nach 4 Schritten der kumulative Fehler beim alten Verfahren 0,27 cm erreicht, bleibt er beim neuen im Bereich der Ablesegenauigkeit weniger Zehntelsmillimeter. Um die Größenordnung der Verbesserung gegenüber dem alten Verfahren besser abschätzen zu können, mußte darum ein Beispiel gewählt werden, das auch beim neuen Verfahren etwas größere, über der Ablesegenauigkeit liegende Fehler ergab. Zu diesem Zwecke wurde dieselbe Differentialgleichung mit  $A=5$  cm und dem großen Intervall  $\Delta u = \frac{\pi}{6} \sim 30^\circ$  integriert. Dies sind die Ergebnisse:

$u^\circ$	Berechnet	Funktionswerte $p$ interpoliert				Ableitung $p'$ interpoliert			
		$V$	Fehler	$M$	Fehler	$V$	Fehler	$M$	Fehler
0	5,00	5,00	—	5,00	—	5,00	—	5,00	—
30	8,44	8,43	—0,01	8,58	+0,14	8,36	—0,08	8,36	—0,08
60	14,25	14,21	—0,04	14,64	+0,39	14,18	—0,07	14,27	+0,02
90	24,05	24,01	—0,04	24,98	+0,93	23,86	—0,19	24,22	+0,17

Der Vergleich zeigt, daß die gewogene Interpolation einen mindestens zehnmal kleineren Fehler ergibt als die ungewogene. Trotz dem großen Intervall von  $30^\circ$  liefert sie noch sehr gute Werte, während das alte Verfahren beträchtliche Fehler aufweist. Bei der Ableitung  $p'$  zeigt sich kein solcher Unterschied der Methoden. Hier ist der Fehler bei beiden Verfahren von gleicher Größenordnung. Die Erklärung ist darin zu suchen, daß das neue *beim einzelnen Schritt* nur für die Ermittlung von  $p$ , nicht aber von  $p'$ , vom alten abweicht.

(Eingegangen den 24. Mai 1939.)

