Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Recherches sur les systémes de tourbillons ponctuels soumis à des liaisons et sur la notion de configuartion hydrodynamique stable.

Autor: Godefroy, M. Marcel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11891

Recherches sur les systèmes de tourbillons ponctuels soumis à des liaisons et sur la notion de configuration hydrodynamique stable

Par M. Marcel Godefroy, Poitiers

Sommaire

I. Les équations exactes des mouvements de tourbillons ponctuels; les équations linéarisées; obtention d'une condition nécessaire pour que les mouvements définis par les équations linéarisées gardent une amplitude finie; étude particulière d'une rue de tourbillons alternés. II. Relation générale entre les solutions des systèmes exacts et les solutions des systèmes linéarisés; les deux types de petits mouvements définis par les équations exactes; élargissement de la notion de stabilité.

Introduction

Ce mémoire a été rédigé à la suite d'une série de recherches que j'ai effectuées sous la direction de M. *Bouligand*, professeur à la Sorbonne, et de M. *H. Poncin*, professeur à la Faculté des Sciences de *Poitiers*. Dans la première partie, j'expose des résultats qui apportent une contribution nouvelle à l'étude théorique des files de tourbillons ponctuels soumis à des liaisons et présentant certaines configurations d'un type général comprenant, en particulier, les configurations classiques de *Bénard* et *Karman*. Dans la deuxième partie, je précise la notion de configuration hydrodynamique stable au voisinage d'un état stationnaire, lorsque son évolution est susceptible d'une représentation effective à l'aide d'un nombre fini de paramètres. Ces considérations sont d'ailleurs applicables, sans changement notable, à certains problèmes de stabilité que pose la mécanique des milieux indéformables ou la mécanique des milieux élastiques.

Certains des résultats qui sont développés dans ce travail ont été présentés à l'Académie des Sciences de *Paris*, sous une forme d'ailleurs un peu différente — *cf.* à ce sujet la note de M. *Marcel Godefroy* sur la stabilité des files de tourbillons, publiée aux Comptes Rendus du 2 novembre 1938, et la note de MM. *Marcel Godefroy* et *Henri Poncin* sur la notion de stabilité en mécanique rationnelle, publiée dans les comptes rendus du 9 décembre 1938.

Pour l'historique du problème relatif aux recherches sur les tourbillons alternés, on consultera l'ouvrage de M. *P. Schwarz* publié par le Service des recherches scientifiques et techniques du Ministère de l'Air (No. 100, chapitre I). Je me contenterai donc de rappeler, en quelques mots, ce qui sera essentiel dans l'étude que nous allons entreprendre: les recherches théoriques sur les mouvements des files illimitées de tourbillons ponctuels conduisent à introduire un ensemble non borné et dénombrable de variables soumises à un ensemble équivalent de relations différentielles. L'étude de ces systèmes n'a pu, jusqu'ici, être poursuivie que moyennant d'importantes simplifications. On a considéré des configurations voisines d'un état d'équilibre relatif, ce qui permet de remplacer le système d'équations différentielles considéré comme exact par un autre système approximatif, mais plus simple, auquel nous donnerons le nom de «système des équations linéarisées», pour rappeler son origine. Les variables forment encore une suite illimitée. Aussi a-t-on cherché à obtenir des solutions particulières du système. Les méthodes employées pour parvenir à ce résultat peuvent être rattachées à deux points de vue assez différents. On peut d'abord considérer des petits mouvements d'un type donné a priori, puis chercher à reconnaître ceux d'entre eux qui satisfont aux équations linéarisées. Il ne reste plus, pour obtenir les conditions nécessaires de stabilité, qu'à déterminer les cas pour lesquels les petits mouvements reconnus possibles sont représentés par des fonctions *bornées* du temps. Tel est le principe de la méthode utilisée pour la première fois par *H. Lamb*[1]) qui a ainsi pu montrer que la stabilité n'a jamais lieu dans le cas d'une rue symétrique de tourbillons mobiles au sein d'un fluide illimité, et qu'elle dépend, pour une rue alternée, de la condition nécessaire:

$$ch^2 \pi \frac{h}{l} = 2\,, \tag{1}$$

où h représente la distance des deux files et l celle de deux tourbillons consécutifs sur l'une ou l'autre d'entre elles.

Le second point de vue consiste à imposer à l'ensemble des tourbillons un système de liaisons suffisant pour rendre fini le nombre des variables indépendantes qui définissent son état. Ces liaisons ne sauraient d'ailleurs être choisies au hasard, mais si nous les supposons satisfaites a un instant donné, elles doivent continuer d'elle-même à être vérifiées dans

1) Hydrodynamics, 5e édition. Cambridge 1930, p. 208. — Voir aussi *H. Villat*, Leçons sur la théorie des Tourbillons. Chapitre IV. — *G. Durand*, Sur les petits mouvements d'un système infini de tourbillons autour d'une position d'équilibre (Publications Scientifiques du Ministère de l'Air, No. 35), p. 12 à 14.

la suite. Cette condition, qui est essentielle, se réalise très simplement dans le cas suivant, considéré par M. *G. Durand* [2]).

Etant donnée une rue tourbillonnaire en équilibre, numérotons régulièrement les pôles de la première file, à l'aide des entiers positifs ou négatifs écrits sous la forme $kn+\gamma$ (avec $0 \leqq \gamma \leqq n-1$). Imposons alors, à tous ceux de ces points qui correspondent à une même valeur de γ, des déplacements initiaux représentés par un même vecteur de petite longueur, puis procédons de même avec la seconde file, en prenant un nouveau système de n petits déplacements indépendant du précédent. Dans ces conditions, il est clair que, sur chaque file, les tourbillons de même rang γ sont tous animés d'une même vitesse. Autrement dit, les liaisons imposées au système subsistent d'elles-mêmes, et *le nombre des tourbillons à considérer comme libres est désormais réduit à* $2n$. Les configurations ainsi définies sont les seules que nous nous proposions d'étudier, et cette particularisation du problème nous permettra d'obtenir des résultats précis sur le rôle de la condition (1) de stabilité.

2. Dans le mémoire cité, M. G. Durand ne donne à n que les valeurs 1 et 2, et obtient les résultats suivants: pour une configuration voisine d'une rue alternée, les fonctions du temps qui définissent les petits mouvements des tourbillons sont des sommes composées d'une constante, d'un terme At, et de plusieurs autres tels que $e^{Et}\cos Gt$, $e^{-Et}\cos Gt$. Les paramètres A, E, G ne dépendent que de h et de l. Lorsque la condition (1) est satisfaite, E se réduit à *un*, mais A ne s'annule que dans certains cas particuliers, et les sommes considérées n'ont pas, en général, de borne supérieure lorsque t tend vers ∞. Il semble donc, à première vue, très légitime de conclure, avec M. G. Durand, qu'une rue tourbillonnaire alternée est toujours instable [3]).

Pourtant, une remarque s'impose. La différence entre les déplacements de deux tourbillons quelconques, appartenant ou non à la même file, *ne contient pas de terme linéaire en t.* Il en est ainsi quel que soit n, comme nous le montrerons dans la suite (No. 16 et 17). L'existence de ce terme ne contribue donc pas à disloquer les configurations à nombre fini de variables, *mais simplement à modifier la translation dont elles sont animées.* A cela près, *leur mouvement se réduit, lorsque* (1) *est vérifiée, à des oscillations d'amplitude infiniment petite.*

C'est du moins la conclusion à laquelle conduit l'emploi des équations linéarisées, étudiées dans la première partie de cet exposé. Mais on peut se demander *dans quelle mesure les résultats obtenus grâce à cette simpli-*

[2]) *G. Durand,* Loc. cit., p. 14 et suivantes.

[3]) Loc. cit. p. 7 et 21—22.

fication sont comparables à ceux que donnerait l'étude directe des équations exactes. Telle sera la question abordée dans la seconde partie. Un théorème général sur les conditions de validité des équations linéarisées, que nous établirons, permettra de préciser, dans des cas étendus, la notion de stabilité des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté. Nous pourrons alors apprécier, en particulier, l'efficacité réelle de la condition (1) de stabilité, pour une configuration tourbillonnaire satisfaisant aux liaisons proposées par M. G. Durand.

PREMIÈRE PARTIE

Les équations linéarisées et leurs conséquences

3. Nous allons d'abord expliciter les relations exactes qui définissent le mouvement des configurations susceptibles d'une représentation par un nombre fini de variables. Nous les simplifierons ensuite, de manière à obtenir un système d'équations différentielles linéaires dont les coefficients dépendent seulement de la position relative des deux files. Nous chercherons alors quelle doit être cette position relative, pour que les petites oscillations des centres tourbillonnaires gardent une amplitude bornée lorsque t tend vers ∞. Enfin, le cas d'une rue alternée sera étudié d'une façon plus particulière.

A. Les équations exactes

4. On sait[4]) que, pour un fluide parfait incompressible, mobile entre deux plans parallèles, avec tourbillons cylindriques déliés et normaux aux parois, les composantes $u(xy)$ et $v(xy)$ de la vitesse au point xy sont, lorsque le système d'axes est rectangulaire, telles que $u - vi$ soit une fonction méromorphe de $x + iy$. Ses pôles, tous simples, sont les affixes des tourbillons, et les résidus correspondants sont les quotients, par $2\pi i$, des intensités tourbillonnaires.

Il est facile d'appliquer ce principe à la recherche des équations différentielles qui régissent le mouvement des configurations définies par M. G. Durand. Pour cela considérons, sur le plan de la figure, $2n$ suites illimitées de tourbillons ponctuels. Nous supposerons que les n premières sont constituées par des centres d'intensité $+J$ situés aux points

$$Z_1 + knl \quad \ldots \quad Z_n + knl$$

[4]) *H. Villat*, Théorie des Tourbillons (Gauthier-Villars édit. Paris), chapitre III.

k étant l'entier le plus général, positif, négatif ou nul. De même, sur les n dernières, les centres d'intensité $-J$ occupent les positions

$$X_1 + knl \;, \; \ldots \; X_n + knl \;.$$

S'il en est ainsi, la fonction $u - vi$ admet la période nl.

Sur le domaine fondamental $0 < x < nl$, elle doit être uniforme et admettre pour pôles les $2n$ points $Z_1 \ldots Z_n$, $X_1 \ldots X_n$, avec les résidus $+\dfrac{J}{2\pi i}$ et $-\dfrac{J}{2\pi i}$. Elle doit en outre, étant donnée la signification physique du problème, rester bornée pour toute valeur de x, lorsque $|y|$ tend vers ∞. Sa forme la plus générale est alors, en posant $x + iy = z$,

$$u - vi = \frac{J}{2inl}\left[\sum_1^n \cot \frac{\pi}{nl}(z - Z_j) - \sum_1^n \cot \frac{\pi}{nl}(z - X_j)\right]$$

à une constante complexe près, que nous pouvons négliger: lorsqu'elle est nulle, le fluide est sensiblement au repos, à une distance suffisante des deux files.

5. La vitesse d'un centre tourbillonnaire est celle qu'aurait le fluide au même point, si ce centre n'existait pas. On a ainsi:

$$\frac{d}{dt} Z_k^* = \lim_{z=Z_k}\left\{\frac{J}{2inl}\left[\sum_1^n \cot \frac{\pi}{nl}(z - Z_j) - \sum_1^n \cot \frac{\pi}{nl}(z - X_j)\right] - \frac{J}{2\pi i(z - Z_k)}\right\}.$$

Le signe* indiquera, d'une façon générale, qu'il faut prendre la grandeur complexe conjuguée de la variable qu'il affecte. Compte tenu de relations telles que

$$\lim_{z=Z_k}\left[\cot \frac{\pi}{nl}(z - Z_j) - \frac{nl}{\pi}\,\frac{1}{z - Z_j}\right] = 0,$$

on obtient, en définitive,

$$\begin{aligned}
\frac{2inl}{J}\,\frac{d}{dt} Z_k^* &= \sum \cot \frac{\pi}{nl}(Z_k - Z_{j'}) - \sum \cot \frac{\pi}{nl}(Z_k - X_j) \\
\frac{2inl}{J}\,\frac{d}{dt} X_k^* &= \sum \cot \frac{\pi}{nl}(X_k - Z_j) - \sum \cot \frac{\pi}{nl}(X_k - X_{j'}) \;.
\end{aligned} \tag{2}$$

Dans chacune des sommes Σ, k est invariable, tandis que les entiers j et j' sont soumis aux seules restrictions

$$1 \leqslant j \leqslant n \qquad 1 \leqslant j' \leqslant n \qquad j' \neq k \;.$$

En remplaçant chaque terme par sa conjuguée complexe, on obtient $2n$ nouvelles relations qui, jointes aux précédentes, forment en tout *un système* ($\mathfrak{E}$) *de* $4n$ *équations différentielles*. Celui-ci définit complètement le mouvement de la configuration tourbillonnaire, dont l'état initial est donné par les valeurs Z_{0k}, Z^*_{0k}, X_{0k}, X^*_{0k} que prennent, pour $t = 0$, les variables Z_k, Z^*_k, X_k, X^*_k. Rien n'empêche de faire abstraction du sens attribué au signe* et de considérer, d'une façon générale, Z_k et Z^*_k comme deux paramètres complexes indépendants. Il sera même commode, à chaque instant, de se placer à ce point de vue. Mais seules méritent d'être retenues les solutions de ($\mathfrak{E}$) pour lesquelles les fonctions $Z^*_k(t)$, $X^*_k(t)$ et $Z_k(t)$, $X_k(t)$ sont conjugées, quel que soit t. Nous dirons que ce sont les *solutions réelles* de ce système. On les obtient simplement en donnant aux Z^*_{0k}, X^*_{0k} et aux Z_{0k}, X_{0k} des valeurs conjuguées.

6. Nous n'entreprendrons pas l'intégration complète de ($\mathfrak{E}$), mais nous allons mettre en évidence quelques-unes de ses solutions particulières. Celles-ci correspondent à des configurations stationnaires, aussi bien pour les rues tourbillonnaires illimitées que pour les configurations à nombre fini de variables. Posons

$$Z_k = kl \ , \ X_k = (k + \omega)\, l \tag{3}$$

Le paramètre complexe

$$\omega = \omega_1 + i\,\omega_2$$

restera, jusqu'à nouvel ordre, complètement arbitraire. En portant dans (2) les valeurs (3), on obtient

$$\frac{2inl}{J}\frac{d}{dt}Z^*_k = \frac{2inl}{J}\frac{d}{dt}X^*_k = \sum_1^{n-1} \cot\frac{k\pi}{n} + \sum_1^{n} \cot\,(k+\omega)\frac{\pi}{n} \ .$$

On voit que les $\dfrac{d}{dt}Z^*_k$ et $\dfrac{d}{dt}X^*_k$ ont tous la même valeur. Celle-ci doit être indépendante de n, puisque la configuration définie par (3) présente toujours le même aspect, quelle que soit la valeur de cet entier, lorsque l et ω sont donnés. On a, pour $n = 1$,

$$\frac{d}{dt}Z^*_1 = \frac{d}{dt}X^*_1 = \frac{J}{2il}\cot \pi\omega \ , \tag{4}$$

et cette formule est générale.

Ainsi, les tourbillons des deux files se déplacent tous avec la même vitesse. Dans un système d'axes animé d'une translation convenable, les centres tourbillonnaires paraissent immobiles et le mouvement du fluide est indépendant du temps. On peut dire, en ce sens, qu'une configuration du type (3) est toujours en équilibre, quel que soit ω. Mais, comme l'a montré M. P. Schwarz[5]), la vitesse des tourbillons n'est parallèle à la direction des files que s'il s'agit d'une rue symétrique ou alternée (le système d'axes étant tel que le fluide soit au repos pour $y \to \infty$). On a, dans le premier cas,

$$\omega_1 = 0\,, \qquad \omega_2 = \frac{h}{l}\,,$$

$$\frac{d}{dt} Z_k^* = -\frac{J}{2l} \coth \pi \frac{h}{l}\,,$$

et dans le second,

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \qquad\qquad \omega_2 = \frac{h}{l}\,,$$

$$\frac{d}{dt} Z_k^* = -\frac{J}{2l} \operatorname{th} \pi \frac{h}{l}\,.$$

On retrouve ainsi les formules bien connues, obtenues pour la première fois par Th. von Karman.

B. Les équations linéarisées

7. Dans ce paragraphe, nous ne développerons pas l'étude des équations exactes, mais nous allons en déduire des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, en considérant des configurations voisines de (3).

Posons pour cela

$$\begin{aligned} Z_k &= l(k + \zeta_k) - \frac{Jt}{2il} \cot \pi\omega^* \\ X_k &= l(k + \omega + \xi_k) - \frac{Jt}{2il} \cot \pi\omega^*\,. \end{aligned} \tag{5}$$

En portant ces valeurs dans ($\mathfrak{E}$) on a, compte tenu de (4) ,

$$\frac{2inl^2}{J}\frac{d}{dt}\zeta_k^* = -\frac{\pi}{n}\sum \frac{(\zeta_k - \zeta_{j'})}{\sin^2 \frac{\pi}{n}(k - j')} + \frac{\pi}{n}\sum \frac{(\zeta_k - \xi_j)}{\sin^2 \frac{\pi}{n}(k - j - \omega)} + \varphi_k(\zeta, \xi)$$

$$\frac{2inl^2}{J}\frac{d}{dt}\xi_k^* = -\frac{\pi}{n}\sum \frac{(\xi_k - \zeta_j)}{\sin^2 \frac{\pi}{n}(k - j + \omega)} + \frac{\pi}{n}\sum \frac{(\xi_k - \xi_{j'})}{\sin^2 \frac{\pi}{n}(k - j')} + \psi_k(\zeta, \xi)$$

---

[5]) *P. Schwarz*, Recherches sur les tourbillons alternés. Chapitre IV, p. 57.

Les φ_k et les ψ_k sont des fonctions des ζ, ξ régulières pour $\zeta_1 = \cdots \zeta_n = \xi_1 = \cdots \xi_n = 0$, dont les développements en séries entières commencent par des termes d'ordre 2 au moins. *C'est en les supprimant que nous obtenons les systèmes linéarisés dont nous nous proposons l'étude.* Nous admettrons, dans toute la première partie de cet exposé, qu'*une telle simplification est légitime tant que les ζ_k et les ξ_k restent suffisamment petits,* en réservant pour la deuxième partie la détermination précise des cas où il en est bien ainsi. En posant

$$\frac{2n^2 l^2}{J\pi} = \Gamma ,$$

puis, pour $\lambda \not\equiv 0 \pmod{n}$,

$$\frac{1}{\sin^2 \lambda \dfrac{\pi}{n}} = a_\lambda ,$$

et enfin

$$\sum_1^n b_\lambda - \sum_1^{n-1} a_\lambda = a_0 ,$$

on obtient le système de $4n$ équations différentielles,

$$(E)\quad \begin{cases} \Gamma i \dfrac{d}{dt} \zeta_k^* = & \sum a_{k-j} \zeta_j - \sum b_{j-k} \xi_j \\ \Gamma i \dfrac{d}{dt} \xi_k^* = & \sum b_{k-j} \zeta_j - \sum a_{j-k} \xi_j \\ \Gamma i \dfrac{d}{dt} \zeta_k = -\sum a_{k-j}^* \zeta_j^* + \sum b_{j-k}^* \xi_j^* & \\ \Gamma i \dfrac{d}{dt} \xi_k = -\sum b_{k-j}^* \zeta_j^* + \sum a_{k-j}^* \xi_j^* & \end{cases}$$

à $4n$ inconnues. Tous les a_k sont réels, sauf peut être a_0 tandis que les b_k sont complexes, en général.

8. Le système (E) possède une propriété remarquable, qui donne lieu à d'importantes simplifications: pris dans son ensemble, il est invariant pour la substitution

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \cdots \zeta_k \cdots\cdots \zeta_n \cdots \xi_k \cdots\cdots \zeta_k^* \cdots\cdots \xi_k^* \cdots\cdots \xi_n^* \\ \zeta_2 \cdots \zeta_{k+1} \cdots \zeta_1 \cdots \xi_{k+1} \cdots \zeta_{k+1}^* \cdots \xi_{k+1}^* \cdots \xi_1^* \end{pmatrix} .$$

Or celle-ci conserve également, à un facteur près, chacune des formes linéaires

$$\theta_\gamma = \sum_{k=1}^{k=n} r_\gamma^k \zeta_k \qquad \theta'_\gamma = \sum_{k=1}^{k=n} r_\gamma^k \zeta_k^*$$
$$\eta_\gamma = \sum_{k=1}^{k=n} r_\gamma^k \xi_k \qquad \eta'_\gamma = \sum_{k=1}^{k=n} r_\gamma^k \xi_k^* \tag{6}$$

dans lesquelles

$$r_\gamma = \cos \frac{2\gamma\pi}{n} + i \sin \frac{2\gamma n}{n} \, .$$

Ces formes, au nombre de $4n$, sont linéairement distinctes. Prenons-les comme variables, à la place des $\zeta_k\ \xi_k\ \zeta_k^*\ \xi_k^*$. En multipliant par r_γ^k chacune des n premières équations de (E) et en ajoutant membre à membre, on a

$$\Gamma i \frac{d}{dt} \theta'_\gamma = \mathfrak{A}_\gamma \theta_\gamma - \mathfrak{C}_\gamma \eta_\gamma \, ,$$

avec

$$\mathfrak{A}_\gamma = \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k r_\gamma^k \qquad \mathfrak{C}_\gamma = \sum_{k=0}^{k=n-1} b_k r_\gamma^{-k} \, .$$

Posons encore

$$\mathfrak{B}_\gamma = \sum_{k=0}^{k=n-1} b_k r_\gamma^k \, ,$$

et remarquons que

$$\sum_0^{n-1} b_k^* r_\gamma^k = \mathfrak{C}_\gamma^* \qquad \sum_0^{n-1} b_k^* r_\gamma^{-k} = \mathfrak{B}_\gamma^* \, .$$

En procédant avec les trois dernières séries de n équations qui constituent (E) comme on vient de le faire avec la première, on obtient, en définitive, n systèmes différentiels contenant chacun 4 équations et 4 fonctions de t à déterminer. Ils se presentent sous la forme

$$(e_\gamma)\left\{\begin{aligned}
\Gamma i \frac{d}{dt} \theta'_\gamma &= \qquad\qquad\qquad \mathfrak{A}_\gamma\, \theta_\gamma - \mathfrak{C}_\gamma\, \eta_\gamma \\
\Gamma i \frac{d}{dt} \eta'_\gamma &= \qquad\qquad\qquad \mathfrak{B}_\gamma\, \theta_\gamma - \mathfrak{A}_\gamma\, \eta_\gamma \\
\Gamma i \frac{d}{dt} \theta_\gamma &= -\mathfrak{A}_\gamma^*\, \theta'_\gamma + \mathfrak{B}_\gamma^*\, \eta'_\gamma \\
\Gamma i \frac{d}{dt} \eta_\gamma &= -\mathfrak{C}_\gamma^*\, \theta'_\gamma + \mathfrak{A}_\gamma^*\, \eta'_\gamma \, .
\end{aligned}\right.$$

9. Il est facile d'évaluer, en fonction de ω ou de

$$e^{-\frac{2i\omega\pi}{n}} = p \, ,$$

les coefficients $\mathfrak{A}_\gamma\ \mathfrak{B}_\gamma\ \mathfrak{C}_\gamma$. On a par définition

$$\mathfrak{B}_\gamma = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{r_\gamma^k}{\sin^2 \frac{\pi}{n}(k+\omega)} .$$

Mais on peut écrire

$$\sin^2 \frac{\pi}{n}(k+\omega) \equiv -\frac{(r_k - p)^2}{4 p r_k} .$$

On obtient alors

$$\mathfrak{B}_\gamma = -4p \sum_{k=1}^{k=n} \frac{r_k^{\gamma+1}}{(r_k - p)^2} ,$$

et on aurait de même

$$\mathfrak{C}_\gamma = -4p \sum_{k=1}^{k=n} \frac{r_k^{n-\gamma+1}}{(r_k - p)^2} .$$

Il est facile de simplifier les sommes Σ. On peut partir de l'identité

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{p - r_k} \equiv \frac{n p^{n-1}}{p^n - 1} .$$

Les relations

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{r_k^{\gamma+1}}{p - r_k} \equiv p \sum_1^n \frac{r_k^\gamma}{p - r_k} - \sum_1^n r_k^\gamma$$

permettent alors d'obtenir, de proche en proche, les formules définitives

$$\mathfrak{B}_\gamma = -4n \frac{\gamma + (n-\gamma) p^n}{(p^n - 1)^2} p^\gamma \tag{7}$$

$$\mathfrak{C}_\gamma = -4n \frac{\gamma p^n + (n-\gamma)}{(p^n - 1)^2} p^{n-\gamma} . \tag{8}$$

Calculons maintenant $\mathfrak{A}_k$. On a, par définition ,

$$\mathfrak{A}_\gamma = \sum_{k=0}^{k=n-1} a_k r_\gamma^k = \sum_0^{n-1} b_k + \sum_1^{n-1} (a_k r_\gamma^k - a_k) .$$

On voit tout d'abord que

$$\sum_0^{n-1} b_k = \mathfrak{B}_n = -4n^2 \frac{p^n}{(p^n - 1)^2} .$$

Pour évaluer le second terme, on peut remarquer que a_k est la limite de b_k lorsque ω tend vers zéro ou p vers un. On a ainsi:

$$\sum_1^{n-1} (a_k r_\gamma^k - a_k) = \lim_{p=1} \left[\sum_0^{n-1} b_k r_\gamma^k - \sum_0^{n-1} b_k \right]$$

$$= \lim_{p=1} (\mathfrak{B}_\gamma - \mathfrak{B}_n) .$$

Un calcul élémentaire donne, à partir de (7),

$$\lim_{p=1} (\mathfrak{B}_\gamma - \mathfrak{B}_n) = -2\gamma(n-\gamma) \ .$$

On a donc en définitive

$$\mathfrak{A}_\gamma = -2\left[\frac{2n^2p^2}{(p^n-1)^2} + \gamma(n-\gamma)\right] \ . \qquad (9)$$

C. Obtention d'une condition nécessaire pour que les mouvements définis par les équations linéarisées gardent une amplitude finie

10. Pour intégrer les systèmes (e_γ), on cherche à en déduire des relations du type

$$\Gamma i \frac{d}{dt} \mathfrak{L}_{\kappa\gamma}(\eta_\gamma \eta'_\gamma \theta_\gamma \theta'_\gamma) = \sigma_{\kappa\gamma} \mathfrak{L}_{\kappa\gamma}(\eta_\gamma \eta'_\gamma \theta_\gamma \theta'_\gamma) \qquad (10)$$

avec $\kappa = 1, 2, 3$ ou 4. Elles ont pour solutions

$$\mathfrak{L}_{\kappa\gamma}(\eta_\gamma \eta'_\gamma \theta_\gamma \theta'_\gamma) = \mathfrak{L}_{\kappa\gamma}(\eta_{0\gamma} \eta'_{0\gamma} \theta_{\sigma\gamma} \theta'_{0\gamma}) e^{-\frac{i}{\Gamma}\sigma_{\kappa\gamma}t} \ . \qquad (11)$$

Les $\mathfrak{L}_{k\gamma}$ sont des formes linéaires des variables qu'elles contiennent, tandis que les $\sigma_{\kappa\gamma}$ sont les quatre racines de l'équation

$$\sigma^4 + (2\mathfrak{A}_\gamma\mathfrak{A}^*_\gamma - \mathfrak{B}_\gamma\mathfrak{B}^*_\gamma - \mathfrak{C}_\gamma\mathfrak{C}^*_\gamma)\,\sigma^2 + (\mathfrak{A}^2_\gamma - \mathfrak{B}_\gamma\mathfrak{C}_\gamma)(\mathfrak{A}^{*2}_\gamma - \mathfrak{B}^*_\gamma\mathfrak{C}^*_\gamma) = 0 \quad (12)$$

caractéristique de (e_γ). On sait que si l'une de ces racines est d'ordre ν, on peut toujours lui associer une intégrale du type (11), parfois plusieurs, mais jamais plus de ν.

Seules nous intéressent les solutions réelles de (E) au sens défini au No. 5. Posons donc

$$\zeta_{0k} = \alpha_k + i\beta_k \qquad \xi_{0k} = \alpha'_k + i\beta'_k$$
$$\zeta^*_{0k} = \alpha_k - i\beta_k \qquad \xi^*_{0k} = \alpha'_k - i\beta'_k \ .$$

Il est clair que si les $\mathfrak{L}_{\kappa\gamma}(\eta_{0\gamma}\, \eta'_{0\gamma}\, \theta_{0\gamma}\, \theta'_{0\gamma})$ sont exprimés en fonction des $\alpha_k\alpha'_k\beta_k\beta'_k$, aucune des formes linéaires ainsi obtenues ne saurait être identiquement nulle. On peut donc les rendre toutes différentes de zéro, même si chacun des paramètres précédents doit rester réel. Dans ces conditions, les seconds membres des relations (11) ne peuvent rester tous bornés, lorsque t tend vers ∞, que si, dans chacun des $\sigma_{\kappa\gamma}$, le coefficient de i est nul ou du signe de $-\Gamma$. Mais il faut écarter aussitôt cette seconde hypothèse, étant donnée la forme de (12). *La réalité de tous les $\sigma_{\kappa\gamma}$ est donc nécessaire pour que, dans chacune des solutions réelles de (E) les fonctions $\zeta_k(t)$, $\xi_k(t)$ restent toutes bornées.*

11. Pour que les quatre racines de l'équation bicarrée (12) soient réelles, il faut, et cela suffit, que l'on ait

$$\mathfrak{B}_\gamma \mathfrak{B}_\gamma^* + \mathfrak{C}_\gamma \mathfrak{C}_\gamma^* - 2\mathfrak{A}_\gamma \mathfrak{A}_\gamma^* \geqslant 2 \,|\, \mathfrak{A}_\gamma^2 - \mathfrak{B}_\gamma \mathfrak{C}_\gamma \,| \ . \tag{13}$$

Or, on déduit facilement de (8) (9) (10) que $(\mathfrak{A}_\gamma^2 - \mathfrak{B}_\gamma \mathfrak{C}_\gamma)$ est une expression réelle, supérieure ou égale à zéro. Si donc on pose

$$\mathfrak{A}_\gamma = A_\gamma + i A_\gamma' \ , \qquad \mathfrak{B}_\gamma = B_\gamma + i B_\gamma' \ , \qquad \mathfrak{C}_\gamma = C_\gamma + i C_\gamma' \ ,$$

il vient

$$A_\gamma^2 - A_\gamma'^2 - B_\gamma C_\gamma + B_\gamma' C_\gamma' \geqslant 0$$
$$2 A_\gamma A_\gamma' - B_\gamma C_\gamma' - C_\gamma B_\gamma' \quad = 0 \ .$$

L'inégalité (13) prend alors les formes successives

$$B_\gamma^2 + B_\gamma'^2 + C_\gamma^2 + C_\gamma'^2 - 2A_\gamma^2 - 2A_\gamma'^2 \geqslant 2(A_\gamma^2 - A_\gamma'^2) - 2\,B_\gamma C_\gamma + 2\,B_\gamma' C_\gamma'$$
$$(B_\gamma + C_\gamma)^2 + (B_\gamma' - C_\gamma')^2 \geqslant 4A_\gamma^2$$

et s'écrit finalement

$$|\, \mathfrak{B}_\gamma + \mathfrak{C}_\gamma^* \,| \geqslant |\, \mathfrak{A}_\gamma + \mathfrak{A}_\gamma^* \,| \ . \tag{14}$$

Remarque. Cette relation devra, naturellement, être vérifiée pour les n valeurs possibles de γ. Lorsqu'elle l'est pour l'une d'elles sans se réduire à une égalité, les quatre racines de (12) sont réelles et distinctes, et on a bien quatre formes $\mathfrak{L}_{k\gamma}\,(\eta_\gamma\ \eta_\gamma'\ \theta_\gamma\ \theta_\gamma')$ indépendantes, dont chacune donne lieu à une intégrale du type (11). Celles-ci restent toutes bornées lorsque t tend vers ∞, et il est de même des quatre variables qu'elles contiennent. Si pareil fait se produit pour les n valeurs possibles de γ, tous les η_γ η_γ' θ_γ θ_γ' ont une borne supérieure, et il en est de même des ζ_k et des ξ_k. *Les mouvements définis par les équations linéarisées sont alors ceux qui se produisent dans les cas d'équilibre stable.*

12. Il est évident qu'une condition nécessaire de stabilité obtenue pour $n = n_1$ doit être vérifiée également lorsque n est un multiple de n_1. Ainsi, l'étude des valeurs impaires de n ne saurait donner lieu à un système de conditions plus restrictif que celle des valeurs paires. Il suffit donc de considérer ces dernières pour tirer tout le parti possible des configurations à nombre fini de variables, et les relations ainsi obtenues, à l'aide de (14), doivent nécessairement être vérifiées dans le cas d'une rue tourbillonnaire illimitée. Posons donc $n = 2n_1$ et voyons, en particulier, pour quelles valeurs de ω la condition (14) est vérifiée, lorsque $\gamma = n_1$.

En remplaçant p par sa valeur $e^{-2i\frac{\pi\omega}{n}}$ on déduit immédiatement de (7) (8) (9),

$$\mathfrak{B}_{n_1} = \mathfrak{C}_{n_1} = n^2 \frac{\cos\ \omega\pi}{\sin^2\ \omega\pi}$$

$$\mathfrak{A}_{n_1} = n^2 \left[\frac{1}{\sin^2\ \omega\pi} - \frac{1}{2}\right] .$$

L'inégalité (14) se réduit alors à

$$\left| \Re\left(\frac{\cos\ \omega\pi}{\sin^2\ \omega\pi}\right) \right| \geqslant \left| \Re\left(\frac{1}{\sin^2\ \omega\pi} - \frac{1}{2}\right) \right| . \tag{15}$$

Le signe $\Re$ indique qu'il faut prendre la partie réelle de l'expression mise entre parenthèses. Si $\mathfrak{M}$ est le module de cos $\omega\pi$ et α son argument, la relation précédente s'écrit

$$2\left| \left(\mathfrak{M} - \frac{1}{\mathfrak{M}}\right) \cos\ \alpha \right| \geqslant \left| \mathfrak{M}^2 - \frac{1}{\mathfrak{M}^2} \right| .$$

Elle n'est vérifiée que si $\mathfrak{M}$ équivaut à un et elle se réduit, dans ce cas, à une égalité. *Une configuration du type* (5) *ne peut donc être stable, pour n pair, que si* ω *satisfait à la condition nécessaire* (mais non suffisante peut-être)

$$|\cos\ \omega\pi| = 1$$

et il en est de même, naturellement, pour une rue tourbillonnaire illimitée. Cette relation se met sous la forme

$$\sin^2\ \omega_1\pi = sh^2\omega_2\pi \tag{16}$$

Lorsque ω_1 est donné, elle n'est vérifiée que pour une seule valeur de ω_2. Dans le cas d'une rue symétrique, ω_1 est nul et il doit, d'après (16), en être de même pour ω_2. On voit ainsi que la stabilité est impossible. On a au contraire, pour une rue alternée,

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}\ , \qquad \sin^2\omega_1\pi = 1\ ,$$

et (16) se réduit à

$$sh^2\ \omega_2\pi = 1\ . \tag{17}$$

Cette relation équivaut à (1), puisque la valeur de ω_2 est $\frac{h}{l}$. Nous appellerons désormais ω_2' la valeur de $|\omega_2|$ qui satisfait à (17).

D. Etude particulière d'une rue tourbillonnaire alternée

13. Si les équations linéarisées définissaient exactement les mouvements des configurations (5), la discussion complète de la condition (16) de stabilité se réduirait à l'élucidation des deux points suivants:

1. L'inégalité (14) est-elle vérifiée pour les n valeurs de γ, lorsque ω satisfait à (16)?

2. Quelle est la forme des solutions de (e_γ) lorsque, (14) se réduisant à une égalité, l'équation (12) admet des racines multiples? S'il en est ainsi, la remarque faite au numéro 11 risque, en effet, de ne plus s'appliquer.

Nous n'aborderons l'étude de ces deux questions que dans le cas d'une rue alternée. La première se résoudra à l'aide d'une inégalité connue, et il suffira de rappeler les résultats les plus importants de sa discussion. La seconde méritera d'être examinée de plus près, car nous retrouverons alors, sous une forme plus générale, l'argument de M. G. Durand contre l'hypothèse de la stabilité, signalé déjà au numéro 2.

14. Posons donc
$$\omega_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad \omega_2 = \frac{h}{l}\,.$$
p se réduit alors à $e^{-i\frac{\pi}{n}} e^{2\omega_2\frac{\pi}{n}}$.

En portant ces valeurs dans (7) (8) (9), on obtient

$$\mathfrak{B}_\gamma = n^2 e^{-\frac{i}{2}x_\gamma} e^{\omega_2 x_\gamma}\left[\frac{1}{ch^2\,\omega_2\pi} - \frac{x_\gamma\, e^{-\omega_2\pi}}{\pi\, ch\,\omega_2\pi}\right]$$
$$\mathfrak{C}_\gamma = n^2 e^{\frac{i}{2}x_\gamma} e^{-\omega_2 x_\gamma}\left[\frac{1}{ch^2\,\omega_2\pi} - \frac{x_\gamma\, e^{\omega_2\pi}}{\pi\, ch\,\omega_2\pi}\right]$$
$$\mathfrak{A}_\gamma = \frac{n^2}{4\pi^2}\left[\frac{4\pi^2}{ch^2\,\omega_2\pi} - x_\gamma\,(2\pi - x_\gamma)\right]$$
avec
$$x_\gamma = \frac{2\gamma\pi}{n}\,.$$
La relation (14) s'écrit alors
$$4\pi^2\left|\frac{ch\,\omega_2 x_\gamma}{ch^2\,\omega_2\pi} - x_\gamma\frac{ch\,\omega_2(\pi - x_\gamma)}{\pi\, ch\,\omega_2\pi}\right| \geqslant \left|\frac{4\pi^2}{ch^2\,\omega_2\pi} - x_\gamma(2\pi - x_\gamma)\right| \tag{18}$$
et, lorsque ω_2 satisfait à (17), elle se réduit à
$$\left|\pi^2\frac{ch\,\omega_2 x_\gamma}{ch^2\,\omega_2\pi} - \frac{\pi x_\gamma}{ch\,\omega_2\pi}\, ch\,\omega_2(\pi - x_\gamma)\right| \geqslant \frac{(\pi - x_\gamma)^2}{2}\,. \tag{19}$$

Cette inégalité est, aux notations près, celle qu'obtient M. H. Villat[6]) comme condition nécessaire de stabilité, pour une rue alternée illimitée. Sa discussion, exposée dans l'ouvrage cité[7]), montre qu'elle est satisfaite pour toute valeur de x comprise entre 0 et 2π, dès que ω_2 vérifie (17). *Si donc ω_2 prend la valeur ω_2', l'inégalité* (18) *a lieu pour les n valeurs possibles de γ, et il en est de même de* (14).

Remarque. Tant que x_γ est différent de π, l'inégalité (18) peut être vérifiée sans que $|\omega_2|$ ait pour valeur ω_2'. Si donc n est impair, la condition (17) est toujours suffisante pour que (14) ait lieu quel que soit γ, mais elle n'est plus nécessaire. Une étude plus complète de (18) montre que, dans ce cas, $|\omega_2|$ peut rester compris entre deux limites contenant ω_2', mais l'intervalle qui les sépare tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

15. Revenons aux valeurs paires de n. Lorsque ω_2 égale ω_2', l'égalité des deux membres de (18) a lieu seulement pour $\gamma = \frac{n}{2}$ et $\gamma = n$. Chacun de ces deux cas fera l'objet d'une particulière. Bien qu'il ne s'agisse plus, désormais, que d'une rue alternée, nous développerons les calculs de telle sorte qu'ils restent valables pour toute valeur de ω satisfaisant à (16).

Dans ce cas, (14) se réduit toujours à une égalité pour $\gamma = \frac{n}{2}$, mais *ce fait n'est jamais une cause d'instabilité.* En effet, les deux membres de (15) s'annulent. $\mathfrak{A}_{\frac{n}{2}}$ est purement imaginaire, et il en est de même pour $\mathfrak{B}_{\frac{n}{2}}$ et $\mathfrak{C}_{\frac{n}{2}}$, qui sont égaux. On peut donc poser, a et b étant réels,

$$\mathfrak{B}_{\frac{n}{2}} = \mathfrak{C}_{\frac{n}{2}} = bi \ , \qquad \mathfrak{A}_{\frac{n}{2}} = ai \ .$$

Dans ces conditions, $(e_{\frac{n}{2}})$ se décompose en deux systèmes partiels

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma\frac{d}{dt}(\theta' + i\eta') &= a(\theta - i\eta') + bi(\theta' + i\eta) \\ \Gamma\frac{d}{dt}(\theta - i\eta') &= a(\theta' + i\eta) - bi(\theta - i\eta') \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma\frac{d}{dt}(\theta' - i\eta) &= a(\theta + i\eta') - bi(\theta' - i\eta) \\ \Gamma\frac{d}{dt}(\theta + i\eta') &= a(\theta' - i\eta) + bi(\theta + i\eta') \end{aligned}\right.$$

---

[6]) *H. Villat,* Théorie des tourbillons, chap. IV, p. 69, équ. 14.

[7]) Ibid., p. 70 et 71.

dans lesquels on a supprimé l'indice $\frac{n}{2}$. Chacun d'eux équivaut à deux équations distinctes du type (10), ce qui, en vertu de la remarque faite au No. 11, justifie l'affirmation précédente.

16. Plus délicate sera la discussion du cas où $\gamma = n$. C'est ici en effet que nous aurons à examiner, quel que soit n, l'argument contre la stabilité mis en lumière, pour $n = 2$, par M. G. Durand. On a d'abord

$$\mathfrak{A}_n = \mathfrak{B}_n = \mathfrak{C}_n\ ,$$

et (e_n) se réduit à

$$\Gamma i \frac{d}{dt}\, \theta'_n = \mathfrak{A}_n (\theta_n - \eta_n)$$

$$\Gamma i \frac{d}{dt}\, \eta'_n = \mathfrak{A}_n (\theta_n - \eta_n)$$

$$-\Gamma i \frac{d}{dt}\, \theta_n = \mathfrak{A}^*_n (\theta'_n - \eta'_n)$$

$$-\Gamma i \frac{d}{dt}\, \eta_n = \mathfrak{A}^*_n (\theta'_n - \eta'_n)\ .$$

Dès lors, θ_n et η_n sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} \Gamma i\, \theta_n &= -\mathfrak{A}^*_n (\theta'_{0n} - \eta'_{0n})t + \Gamma i \theta_{0n} \\ \Gamma i\, \eta_n &= -\mathfrak{A}^*_n (\theta'_{0n} - \eta'_{0n})t + \Gamma i \eta_{0n} \end{aligned} \tag{20}$$

et ces fonctions de t ne restent bornées que si $(\theta_{0n} - \eta_{0n})$ est nul. Faut-il conclure de là que, dans tout autre cas, la configuration étudiée a tendance à modifier profondément son aspect initial?

Nous allons montrer qu'*il n'en est pas ainsi lorsque, pour* $1 \leqslant \gamma \leqslant n-1$, *les solutions des* (e_γ) *restent toutes bornées*. Pour cela, il faut préciser la forme des fonctions $\zeta(t)$, $\xi(t)$ qui satisfont à (E). Les formules inverses de (6) sont

$$\begin{aligned} \zeta_j &= \frac{1}{n} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n} r_\gamma^{n-j}\, \theta_\gamma\ , \\ \xi_j &= \frac{1}{n} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=n} r_\gamma^{n-j}\, \eta_\gamma\ . \end{aligned} \tag{21}$$

On voit que θ_n et η_n ont, dans tous les ζ_k et les ξ_k le même coefficient $\frac{1}{n}$. Par ailleurs, dans les formules (20), le coefficient de t est le même pour θ_n et η_n. Si donc nous remplaçons, dans (21), les $\theta_\gamma, \eta_\gamma$ par les fonctions de t obtenues en intégrant les (e_γ), nous obtiendrons des sommes composées d'une constante, de plusieurs exponentielles, et d'un terme linéaire en t dont le coefficient sera partout le même. *Dès lors, si les solutions des* (e_γ) *restent toutes bornées pour* $1 \leqslant \gamma \leqslant n - 1$, *le mouvement des tourbillons,* **considérés comme soumis sans restriction aux équations linéarisées,** *résulte de la superposition de diverses oscillations d'amplitude constante à une translation uniforme subie par tout le système.*

17. En réalité, l'emploi des équations linéarisées est inacceptable, dès que les variables ne sont plus toutes très petites. Revenons donc, un instant, au système $(\mathfrak{E})$ exact. Les $4n$ formes linéaires

$$S = \sum^{n} (X_k + Z_k) \qquad S^* = \sum_{1}^{n} (X_k^* + Z_k^*)$$

$$U_2 = (Z_2 - Z_1), \dots U_n = (Z_n - Z_1) \qquad U_2^* = (Z_2^* - Z_1^*), \dots U_n^* = (Z_n^* - Z_1^*)$$

$$V_1 = (X_1 - Z_1), \dots V_n = (X_n - Z_1) \qquad V_1^* = (X_1^* - Z_1^*), \dots V_n^* = (X_n^* - Z_1^*)$$

sont indépendantes. On peut les prendre comme variables et isoler, dans $(\mathfrak{E})$, la dérivée par rapport à t de chacune d'elles. Deux des équations différentielles ainsi obtenues définissent $\frac{dS}{dt}$ et $\frac{dS^*}{db}$. Les $4n - 2$ autres contiennent seulement les UVU^*V^* et leurs dérivées: *elles forment un nouveau système* $(\mathfrak{E}')$ *qui régit le mouvement relatif de la configuration tourbillonnaire.* A l'aide des formules (5) et (21) on exprime les SUV S^* U^* V^* en fonction des $\eta\eta'\theta\theta'$, et ceux-ci n'interviennent, dans les UV U^*V^*, que par l'intermédiaire de

$$\begin{array}{cc} \eta_1 \dots \eta_{n-1} & \eta_1' \dots \eta_{n-1}' \\ \theta_1 \dots \theta_{n-1} & \theta_1' \dots \theta_{n-1}' \\ \theta_n - \eta_n & \theta_n' - \eta_n' . \end{array}$$

Si nous linéarisons $(\mathfrak{E}')$, le système (E') ainsi formé s'exprime au moyen de ces seules combinaisons. Sa solution générale s'obtient de suite en remplacant les $\eta\theta\eta'\theta'$ par un système quelconque de fonctions vérifiant les (e_γ). Le terme linéaire en t s'élimine alors de $\theta_n - \eta_n$ et de $\theta_n' - \eta_n'$, et il disparait ainsi complètement des solutions de (E'). Si donc les intégrales des (e_γ) restent toutes bornées (pour $1 \leqslant \gamma \leqslant n - 1$), lorsque t tend vers ∞, nous pouvons présumer que la linéarisation de $(\mathfrak{E}')$ est légitime, et admettre que l'*équilibre* **relatif** *de la configuration considérée est stable.* Les résultats qui seront obtenus dans la seconde partie confirmeront cette manière de voir et permettront d'en préciser le sens.

Remarque. On peut considérer le point d'affixe $\frac{S}{2n}$ comme le centre de la figure formée par les $2n$ tourbillons du domaine fondamental. Il est facile de voir que $\frac{dS}{dt}$ s'exprime en fonction des $U^* V^*$ seulement. Si donc $(\mathfrak{E}')$ a pu être intégré, S s'obtient par une quadrature, et le mouvement de la configuration (5) est complètement déterminé. Avec les variables $\eta_\gamma \eta'_\gamma \theta_\gamma \theta'_\gamma$, on a l'équation exacte

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{S}{2n}\right) = -\frac{J}{2il}\cot \pi\omega^* + i\frac{l\mathfrak{A}_n^*}{n\Gamma}(\theta'_n - \eta'_n) + \varphi(\ldots\theta'_\gamma, \eta'_\gamma\ldots) \cdot$$

Le premier terme du seconde membre, qui ne dépend pas de t, correspond à la translation obtenue pour un équilibre exactement réalisé. Le deuxième est constant, lui aussi, car $\theta'_n - \eta'_n$ est une intégrale première de $(\mathfrak{E})$, au même titre que $\sum_1^n (Z_k^* - X_k^*)$. Sa présence contribue seulement à modifier un peu les composantes de la translation précédente. Ainsi, une configuration voisine de la rue symétrique ou alternée peut être animée d'un mouvement transversal très lent. Le troisième terme est une fonction régulière des variables η', θ' dont le développement en série entière commence par une forme d'ordre 2 au moins. Il ne correspond plus à une translation, mais il intervient d'autant moins, par rapport aux deux précédents, que l'état du système est plus voisin de l'équilibre. Remarquons que cette étude suppose la quantité de fluide intéressée par le mouvement infiniment grande, ou tout au moins de largeur suffisante pour que, dans les limites de l'observation, la translation transversale n'ait pas d'influence sensible.

SECONDE PARTIE

Comparaison entre les conséquences des systèmes linéarisés et celles des systèmes exacts

18. Nous n'avons étudié, jusqu'ici, que les systèmes (E) d'équations linéaires à coefficients constants déduits de $(\mathfrak{E})$ par suppression des termes d'ordre supérieur à 1. Il s'agit maintenant d'apprécier la portée réelle des résultats que cette simplification permet d'obtenir. Pour cela, nous chercherons d'abord, d'une façon aussi générale que possible, dans quelles conditions et dans quelle mesure les solutions de $(\mathfrak{E})$ sont comparables à celles de (E). Nous distinguerons ensuite deux types de mouvements définis par $(\mathfrak{E})$, suivant que les solutions de (E) restent ou non bornées

lorsque t tend vers $+\infty$. Enfin, nous préciserons le sens qu'il convient de donner à la notion de stabilité, lorsqu'il s'agit d'une configuration tourbillonnaire dont l'état dépend d'un nombre fini de variables.

A. Relation générale entre les solutions de (E) et celles de ($\mathfrak{E}$)

19. Soit ($\mathfrak{E}$) un système de n équations différentielles

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{kj} x_j + \mathfrak{h}_k(x_1 \dots x_n) \ , \qquad (\mathfrak{E})$$

où les a_{kj} sont des constantes. Afin de donner plus de généralité aux développements ultérieurs, nous supposerons seulement que les fonctions $\mathfrak{h}_k$ remplissent les conditions suivantes:

1. Elles sont continues et vérifient l'inégalité de Cauchy-Lipschitz sur un domaine défini, pour une certaine valeur de M, par l'inégalité

$$\sum_1^n |x_k| < M \ . \qquad (22)$$

2. A toute valeur positive de ε, on peut associer un nombre η tel que la relation

$$\sum_1^n |x_k| < \eta \qquad (23)$$

ait pour conséquence

$$\sum_1^n |\mathfrak{h}_k| < \varepsilon \sum_1^n |x_k| \ . \qquad (24)$$

Ces deux hypothèses sont satisfaites, en particulier, lorsque les $\mathfrak{h}_k$ sont des fonctions régulières des $x_1 \dots x_n$ dont les développements en séries entières commencent par des termes d'ordre 2 au moins.

Il sera commode[7]) de considérer l'évolution du système ($\mathfrak{E}$) comme définie, dans un espace à n dimensions, par le mouvement d'un point $\mathfrak{P}(t)$ de coordonnées $x_1(t), \dots x_n(t)$. L'origine Ω des axes est une position d'équilibre de ce point. En vertu de la première condition imposée aux $\mathfrak{h}_k$, on peut associer, à toute valeur positive de Θ, un nombre m inférieur à M, tel que $\mathfrak{P}(t)$ soit correspondance biunivoque avec $\mathfrak{P}(t_0)$ et vérifie (22) sur tout l'intervalle $(t_0 - \Theta, t_0 + \Theta)$, dès que l'inégalité

$$\sum_1^n |x_k(t_0)| < m \qquad (25)$$

[7]) On trouvera l'exposé des résultats que nous obtenons ici analytiquement, présenté sous une forme géométrique, dans la note de M. Godefroy et H. Ponein signalée dans l'introduction.

est satisfaite. Autrement dit, la transformation $\mathfrak{T}(t - t_0)$ définie, lorsqu'on a fixé la valeur de t, par la relation symbolique

$$\mathfrak{P}(t) = \mathfrak{T}(t - t_0)\, \mathfrak{P}(t_0) ,$$

est biunivoque sur tout le domaine défini par (25), chaque fois que t vérifie

$$|t - t_0| < \Theta . \tag{26}$$

Le système (E) s'obtient en supprimant de $(\mathfrak{E})$ les $\mathfrak{h}_k$. Il définit, dans l'espace considéré, le mouvement d'un point $\mathbf{P}(t)$ de coordonnées $X_1(t) \dots X_n(t)$. Il est facile de voir que la transformation $T(t - t_0)$, définie par la relation

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{T}(t - t_0)\, \mathbf{P}(t_0) ,$$

est toujours biunivoque, sans qu'il y ait lieu d'imposer aucune restriction à $|t - t_0|$ ou à $\mathbf{P}(t_0)$.

20. Dans le but d'établir une relation entre $\mathbf{T}(t - t_0)$ et $\mathfrak{T}(t - t_0)$, nous supposerons désormais que ces deux transformations sont, pour toute valeur de t satisfaisant à (26), appliquées au même point Π dont les coordonnées $\alpha_1 \dots \alpha_n$ vérifient l'inégalité

$$\sum_1^n |\alpha_k| < m .$$

Ces deux transformations conservent le point Ω, et la relation qui existe entre elles, en son voisinage, se traduit par l'énoncé suivant:

Pour toute valeur finie de t, $\mathbf{T}(t - t_0)$ est la transformation linéaire tangente en Ω à $\mathfrak{T}(t - t_0)$.

Tout d'abord, $\mathbf{T}(t - t_0)$ est *linéaire*, car si les deux systèmes de fonctions $X_k(t)$ et $X'_k(t)$ satisfont à (E), il en est de même pour $[X_k(t) + X'_k(t)]$. Les coordonnées de $\mathbf{P}(t)$ s'expriment donc, en fonction de celles de Π, par des formules du type

$$X_k(t) = \sum_{j=1}^{j=n} u_{kj}\, \alpha_j , \tag{27}$$

dans lesquelles les u_{kj} dépendent seulement des t et des coefficients a_{kj} de $(\mathfrak{E})$.

La tangence de deux transformations peut être définie de différentes façons, et la position adoptée ici sera la suivante: après avoir posé

$$H_k(\alpha_1 \dots \alpha_n, t) = x_k(t) - X_k(t) , \tag{28}$$

nous montrerons qu'*il est possible d'associer, à tout couple de valeurs positives données à* Θ et ε', *un nombre* η' *inférieur à* m, *tel que les hypothèses* (26) *et*

$$\sum_1^n |\alpha_k| < \eta' \tag{29}$$

aient pour conséquence

$$\sum_1^n |H_k| < \varepsilon' \Sigma |X_k| \ . \tag{30}$$

21. Pour y parvenir, remarquons d'abord que les H_k sont nuls pour $t = t_0$ et qu'ils vérifient, quel que soit t, les relations

$$\frac{\partial}{\partial t} H_k = \Sigma a_{kj} H_j + \mathfrak{h}_k([X_1 + H_1] \cdots [X_n + H_n]) \ , \tag{31}$$

dans lesquelles les X_k sont exprimés en fonction de $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ et de t.

On peut en déduire une inégalité liant $\sum\limits_1^n |H_k|$ à sa dérivée. On a

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_1^n \left| H_k \right| \leqslant \sum_1^n \left| \frac{\partial H_k}{\partial t} \right|$$

puis, en donnant à R une valeur assez grande,

$$\left| \sum_{j=1}^{j=n} a_{kj} H_j \right| < \frac{R}{n} \sum_1^n \left| H_k \right| \ .$$

Enfin, d'après la seconde condition imposée aux $\mathfrak{h}_k$, on peut lier η à ε de telle sorte que

$$\sum_1^n |H_k + X_k| < \eta \tag{32}$$

ait pour conséquence

$$\sum_1^n |\mathfrak{h}_k(\ldots [X_j + H_j] \ldots)| < \varepsilon \sum_1^n |H_k + X_k| \ . \tag{33}$$

En faisant alors appel à l'inégalité évidente

$$\sum_1^n |H_k + X_k| \leqslant \sum_1^n |H_k| + \sum_1^n |X_k| \ , \tag{34}$$

on déduit de (31) que la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma |H_k| < (R + \varepsilon) \Sigma |H_k| + \varepsilon \Sigma |X_k| \tag{35}$$

a lieu dès que (32) est vérifiée.

Etant donnée la forme des fonctions $X_k(\alpha_1 \ldots \alpha_n, t)$, on peut trouver un nombre K tel que la double inégalité

$$e^{-K|t-t_0|}\Sigma|\alpha_k| < \Sigma|X_k| < e^{K|t-t_0|}\Sigma|\alpha_k|$$

soit toujours satisfaite. Si donc on pose

$$e^{K|\Theta|} = G\ ,$$

l'inégalité (26) entraîne

$$G\,\Sigma|X_k| > \Sigma|\alpha_k| \tag{36}$$

$$\Sigma|X_k| < G\,\Sigma|\alpha_k|\ . \tag{37}$$

Dans ces conditions, on a, d'après (35),

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma|H_k| < (R+\varepsilon)\,\Sigma|H_k| + \varepsilon G\,\Sigma|\alpha_k| \tag{38}$$

chaque fois que (32) et (26) sont vérifiées simultanément. Sachant alors que $\Sigma|H_k|$ est nul pour $t = t_0$, on déduit facilement de (38) que l'inégalité

$$\Sigma|H_k| < \frac{G\varepsilon}{R+\varepsilon}\left[e^{(R+\varepsilon)|t-t_0|} - 1\right]\Sigma|\alpha_k| \tag{39}$$

a lieu sur tout intervalle $(t_0 - t_1,\ t_0 + t_1)$ intérieur à $(t_0 - \Theta,\ t_0 + \Theta)$, le long duquel (32) est constamment vérifiée. D'ailleurs, les relations (34) (37) et (39) ont pour conséquence

$$\Sigma|X_k + H_k| < \frac{R + \varepsilon e^{(R+\varepsilon)|t-t_0|}}{R+\varepsilon}\,G\,\Sigma|\alpha_k|\ .$$

Il en résulte immédiatement que (39) est vérifiée sur tout l'intervalle $(t_0 - \Theta,\ t_0 + \Theta)$, lorsque $\Sigma|\alpha_k|$ satisfait à

$$\frac{R + \varepsilon e^{(R+\varepsilon)|\Theta|}}{R+\varepsilon}\,G\,\Sigma|\alpha_k| < \eta. \tag{40}$$

D'après (36), l'inégalité

$$\Sigma|H_k| < \frac{G^2}{R+\varepsilon}\left[e^{(R+\varepsilon)|\Theta|} - 1\right]\varepsilon\,\Sigma|X_k| \tag{41}$$

a lieu, a fortiori, dans les mêmes conditions.

Dès lors, après avoir choisi arbitrairement ε' et Θ, nous définirons ε par la relation

$$\frac{G^2}{R+\varepsilon}\left[e^{(R+\varepsilon)|\Theta|} - 1\right]\varepsilon = \varepsilon',$$

puis nous fixerons η de telle sorte que (23) entraîne (24). Nous poserons enfin

$$\eta' G\,\frac{R + \varepsilon e^{(R+\varepsilon)|\Theta|}}{R+\varepsilon} = \eta\,.$$

Dans ces conditions, les hypothèses (26) et (29) ont pour conséquences (40), (41), et finalement (30).

Cette dernière inégalité s'écrit encore, en vertu de (28),

$$\frac{\Sigma \mid X_k - x_k \mid}{\Sigma \mid X_k \mid} < \varepsilon' \tag{42}$$

et, sous cette forme, son interprétation est immédiate. Son premier membre peut, en effet, être considéré comme l'expression de l'erreur *relative* commise en utilisant (E) à la place de ($\mathfrak{E}$). Le théorème précédent montre alors qu'*il est possible de rendre cette erreur arbitrairement petite, pendant un intervalle de temps fixé d'avance, à la seule condition de partir d'un état initial suffisamment voisin de l'équilibre.*

Remarque. Si les $\mathfrak{h}_k$ sont des fonctions régulières des x_k, les H_k s'expriment par des séries entières des α_k dont les cœfficients dépendent de t. Le théorème qui vient d'être établi suffit alors à montrer que *leurs développements commencent tous par une forme d'ordre* 2 *au moins*. Nous aurions donc pu, sans inconvénient, définir par cette propriété des H_k la tangence de $\mathfrak{T}(t - t_0)$ à $T(t - t_0)$, si nous nous étions bornés à raisonner sur des transformations analytiques.

B. Les deux types de petits mouvements définis par les équations exactes

22. Lorsqu'on fait varier les coefficients a_{kj} de (E), il arrive que, pour certaines de leurs valeurs, les fonctions $X_k(t)$ restent toutes bornées lorsque t tend vers $+\infty$, quelle que soit la position de Π. Convenons d'appeler «*condition N*» l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi. Suivant qu'elle est ou non réalisée, les petits mouvements définis directement par ($\mathfrak{E}$) possèdent, dans leur ensemble, des propriétés opposées. Avant de les mettre en évidence, précisons quelques conventions d'écriture.

D'une façon générale, nous représenterons par $[\Omega]$ un domaine caractérisé par la propriété suivante: il existe deux nombres positifs $\mathfrak{l}_1$ et $\mathfrak{l}_2$ tels que les hypothèses,

$$\mathbf{P}(x_1 \ldots x_n) \text{ appartient à } [\Omega] \ , \qquad \sum_1^n |x'_k| < \mathfrak{l}_1 \ ,$$

aient pour conséquences respectives

$$\Sigma |x_k| < \mathfrak{l}_2 \qquad\qquad \mathbf{P}(x'_1 \ldots x'_n) \text{ appartient à } [\Omega] \ .$$

Le symbole $\Lambda\,[\Omega]$ désignera le domaine déduit de $[\Omega]$ par une homothétie de centre Ω et de module Λ.

23. Plaçons nous, d'abord, dans le cas où la condition N n'est pas réalisée. *Après avoir choisi arbitrairement un nombre réel Λ et un domaine $[\Omega]$ du type précédent, on peut trouver deux nombres positifs Θ et $\mathfrak{l}'$ tels que les hypothèses*

$$0 < t - t_0 < \Theta \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{P}(t_0) \text{ appartient à } \mathfrak{l}[\Omega] \\ \mathfrak{P}(t) \text{ n'appartient pas à } \Lambda\mathfrak{l}[\Omega] \end{array} \tag{43}$$

puissent être vérifiées simultanément pour toute valeur de $\mathfrak{l}$ moindre que $\mathfrak{l}'$, moyennant un choix convenable de $\mathfrak{P}(t_0)$.

On peut, en effet, après avoir introduit un nombre $L > |\Lambda|$, donner aux α_k des valeurs telles que $\Sigma|X_k|$ tende vers ∞ avec t, puis fixer Θ de manière à avoir simultanément

$$0 < t - t_0 < \Theta \qquad \begin{array}{l} \mathbf{P}(t_0) \text{ appartient à } [\Omega] \\ \mathbf{P}(t) \text{ n'appartient pas à } L[\Omega] \, . \end{array}$$

Or, si tous les α_k sont multipliés par un même facteur $\mathfrak{l}$, il en est de même des $X_k(t)$, d'après (27). Le point $\mathbf{P}(t_0)$ peut alors appartenir à $\mathfrak{l}[\Omega]$, tandis que $\mathbf{P}(t)$ est extérieur à $L\mathfrak{l}[\Omega]$. Mais pour un choix convenable de L et de ε', les hypothèses

$$\mathbf{P}(X_1 \ldots X_n) \text{ extérieur à } L\mathfrak{l}[\Omega] \qquad \Sigma|x_k - X_k| < \varepsilon' \, \Sigma|X_k|$$

ont pour conséquence nécessaire, lorsque Λ est donné,

$$\mathfrak{P}(x_1 \ldots x_n) \text{ extérieur à } \Lambda\mathfrak{l}[\Omega] \, .$$

Si donc on fixe η' de telle sorte que (26) et (29) entraînent (42), puis $\mathfrak{l}'$ de manière à vérifier (29) pour tout point Π intérieur à $\mathfrak{l}'[\Omega]$, on peut, pour toute valeur de $\mathfrak{l}$ inférieure à $\mathfrak{l}'$, satisfaire à la fois aux trois conditions (43).

24. Plaçons nous, maintenant, dans le cas où la condition N est satisfaite. Il existe alors un système de variables $y_1 \ldots y_n$ tel que $(\mathfrak{E})$ prenne la forme

$$\frac{dy_k}{dt} = is_k y_k + \mathfrak{h}_k(y_1 \ldots y_n) \, .$$

Dans chacun des s_k, le coefficient de i est positif ou nul. D'ailleurs, (E) s'obtient toujours en supprimant de $(\mathfrak{E})$ les h_k. En appelant $y_k(t)$ les nouvelles coordonnées de $\mathfrak{P}(t)$ et $Y_k(t)$ celles de $\mathbf{P}(t)$, on a, pour $t = t_0$,

$$Y_k = y_k = \beta_k \, .$$

Tous les résultats généraux précédemment établis subsistent, au remplacement près des X, x, α par les Y, y, β. On peut, en particulier, associer à tout couple de valeurs positives prises par Θ et ε', un nombre η' tel que les hypothèses

$$0 < t - t_0 < \Theta \qquad\qquad \Sigma|\beta_k| < \eta' \tag{44}$$

aient pour conséquence

$$\frac{\Sigma\,|\,y_k - Y_k\,|}{\Sigma\,|\,Y_k\,|} < \varepsilon' , \tag{45}$$

ou encore

$$\Sigma|y_k| < (1+\varepsilon')\,\Sigma|Y_k| \ .$$

Mais comme les Y_k sont de la forme $\beta_k e^{isk(t-t_0)}$, on a, pour $0 < t - t_0 < \Theta$,

$$\Sigma|\,Y_k| \leqq \Sigma|\beta_k| \ .$$

Les inégalités (44) ont alors pour conséquence

$$\Sigma|y_k| < (1+\varepsilon')\,\eta' \ .$$

Pour interpréter ce résultat, appelons $[\Omega]$ le domaine défini par la relation

$$\Sigma|\beta_k| = 1 \ . \tag{46}$$

On voit qu'il est possible d'associer, à tout couple de valeurs prises par ε' et Θ, un nombre η' tel que les hypothèses

$$\mathfrak{P}(t_0) \text{ appartient à } \eta'\,[\Omega] \qquad\qquad 0 < t - t_0 < |\Theta|$$

aient pour conséquence

$$\mathfrak{P}(t) \text{ appartient à } (1+\varepsilon')\,\eta'\,[\Omega] \ .$$

Pareil fait ne pouvait avoir lieu dans le cas précédent, car on pouvait alors, après avoir fixé arbitrairement Λ et le domaine $[\Omega]$, donner à Θ une valeur qui permît, si petit que fût $\mathfrak{l}$, de satisfaire à la fois aux trois conditions (43).

25. Même si la condition N est satisfaite et le domaine $[\Omega]$ défini par (46), il arrive qu'il soit possible d'avoir simultanément, quel que soit le couple de valeurs données à Λ et à $\mathfrak{l}$,

$$\mathfrak{P}(t_0) \text{ appartient à } \mathfrak{l}\,[\Omega]$$
$$\mathfrak{P}(t) \text{ n'appartient pas à } \Lambda\mathfrak{l}\,[\Omega] ,$$

pourvu que $|t - t_0|$ soit assez grand. Ainsi les équations

$$\frac{dz}{dt} = -iz + z^2 z^* \qquad\qquad \frac{dz^*}{dt} = iz^* + z^{*2} z$$

forment bien un système ($\mathfrak{E}$) donnant lieu à N. On a cependant une intégrale

$$zz^* = \frac{z_0 z_0^*}{1 - 2t z_0 z_0^*}$$

dont le second membre finit par dépasser tout nombre donné, quel que soit $z_0 z_0^*$. Ce fait n'est pas en contradiction avec les résultats du n° précédent puisque, si Θ et ε' sont donnés a priori, il suffit de poser

$$z_0 z_0^* < \frac{\varepsilon'}{2\Theta(1 + \varepsilon')}$$

pour avoir, sur tout l'intervalle $(t_0, t_0 + \Theta)$, la relation

$$zz^* < (1 + \varepsilon') z_0 z_0^* \ .$$

C. Elargissement de la notion de stabilité

26. Si nous voulons préciser davantage le rôle de la condition N, il est opportun de revenir, un instant, sur la notion classique de stabilité, telle qu'elle est comprise, par exemple, en Mécanique des solides. Considérons un système de solides soumis à des liaisons holonomes indépendantes du temps. Soit n le nombre de ses degrés de liberté. Sa position et son état cinétique peuvent être représentés par un point $\mathfrak{P}$ mobile dans un espace à 2 n dimensions. Lorsqu'on fait abstraction des frottements, le mouvement de ce point est régi, au voisinage d'une position d'équilibre Ω, par un système d'équations différentielles susceptible d'être mis sous la forme ($\mathfrak{E}$). Les coordonnées cinétiques de $\mathfrak{P}$ sont toutes nulles en Ω. Supposons alors, avec *Lejeune-Dirichlet*, qu'il existe une fonction de force U, indépendante du temps, et que Ω soit pour elle un maximum au sens strict. Dans ces conditions, la fonction $(T - U)$ admet en Ω la valeur minima strictement dite $(T_0 - U_0)$. L'inégalité

$$T - U < T_0 - U_0 + \mu^2$$

définit alors, pour toute valeur de μ positive et suffisamment petite, un domaine $[\Omega]_\mu$ du type défini au n° 22. D'ailleurs $(T - U)$ est une intégrale première de ($\mathfrak{E}$). Si donc $\mathfrak{P}(t_0)$ appartient à $[\Omega]_\mu$, il en est de même de $\mathfrak{P}(t)$, quel que soit t.

L'expression $T - U - (T_0 - U_0)$ est, en général, une fonction des $2n$ variables régulière en Ω, et son développement en série commence par une forme quadratique. Ce fait suggère l'idée que $\frac{1}{\mu}[\Omega]_\mu$ tend vers un domaine limite si μ tend vers zéro, et qu'il est possible de trouver deux domaines $[\Omega]'$ et $[\Omega]''$ tels que $[\Omega]_\mu$ contienne $\mu[\Omega]'$ et fasse partie de $\mu[\Omega]''$, pour toute valeur suffisamment petite de μ.

27. Revenons alors aux systèmes ($\mathfrak{E}$) du type le plus général et considérons une famille à un paramètre μ de domaines définis, d'une façon univoque, pour toute valeur positive et suffisamment petite de μ. Nous appelerons domaines $[\Omega]_\mu$, relativement à l'intervalle $0<\mu<\mu_1$, ceux pour lesquels existent deux domaines $[\Omega]'$ et $[\Omega]''$ tels que, sur cet intervalle, $[\Omega]_\mu$ contienne $\mu[\Omega]'$ et fasse partie de $\mu[\Omega]''$. L'introduction de cette notion permet de définir simplement les deux cas suivants:

1. *On peut trouver une famille de domaines* $[\Omega]_\mu$ *telle que l'appartenance de* $\mathfrak{P}(t_0)$ *à l'un quelconque d'entre eux entraîne, quel que soit t, celle de* $\mathfrak{P}(t)$. D'après le n° 25, la condition N n'est pas suffisante pour qu'il en soit ainsi. Nous dirons alors que l'équilibre est *stable en* Ω *au sens strict.*

2. Après avoir choisi convenablement une famille de domaines $[\Omega]_\mu$, *on peut associer, à tout couple de valeurs positives données à* Θ *et* ε', *un nombre* μ' *tel que les hypothèses*

$$0<t-t_0<\Theta, \qquad \mu<\mu', \qquad \mathfrak{P}(t_0) \text{ appartient à } [\Omega]_\mu, \tag{47}$$

aient pour conséquence

$$\mathfrak{P}(t) \text{ appartient à } (1+\varepsilon')\,[\Omega]_\mu\,. \tag{48}$$

Nous dirons, cette fois, que l'équilibre est *stable au sens large* ou *semi-stable.* Les résultat du n° 24 montrent, maintenant, que la condition N est suffisante. On peut, en effet, définir $[\Omega]$ par (46) et prendre pour $[\Omega]_\mu$ le domaine $\mu[\Omega]$.

Il est clair que la première éventualité est un cas particulier de la seconde. Pour que l'une ou l'autre ait lieu, la condition N est *nécessaire.* On peut, en effet, donner à Λ une valeur telle que $\Lambda[\Omega]'$ contienne $2[\Omega]''$. Mais lorsque N n'est pas réalisée, il existe, d'après (43), deux nombres Θ et μ'' tels que les trois relations

$$0<t-t_0<\Theta, \qquad \begin{array}{l}\mathfrak{P}(t_0) \text{ appartient à } \mu[\Omega]',\\ \mathfrak{P}(t) \text{ n'appartient pas à } 2\mu[\Omega]'',\end{array}$$

puissent avoir lieu simultanément, pour toute valeur de μ moindre que μ''. Il en est de même, a fortiori, si les deux dernières sont remplacées par

$$\begin{array}{l}\mathfrak{P}(t_0) \text{ appartient à } [\Omega]_\mu\,,\\ \mathfrak{P}(t) \text{ n'appartient pas à } 2\,[\Omega]_\mu\,.\end{array}$$

Dès lors, (48) ne saurait être une conséquence nécessaire de (47).

En résumé, *la condition N est nécessaire et suffisante pour assurer la semi-stabilité. La stabilité au sens strict exige aussi sa réalisation, mais n'en résulte pas inéluctablement.*

28. Dans nombre de problèmes régis par des équations du type ($\mathfrak{E}$), il serait illusoire de poursuivre l'étude théorique des mouvements considérés, pour de trop grandes valeurs de $(t - t_0)$. C'est ce qui a lieu en hydrodynamique, chaque fois que la viscosité du fluide est négligée; un tourbillon sensiblement ponctuel à un instant donné finit par ne plus l'être du tout. D'ailleurs, aucune vérification physique d'un résultat mathématique ne peut durer indéfiniment. Ajoutons que l'état d'un système matériel n'est jamais donné avec une exactitude parfaite. Dans ces conditions, il est impossible, en toute rigueur, de reconnaître expérimentalement si la stabilité au sens strict est ou non réalisée. C'est donc à la notion de semi-stabilité, liée comme on vient de le voir à la vérification de la condition N, qu'il semble normal d'attacher le plus d'importance.

Conclusion

Les résultats obtenus au cours de la première partie mettent en lumière certains cas dans lesquels la condition N peut être satisfaite. Parmi tous les systèmes de tourbillons du type (5), il faut exclure, pour n pair, ceux qui ne vérifient pas (16). En particulier, *une configuration alternée doit donner lieu à* (1). *Lorsqu'il en est ainsi, la condition N est effectivement réalisée pour le système différentiel* ($\mathfrak{E}'$) *qui définit le mouvement* **relatif** *des tourbillons. On est alors dans un cas de* **semi-stabilité**. Naturellement, ce résultat ne suffit pas à prouver que la rue illimitée correspondante possède une propriété du même genre, mais il milite en faveur de cette hypothèse. Tout d'abord, aucun argument ne s'oppose plus à cette possibilité, puisque celui de M. G. Durand a pu être écarté. On prévoit, en outre, que la notion de semi-stabilité, précisée ici dans le cas d'un système à nombre fini de variables, pourra être définie dans des circonstances moins restrictives. Ce point sera traité ultérieurement, je l'espère bien, comme application d'un problème plus général dont je poursuis actuellement l'étude.

(Reçu le 30 janvier 1939.)