Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Sur l'intégration des fonctions presque-périodiques des deux variables indépendantes.

Autor: Brauers, N.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11893

Sur l'intégration des fonctions presque-périodiques des deux variables indépendantes

Par N. Brauers, Riga

§ 1. M. Harald Bohr[1]) a démontré, au moyen de la méthode empruntée aux travaux de M. Bohl, pour les fonctions p. p.[2]) d'une variable réelle et pour celles d'une variable complexe, la propriété suivante:

Si l'intégrale d'une fonction p. p. est bornée, elle est p. p.

M. Favard[3]) a démontré le même théorème pour les fonctions à une variable réelle en faisant usage de la normalité des fonctions p. p.

On verra dans cet article, de quelle manière un raisonnement pareil fait ressortir une propriété analogue, étendue aux fonctions p. p. des deux variables réelles. M. Bohr m'a fait observer que la même propriété peut être démontrée d'après la méthode de M. Bohl.

Ce résultat peut être transmis au cas des fonctions à deux variables complexes. Comme application il s'ensuit un critère permettant d'affirmer que l'intégrale d'une fonction p. p. des deux variables complexes est elle-même p. p.

De plus, il y sera montré l'impossibilité de généraliser le théorème sus-énoncé en partant d'une certaine définition plus simple que celle qui est employée pour la susdite généralisation.

Ce travail ne contient qu'une esquisse des preuves dont la description complète paraîtra dans les Acta Universitatis Latviensis.

§ 2. Théorème. *Si les dérivées partielles* $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}$ *de la fonction bornée* $F(x_1, x_2)$ *des deux variables réelles sont p. p., ladite fonction est également p. p.*

1° Pour démontrer le théorème, supposons $F(x_1, x_2)$ réelle, mais les considérations suivantes s'appliquent également dans le cas où $F(x_1, x_2)$ est imaginaire.

Désignons par g et G les bornes inférieure et supérieure de la fonction $F(x_1, x_2)$:

$$g \leqq F(x_1, x_2) \leqq G\,. \tag{1}$$

Ecrivons comme suit les séries de Fourier des dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x_2} = f_2(x_1, x_2)$:

---

1) Acta math., t. 45 (1925) et t. 47 (1926).

2) p. p. — presque-périodique (s).

3) Acta math., t. 51 (1928).

$$
\left.\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &\sim \sum a_{n_1, n_2} e^{i(A_{n_1}^{(1)} x_1 + A_{n_2}^{(2)} x_2)} \\
f_2(x_1, x_2) &\sim \sum b_{n_1, n_2} e^{i(M_{n_1}^{(1)} x_1 + M_{n_2}^{(2)} x_2)} \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{2}
$$

2° En vertu de la normalité des fonctions p. p.[4]), il est possible d'extraire de chaque suite double

$$
H_1^{(1)} \ , H_1^{(2)} \ ; \quad H_2^{(1)} \ , H_2^{(2)} \ ; \ \ldots \ ; \quad H_m^{(1)} , H_m^{(2)} \ ; \ \ldots
$$

une suite partielle

$$
h_1^{(1)} \ , h_1^{(2)} ; \quad h_2^{(1)} \ , h_2^{(2)} ; \ \ldots \ ; \quad h_m^{(1)} , h_m^{(2)} ; \ \ldots \ , \tag{3}
$$

telle que les suites des fonctions

$$
f_1(x_1 + h_m^{(1)} \ , \ x_2 + h_m^{(2)}) \ , \ f_2(x_1 + h_m^{(1)}, \ x_2 + h_m^{(2)}) \ , \ m = 1, \ 2, \ 3, \ldots \tag{4}
$$

convergent uniformément. Désignons les fonctions des limites par $f_1^*(x_1, x_2)$ et $f_2^*(x_1, x_2)$.

D'après les séries (2), on a:

$$
\left.\begin{aligned}
f_1^*(x_1 , x_2) &\sim \sum a_{n_1 , n_2} e^{iH^{(a)}_{n_1 , n_2}} e^{i(A_{n_1}^{(1)} x_1 + A_{n_2}^{(2)} x_2)} \\
f_2^*(x_1 , x_2) &\sim \sum b_{n_1 , n_2} e^{iH^{(b)}_{n_1 , n_2}} e^{i(M_{n_1}^{(1)} x_1 + M_{n_2}^{(2)} x_2)}
\end{aligned}\right\} , \tag{5}
$$

où

$$
\left.\begin{aligned}
\lim_{m \to \infty} (A_{n_1}^{(1)} h_m^{(1)} + A_{n_2}^{(2)} h_m^{(2)}) &\equiv H^{(a)}_{n_1 , n_2} \\
\lim_{m \to \infty} (M_{n_1}^{(1)} h_m^{(1)} + M_{n_2}^{(2)} h_m^{(2)}) &\equiv H^{(b)}_{n_1 , n_2} ,
\end{aligned}\right\} \ (\mathrm{mod}\ 2\pi) \ ^{5)} . \tag{6}
$$

3° Ensuite, on établit que le système

$$
\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1} &= f_1(x_1 + h_m^{(1)} \ , \ \ x_2 + h_m^{(2)}) \\
\frac{\partial u}{\partial x_2} &= f_2(x_1 + h_m^{(1)} \ , \ \ x_2 + h_m^{(2)})
\end{aligned}\right.
$$

admet une solution ayant les mêmes bornes que $F(x_1, x_2)$:

$$
u = F(x_1 + h_m^{(1)}, \ \ x_2 + h_m^{(2)}) \ .
$$

---

[4]) *S. Bochner*, Math. Annalen t. 96 (1927).

[5]) $\lim\limits_{m \to \infty} a_m \equiv a$ (mod 2π) signifie $\lim\limits_{m \to \infty} e^{ia_m} = e^{ia}$.

Les nombres $F(h_m^{(1)}, h_m^{(2)})$ étant bornés, extrayons de la suite (3) une autre suite

$$k_1^{(1)}, k_1^{(2)}; \quad k_2^{(1)}, k_2^{(2)}; \ldots ; \quad k_m^{(1)}, k_m^{(2)}; \ldots , \tag{7}$$

telle que les nombres $F(k_m^{(1)}, k_m^{(2)})$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ aient une limite F^*.

Le système

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= f_1^*(x_1, x_2) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= f_2^*(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

admet également des solutions. On y arrive en constatant que l'intégrale

$$\int f_1^*(x_1, x_2)\, dx_1 + f_2^*(x_1, x_2)\, dx_2 ,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque, est nulle.

En outre, il existe une solution $F^*(x_1, x_2)$ de la forme

$$F^*(x_1, x_2) = \lim_{m \to \infty} F(x_1 + k_m^{(1)}, x_2 + k_m^{(2)})$$

qui, pour $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, prend la valeur $F^* = F^*(0, 0)$. Les bornes g' et G' de la fonction $F^*(x_1, x_2)$ satisfont aux inégalités

$$g \leqq g' , \qquad G' \leqq G . \tag{9}$$

4⁰ Mais, on peut choisir pour point de départ la fonction $F^*(x_1, x_2)$.

En vertu de (5) et de (6), les suites

$$f_1^*(x_1 - k_m^{(1)}, x_2 - k_m^{(2)}, \quad f_2^*(x_1 - k_m^{(1)}, x_2 - k_m^{(2)}) , \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

convergent uniformément vers $f_1(x_1, x_2)$ et $f_2(x_1, x_2)$.

Extrayons de la suite $-k_m^{(1)}$, $-k_m^{(2)}$; $m = 1, 2, 3, \ldots$ une suite partielle $-\varkappa_m^{(1)}$, $-\varkappa_m^{(2)}$; $m = 1, 2, 3, \ldots$, telle que le système

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

admette une solution spéciale

$$F_1(x_1, x_2) = \lim_{m \to \infty} F^*(x_1 - \varkappa_m^{(1)}, x_2 - \varkappa_m^{(2)})$$

dont les bornes g'' et G'' satisfont aux inégalités

$$g' \leqq g'' , \qquad G'' \leqq G' . \tag{9'}$$

Si nous comparons (9) et (9′), nous aurons: $g \leqq g''$, $G'' \leqq G$. Toutes les solutions du système (8′) étant de la forme $F(x_1, x_2) + C$, on a $g = g''$, $G = G''$ et, à fortiori,

$$g = g', \qquad G = G', \tag{10}$$

c'est-à-dire le système (8) admet une solution qui a les bornes g et G. C'est une solution unique de cette espèce.

5⁰ Il reste à montrer que la convergence de $F(x_1 + k_m^{(1)}, x_2 + k_m^{(2)})$ vers $F^*(x_1, x_2)$ est uniforme dans tout le domaine $-\infty < x_1 < +\infty$, $-\infty < x_2 < +\infty$. De là, on parvient à la normalité de $F(x_1, x_2)$ et nous aurons prouvé de ce fait que $F(x_1, x_2)$ est p. p.

Raisonnons par l'absurde, supposant que la convergence uniforme de la suite

$$F(x_1 + k_m^{(1)}, x_2 + k_m^{(2)}), \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{11}$$

ne soit pas réalisée. Il en résulte qu'on pourrait déterminer:

a) un nombre positif α,

b) deux suites infinies d'indices

$$\begin{gathered} M_1, M_2, \ldots, M_m, \ldots \\ N_1, N_2, \ldots, N_m, \ldots, \end{gathered}$$

c) une suite double de nombres

$$x_{M_1}^{(1)}, x_{M_1}^{(2)} \ ; \ x_{M_2}^{(1)}, x_{M_2}^{(2)} \ ; \ \ldots \ ; \ x_{Mm}^{(1)}, x_{Mm}^{(2)} \ ; \ldots,$$

tels que

$$| F(x_{Mm}^{(1)} + k_{Mm}^{(1)}, x_{Mm}^{(2)} + k_{Mm}^{(2)}) - F(x_{Mm}^{(1)} + k_{Nm}^{(1)}, x_{Mm}^{(2)} + k_{Nm}^{(2)}) | \geqq \alpha . \tag{12}$$

Des deux suites d'indices nous pouvons extraire deux autres suites μ_m et ν_m de telle sorte que

a) $$f_1(x_1 + x_{\mu m}^{(1)} + k_{\mu m}^{(1)}, \quad x_2 + x_{\mu m}^{(2)} + k_{\mu m}^{(2)})$$
et
$$f_2(x_1 + x_{\mu m}^{(1)} + k_{\mu m}^{(1)}, \quad x_2 + x_{\mu m}^{(2)} + k_{\mu m}^{(2)})$$

convergent uniformément vers ${}^{(1)}f_1^*(x_1, x_2)$ et ${}^{(1)}f_2^*(x_1, x_2)$;

b) $$f_1(x_1 + x_{\mu m}^{(1)} + k_{\nu m}^{(1)}, \quad x_2 + x_{\mu m}^{(2)} + k_{\nu m}^{(2)})$$
et
$$f_2(x_1 + x_{\mu m}^{(1)} + k_{\nu m}^{(1)}, \quad x_2 + x_{\mu m}^{(2)} + k_{\nu m}^{(2)})$$

convergent uniformément vers ${}^{(2)}f_1^*(x_1, x_2)$ et ${}^{(2)}f_2^*(x_1, x_2)$;

c) $$F(x^{(1)}_{\mu m}+k^{(1)}_{\mu m},\quad x^{(2)}_{\mu m}+k^{(2)}_{\mu m})$$
et
$$F(x^{(1)}_{\mu m}+k^{(1)}_{\nu m},\quad x^{(2)}_{\mu m}+k^{(2)}_{\nu m})$$
convergent vers ${}^{(1)}F^*$ et ${}^{(2)}F^*$.

En vertu de la convergence uniforme des suites (4), on arrive à:

$${}^{(1)}f_1^*(x_1, x_2) = {}^{(2)}f_1^*(x_1, x_2) \quad \text{et} \quad {}^{(1)}f_2^*(x_1, x_2) = {}^{(2)}f_2^*(x_1, x_2) \ .$$

Il en résulte: ${}^{(1)}F^* = {}^{(2)}F^*$, mais ceci est en contradiction avec l'inégalité (12).

Donc, la suite (11) converge uniformément.

§ 3. Les fonctions p. p. des deux variables complexes $s_1 = \sigma_1 + it_1$, $s_2 = \sigma_2 + it_2$ peuvent être définies d'une manière analogue au cas d'une variable[6]). Désignons par $<\alpha_i, \beta_i>$, $i = 1, 2$ un domaine quelconque $\alpha_1' < \sigma_1 < \beta_1'$, $\alpha_2' < \sigma_2 < \beta_2'$, où $\alpha_1 < \alpha_1' < \beta_1' < \beta_1$, $\alpha_2 < \alpha_2' < \beta_2' < \beta_2$, et par (α_i, β_i), $i = 1, 2$ un domaine ouvert $\alpha_1 < \sigma_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < \sigma_2 < \beta_2$. On comprend facilement ce que signifie la notation $<\alpha_i, \beta_i)$.

Théorème. *Si la fonction $F(s_1, s_2)$ est bornée dans le domaine $<\alpha_i, \beta_i>$, $i = 1, 2$ et si ses dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial s_1}$, $\dfrac{\partial F}{\partial s_2}$ y sont p.p., $F(s_1, s_2)$ est aussi p. p. dans le même domaine.*

Remarque. α_1 ou α_2 peuvent désigner $-\infty$,
β_2 ou β_2 peuvent désigner $+\infty$.

Pour obtenir ce résultat, remarquons d'abord que les dérivées partielles $\dfrac{\partial F}{\partial t_1}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial t_2}$ sont p. p. dans un domaine à deux dimensions $\sigma_1 =$ const., $\sigma_2 =$ const. Il s'ensuit que $F(s_1, s_2) = F(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2)$ est une fonction p. p. des deux variables réelles t_1, t_2 dans le même domaine.

Puisque $F(s_1, s_2)$ est une fonction analytique bornée dans un domaine à quatre dimensions $<\alpha_i, \beta_i>$, $i = 1, 2$ et p. p. dans un domaine à deux dimensions $\sigma_1 =$ const., $\sigma_2 =$ const., il est possible de démontrer qu'elle est p. p. dans le domaine $<\alpha_i, \beta_i>$, $i = 1, 2$.

§ 4. Comme application du théorème précédent, on peut déduire la propriété suivante:

[6]) *H. Bohr,* Acta math. t. 47 (1926).

Si les premières dérivées partielles de $F(s_1, s_2)$ *sont p. p. dans* $<\alpha_1, +\infty)$, $<\alpha_2, +\infty)$ *et si ses exposants (de Dirichlet) négatifs n'ont pas zéro pour limite, alors* $F(s_1, s_2)$ *est p. p. dans le même domaine.*

Pour le vérifier, on exprime $F(s_1, s_2)$ sous forme d'intégrales, en démontrant qu'elles sont bornées dans le domaine $<\alpha_1, +\infty>, <\alpha_2, +\infty>$.

En vertu du § 3, $F(s_1, s_2)$ est p. p. dans le même domaine. D'après les exposants négatifs, $F(s_1, s_2)$ est p. p. de même dans $<\alpha_1, +\infty)$, $<\alpha_2, +\infty)$.

§ 5. On montre enfin, que la généralisation qui va suivre, du théorème énoncé au début, est *impossible :*

Si la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ de la fonction bornée est p. p., $F(x_1, x_2)$ est aussi p. p.

En effet, $F(x_1, x_2) = \cos \sqrt{|x_2|}$ satisfait ladite condition, mais elle n'est pas p. p.

Pour le cas de la fonction des variables complexes, choisissons $F(s_1, s_2) = e^{s_2^2}$.

Je me fais un devoir de remercier bien cordialement MM. Bohr et Favard de leurs précieux conseils qui ont grandement contribué à la refonte de cette note.

(Reçu le 18 février 1939.)