Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Zur Einheitentheorie der einfachen Algebren.
Autor: Eichler, M.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11889

Zur Einheitentheorie der einfachen Algebren

Von M. Eichler, Göttingen

Einleitung

Noch vor wenigen Jahren befand sich die Theorie der einfachen Algebren in einem Zustand rapider Weiterentwicklung. Nachdem die meisten Probleme, die dieser Entwicklung Richtung und Kraft gaben, gelöst wurden, scheint heute auf dem genannten Gebiet eine gewisse Ruhe eingetreten zu sein. Allein die Einheitentheorie ist noch immer in keiner Hinsicht abgerundet. Die folgenden Seiten enthalten nun einen Versuch, an der Schließung dieser Lücke zu arbeiten. Da schon beim Aufsuchen sinnvoller Problemstellungen unbekannter Boden betreten werden muß, kann zur Einleitung nur wenig über den Inhalt dieser Arbeit gesagt werden[1]). Von der Überzeugung ausgehend, daß die Begriffswelt der Zahlengeometrie die geeignete Grundlage für den Aufbau eines tragenden Gerüstes für die hyperkomplexe Einheitentheorie abgibt, beschäftige ich mich hier mit Darstellungen der Einheitengruppen durch affine Abbildungen eines Raumes auf sich. In dieser geometrischen Gestalt trat sie erstmalig in der analytischen Zahlentheorie[2]) auf und führte auf geometrische Untersuchungen, die bis heute noch nicht in befriedigender Weise abgeschlossen werden konnten. Die Hauptaufgabe der Einheitentheorie sehe ich nun in der Auffindung von Invarianten dieser Abbildungsgruppen. Im Mittelpunkt der folgenden Seiten wird eine topologische Invariante stehen, die im Falle eines algebraischen Zahlkörpers mit der Erzeugendenanzahl der Einheitengruppe identisch ist, und der Satz, der diese Invariante beschreibt, darf mit manchem Recht als die sinngemäße Übertragung des Dirichletschen Einheitensatzes auf einfache Algebren bezeichnet werden.

Zur Orientierung sei noch bemerkt: Der § 1 hat mit der Einheitentheorie selber noch nichts zu tun, er enthält einige Hilfssätze über gewisse mit einfachen Algebren zusammenhängende kontinuierliche Gruppen. In § 2 wird die Einheitentheorie noch einmal soweit verfolgt, wie es ihre

[1]) Zwei frühere Veröffentlichungen über die Einheitentheorie einfacher Algebren (Eichler, a. a. O.[3]) und Neuere Ergebnisse der Theorie der einfachen Algebren, Jahresber. Deutsche Math.-Verein. **47** (1937), S. 198, Nrn. 14—17, sollen, um das Verständnis der vorliegenden Arbeit zu erleichtern, im wesentlichen nicht vorausgesetzt werden, obwohl ich in ihnen, besonders in der zuletzt genannten, die hier zugrunde gelegte Problemstellung bereits vorgezeichnet habe. Außerdem ist ein Irrtum zu berichtigen.

[2]) *K. Hey*, Analytische Zahlentheorie in Systemen hyperkomplexer Zahlen. Diss. Hamburg 1929.

Anwendung in der analytischen Zahlentheorie erfordert, frühere Behandlungen dieses Themas[3]) beschränkten sich auf nullteilerfreie Algebren, waren auch methodisch nicht ganz befriedigend. In § 3 wird der Hauptsatz vorbereitet und formuliert (Nr. 9), in § 4 wird er bewiesen. Der § 5 schließlich enthält Ausblicke auf eine Ausgestaltung der Einheitentheorie in der hier eingeschlagenen Richtung, darunter speziell eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes und die Behandlung gewisser Quaternionenalgebren.

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen

2. A sei eine einfache Algebra über dem rationalen Zahlkörper k und $\iota_1, \iota_2, \ldots$ eine Basis von A/k. Die Norm $n(\xi)$ der allgemeinen Zahl

$$\xi = \sum \iota_i x_i \tag{1}$$

aus A ist ein Polynom in den Koordinaten x_i von ξ mit rationalen Koeffizienten, sie hat daher für Koordinaten aus einem beliebigen Zahlkörper einen Sinn. Der Gegenstand der nun folgenden vorbereitenden Betrachtungen ist die Gruppe $\mathfrak{m}$ aller Zahlen (1) mit beliebigen reellen Koordinaten und mit der Norm 1. $\mathfrak{m}$ ist eine kontinuierliche Gruppe, deren gruppentheoretische und topologische Eigenschaften zu beschreiben sind. Die Einfachheit in der Ausdrucksweise erfordert es, die Zahlen (1) der Algebra A neben ihrer ursprünglichen Bedeutung auch als Punkte mit den Koordinaten x_i eines affinen Raumes aufzufassen, der dann konsequenterweise ebenfalls mit A zu bezeichnen ist.

Es mögen R, K, Q den Körper der reellen Zahlen, den Körper der komplexen Zahlen und das System der Hamiltonschen Quaternionen bedeuten. Z sei das Zentrum von A; der Grad von A/Z sei n. Es gebe $r_1 + r_3$ reelle und $2r_2$ imaginäre zu Z konjugierte Zahlkörper, A/Z sei an r_3 (reellen) unendlichen Primstellen verzweigt (r_3 ist bekanntlich höchstens dann $\neq 0$, wenn n gerade ist). Dann zerfällt das direkte Produkt $A \times R$ folgendermaßen in eine direkte Summe:

$$A \times R = A_1 + \cdots + A_{r_1} + A_{r_1+1} + \cdots + A_{r_1+r_2} + A_{r_1+r_2+1} + \cdots A_{r_1+r_2+r_3}\,,$$

wo $A_1, \cdots, A_{r_1}$ volle Matrixalgebren vom Grade n über R, $A_{r_1+1}, \cdots, A_{r_1+r_2}$ volle Matrixalgebren vom Grade n über K und $A_{r_1+r_2+1}, \cdots, A_{r_1+r_2+r_3}$ volle Matrixalgebren vom Grade $\frac{n}{2}$ über Q sind. Es mögen ferner

---

[3]) *K. Hey*, a. a. O.[2]). *M. Eichler*, Über die Einheiten der Divisionsalgebren. Math. Ann. **114** (1937), S. 635 (Sätze 4 und 5).

bezeichnen: $\mathfrak{m}_i$ die Gruppe aller Zahlen aus A_i mit der Norm 1 bezüglich R, ζ_i irgendwelche Zahlen aus dem Zentrum von A_i und $\mathfrak{z}$ die Gruppe aller Zahlen

$$\zeta = \sum_{i=1}^{r_1+r_2+r_3} \zeta_i \qquad \text{mit} \qquad n(\zeta) = \prod_{i=1}^{r_1+r_2+r_3} n(\zeta_i) = 1 \ . \tag{2}$$

Dann ist $\mathfrak{m}$ das folgende direkte Produkt:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \times \ldots \times \mathfrak{m}_{r_1+r_2+r_3} \times \mathfrak{z} \ , \tag{3}$$

und $\mathfrak{z}$ ist das Zentrum von $\mathfrak{m}$.

3. Für $i > r_1$ ist $n(\zeta_i) > 0$. Es sei $\mathfrak{z}^+$ die Gruppe aller Zahlen der Gestalt (2) mit $n(\zeta_i) > 0$ für alle i. Ferner sei

$$\mathfrak{m}^+ = \mathfrak{m}_1 \times \ldots \times \mathfrak{m}_{r_1+r_2+r_3} \times \mathfrak{z}^+ \ . \tag{4}$$

Es gilt offenbar

$$(\mathfrak{m} : \mathfrak{m}^+) = 2^{r_1-1} \ . \tag{5}$$

$\mathfrak{m}^+$ *ist eine zusammenhängende Gruppe, und zwar die größte zusammenhängende Untergruppe von* $\mathfrak{m}$. Denn man verifiziert mühelos: 1. die $\mathfrak{m}_i$ und $\mathfrak{z}^+$ sind zusammenhängende Gruppen; 2. dafür, daß sich zwei in $\mathfrak{m}$ gelegene Punkte $\mu = \Sigma \mu_i$ und $\mu' = \Sigma \mu'_i$ mit μ_i und μ'_i in A_i durch eine stetige und ganz in $\mathfrak{m}$ verlaufende Kurve verbinden lassen, ist

$$\frac{n(\mu_i)}{n(\mu'_i)} > 0 \quad \text{für alle } i$$

notwendig und hinreichend.

Die $\mathfrak{m}_i$ brauchen im Gegensatz zu einer früher[1]) ausgesprochenen Behauptung nicht einfach zusammenhängend zu sein. Für $i \leqq r_1$ lassen sie sich als die Mannigfaltigkeit der n-*d*imensionalen orientierten Parallelotope mit dem Volumen 1 und einer Spitze im Nullpunkt im Euklidischen Raume deuten; $\mathfrak{m}_i$ ist dann das topologische Produkt $\mathfrak{o}_i\,\mathfrak{a}_i$, wobei $\mathfrak{o}_i$ die Gruppenmannigfaltigkeit der n-dimensionalen euklidischen Drehungen und $\mathfrak{a}_i$ die Mannigfaltigkeit der n-dimensionalen orientierten Parallelotope mit dem Volumen 1 ohne Rücksicht auf die Lage ist. Entsprechendes gilt für $i > r_1$, nur muß jetzt $\mathfrak{o}_i$ die unitäre Gruppe mit Koeffizienten aus K bzw. Q in n bzw. $\frac{n}{2}$ Dimensionen sein. $\mathfrak{m}^+$ *ist wegen (4) das topologische Produkt der* $\mathfrak{m}_i$ *und* $\mathfrak{z}^+$*; die* $\mathfrak{a}_i$ *und* $\mathfrak{z}^+$ *sind einfach zusammenhängend.*

§ 2. Die Einheitengruppen als diskontinuierliche Abbildungsgruppen

4. Zu einer Einheit ε gehört eindeutig eine solche affine Abbildung

$$x_i' = \sum m_{ik}^{(\varepsilon)} x_k \tag{6}$$

von A auf sich, daß

$$\xi\varepsilon = (\sum \iota_i x_i)\varepsilon = \sum \iota_i x_i'$$

ist. *Wir wollen uns im folgenden auf die Betrachtung der Einheiten mit der Norm* $+1$ *beschränken*, diesen entsprechen solche affine Abbildungen (6), welche m fest lassen. Das Ziel dieses Paragraphen ist es, die Existenz eines stetig berandeten Diskontinuitätsbereiches d der Gruppe e der Abbildungen (6) in m zu beweisen, wenn ε alle Einheiten (mit der Norm $+1$) aus einer Maximalordnung l von A durchläuft. Ich liefere diesen Existenznachweis auf zwei Wegen. Der erste geht auf die Dissertation von K. Hey[2]) zurück und ist zweifellos der einfachere; er ist jedoch für nullteilerhaltige Algebren nicht durchführbar. Der zweite stützt sich auf einen tiefliegenden Satz von Minkowski.

Der erste Existenznachweis für Diskontinuitätsbereiche d für die Gruppe e in m geht von den beiden folgenden Hilfssätzen aus[3]):

I. *Ist* B *irgend ein endlicher Bereich in* m (*d. h haben alle Punkte von* B *beschränkte Koordinaten*), *so gibt es höchstens endlich viele Einheiten* ε *in* l *von der Art, daß mit einer Zahl* β *aus* B *auch* $\beta\varepsilon$ *in* B *liegt.*

II. *Enthält* A *keine Nullteiler, so gibt es einen endlichen Bereich* A *in* m, *so daß für jede Zahl* ξ *aus* m *mindestens eine Einheit* ε *in* l *existiert, für welche* $\xi\varepsilon^{-1}$ *in* A *liegt.*

Dieser zweite Hilfssatz gilt nicht, sobald A Nullteiler enthält.

Es sei A ein stetig berandeter Bereich von der in II. beschriebenen Art. Der Bereich, dessen Punkte aus denen von A durch die Substitution (6) hervorgehen, werde mit $\mathsf{A}\varepsilon$ bezeichnet. Nach I. gibt es nur endlich viele Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ von der Art, daß A mit $\mathsf{A}\varepsilon_i$ Punkte gemeinsam hat. Ich setze nun

$$\mathsf{A}_1 = \mathsf{A} - \mathsf{A} \frown \mathsf{A}\varepsilon_1 + \mathsf{A} \frown \mathsf{A}\varepsilon_1 \frown \mathsf{A}\varepsilon_1^2 - + \cdots \ ;$$

in diesem Ausdruck können höchstens endlich viele Glieder wirklich auftreten, denn nur dann kann $\mathsf{A} \frown \cdots \frown \mathsf{A}\varepsilon_1^i \neq 0$ sein, wenn ε_1^i unter den $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ vorkommt. Folglich ist A_1 auch ein stetig berandeter und endlicher Bereich.

Nun ist erstens

$$\mathsf{A}_1 \frown \mathsf{A}_1 \varepsilon_1 = 0$$

und zweitens

$$\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_1 \varepsilon_1 + \mathsf{A}_1 \varepsilon_1^2 + \cdots = \mathsf{A} + \mathsf{A} \varepsilon_1 + \mathsf{A} \varepsilon_1^2 + \cdots$$

Beide Gleichungen lassen sich unmittelbar durch Anwendung der bekannten Rechengesetze der mengentheoretischen Addition, Subtraktion und Durchschnittsbildung (diese entspricht der Multiplikation), ohne Zurückgreifen auf die Anschauung, verifizieren. Aus der zweiten folgt

$$\sum_{\varepsilon} \mathsf{A}_1 \varepsilon = \sum_{\varepsilon} \mathsf{A} \varepsilon = \mathsf{m} \, ,$$

und wegen der ersten kann A_1 höchstens noch mit $\mathsf{A}_1 \varepsilon_2, \ldots, \mathsf{A}_1 \varepsilon_s$ Punkte gemeinsam haben. Der gleiche Prozeß wird darauf auf den Bereich A_1 und die Einheit ε_2 angewendet, und man erhält einen Bereich A_2, der stetig berandet ist, die Relation

$$\sum_{\varepsilon} \mathsf{A}_2 \varepsilon = \mathsf{m}$$

erfüllt und höchstens mit $\mathsf{A}_2 \varepsilon_3, \ldots, \mathsf{A}_2 \varepsilon_s$ Punkte gemeinsam hat. Höchstens endlich viele Operationen dieser Art führen schließlich zu einem endlichen und stetig berandeten Bereich d mit den beiden Eigenschaften: 1. für jedes ε aus I ist $\mathsf{d} \frown \mathsf{d} \varepsilon = 0$. 2. $\sum \mathsf{d} \varepsilon = \mathsf{m}$. d ist also ein stetig berandeter Diskontinuitätsbereich von e in m, denn für jeden Punkt ξ aus m gibt es genau eine Einheit ε, so daß $\xi \varepsilon^{-1}$ in d liegt.

5. Wenn A nicht nullteilerfrei ist, kann der Existenzbeweis für d auch folgendermaßen geführt werden: Es sei m der Rang von A/k. Die Zahlen aus A werden dann durch Matrizen m-ten Grades dargestellt, und zwar speziell so, daß die Zahlen der vorgelegten Maximalordnung I durch ganzzahlige Matrizen dargestellt werden; die Einheiten aus I erscheinen dann als ganzzahlige unimodulare Matrizen.

Ist e_m die Gruppe aller ganzzahligen unimodularen Substitutionen m-ten Grades, so existiert nach Minkowski[4]) ein durch endlich viele Ebenen begrenzter Diskontinuitätsbereich r_m für e_m im Raume S_m der Koeffizienten der definiten quadratischen Formen. Nun entsteht S_m aus dem Raume A_m aller m-reihigen Matrizen so: ist ξ eine beliebige m-reihige Matrix und ξ' ihre transponierte, so ist $\varphi = \xi' \xi$ die Koeffizientenmatrix einer definiten quadratischen Form, und umgekehrt läßt sich jede Koeffizientenmatrix φ in dieser Gestalt erhalten. Es sei d'_m der Bereich in

[4]) Diskontinuitätsbereiche für arithmetische Äquivalenz, J. reine angew. Math. **129** = Ges. Abh. II, Leipzig und Berlin 1911, S. 53.

A_m, der bei der Abbildung $A_m \to S_m$ auf r_m abgebildet wird. Er wird von den Mannigfaltigkeiten begrenzt, deren Bilder in S_m die Grenzebenen von r_m sind, wegen des Bildungsgesetzes von S_m sind erstere Flächen zweiten Grades; $\mathfrak{d}'_m$ ist mithin stetig berandet. Zu jeder Zahl ξ aus A_m gibt es jetzt genau ein Einheitenpaar ε und $-\varepsilon$, so daß $\xi\varepsilon^{-1}$ und $-\xi\varepsilon^{-1}$ in $\mathfrak{d}'_m$ liegen. Unter Benutzung dieser Tatsache zeigt man leicht, daß es einen stetig berandeten Diskontinuitätsbereich $\mathfrak{d}_m$ von $\mathfrak{e}_m$ in A_m innerhalb von $\mathfrak{d}'_m$ gibt. Nun ist aber A ein linearer Teilraum von A_m und $A \cap \mathfrak{d}_m$ ist ein Diskontinuitätsbereich von $\mathfrak{e} = A \cap \mathfrak{e}_m$; er wird ebenfalls durch endlich viele Flächen zweiten Grades begrenzt und ist daher stetig berandet. *Schließlich ist* $\mathfrak{d} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{d}_m = \mathfrak{m} \cap (A \cap \mathfrak{d}_m)$ *ein stetig berandeter Diskontinuitätsbereich von* $\mathfrak{e}$ *in* $\mathfrak{m}$.

6. Für später wichtig ist noch die folgende Feststellung, die aus beiden Beweisen für die Existenz von $\mathfrak{d}$ fast unmittelbar hervorgeht: $\mathfrak{d}$ *stößt längs seines Randes nur an endlich viele andere „mit* $\mathfrak{d}$ *äquivalente“ Diskontinuitätsbereiche* $\mathfrak{d}\varepsilon$ *an.*

§ 3. Die Einheitengruppen als Fundamentalgruppen topologischer Mannigfaltigkeiten

7. In **4** wurde die Gruppe der Abbildungen (6), die zu Einheiten aus einer Maximalordnung $\mathfrak{l}$ von A gehören, mit $\mathfrak{e}$ bezeichnet; von jetzt ab soll die Gruppe dieser Einheiten selbst mit $\mathfrak{e}$ bezeichnet werden. Mißverständnisse sind nicht zu befürchten, da von jetzt ab auf die Koordinatendarstellung (1) der Zahlen von A kaum mehr zurückgegriffen zu werden braucht.

Nicht die ganze Gruppe $\mathfrak{e}$ ist der Gegenstand der nun folgenden Betrachtungen, sondern irgend eine Untergruppe $\acute{\mathfrak{e}}$ von $\mathfrak{e}$ mit den drei Eigenschaften: 1. *Der Index* $(\mathfrak{e} : \acute{\mathfrak{e}})$ *ist endlich.* 2. $\acute{\mathfrak{e}}$ *enthält keine Einheiten von endlicher Ordnung.* 3. $\acute{\mathfrak{e}} \subset \mathfrak{m}^+$.

Unter Umständen kann bereits der Durchschnitt

$$\mathfrak{e}^+ = \mathfrak{e} \cap \mathfrak{m}^+ \tag{7}$$

diese Eigenschaften haben. Der Index von $\mathfrak{e}^+$ in $\mathfrak{e}$ ist wegen (5) eine Potenz von 2:

$$(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}^+) = 2^s \qquad \text{mit} \qquad 0 \leqq s \leqq r_1 - 1\,, \tag{8}$$

und zwar läßt sich dieser Index bereits im Zentrum Z von A berechnen, ist nämlich $\bar{\mathfrak{e}}_Z$ die Gruppe der Einheiten aus Z, die an den unendlichen Verzweigungsprimstellen von A/Z positiv sind, so ist[5])

$$(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}^+) = (\bar{\mathfrak{e}}_Z : \mathfrak{e} \frown \mathfrak{z}^+) . \tag{9}$$

Wenn aber die Gruppe (7) noch Einheiten von endlicher Ordnung enthält, so kann man eine Untergruppe $\acute{\mathfrak{e}}$ mit den geforderten Eigenschaften folgendermaßen finden: Die als Ordnungen von Elementen von Einheiten aus A auftretenden Zahlen haben ein (endliches) gemeinsames Vielfaches e. Ist $\mathfrak{p}$ ein nicht in $2e$ aufgehendes Primideal aus Z, so haben alle Einheiten ε aus $\mathfrak{I}$ mit

$$\varepsilon \equiv 1 \pmod{\mathfrak{I}\,\mathfrak{p}} \tag{10}$$

unendliche Ordnung. Denn wäre $\varepsilon^e = 1$, $\varepsilon \neq 1$, so wäre

$$\frac{\varepsilon^e - 1}{\varepsilon - 1} = \varepsilon^{e-1} + \varepsilon^{e-2} + \cdots + \varepsilon + 1 = 0 \ ,$$

doch hieraus und aus (10) würde die unrichtige Kongruenz $e \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ folgen. Daraus, daß $\mathfrak{p}$ ungerade sein sollte, ergibt sich ferner: die Gruppe $\mathfrak{e}^{(\mathfrak{p})}$ aller Einheiten mit der Eigenschaft (10) aus $\mathfrak{I}$ ist in $\mathfrak{m}^+$ enthalten. Schließlich ist der Index $(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}^{(\mathfrak{p})})$ endlich, denn die Nebengruppen von $\mathfrak{e}^{(\mathfrak{p})}$ in $\mathfrak{e}$ verteilen sich auf die endlich vielen Restklassen von Einheiten aus $\mathfrak{e}$ mod $\mathfrak{I}\mathfrak{p}$. (Im Falle $r_1 = r_2 = 0$, $n = 2$ liegt eine total definite Quaternionenalgebra vor. Dann sind alle maximalen kommutativen Unterkörper von A total imaginäre Erweiterungen zweiten Grades des total reellen Zahlkörpers Z. Unter Benutzung des Dirichletschen Einheitensatzes bestätigt man dann leicht nacheinander: 1. Alle Einheiten aus $\mathfrak{e}^{(\mathfrak{p})}$ liegen in Z. 2. Der Index $(\mathfrak{e} \frown Z : \mathfrak{e}^{(\mathfrak{p})})$ ist endlich. 3. Der Index $(\mathfrak{e} : \mathfrak{e} \frown Z)$ ist endlich[6])). Sonst aber, wenn nicht $r_1 = r_2 = 0$, $n = 2$ ist, läßt sich der Index $(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}^{(\mathfrak{p})})$ leicht direkt berechnen[5]); ich gebe das Resultat für den Fall an, wo $\mathfrak{p}$ in der Diskriminante von A/Z nicht aufgeht: Ist $\mathfrak{e}_Z$ die Gruppe aller Einheiten aus Z und $\mathfrak{e}_Z^{(\mathfrak{p})}$ die Gruppe der Einheiten aus Z mit der Eigenschaft (10), und ist schließlich $n_{Z/k}(\mathfrak{p}) = q$, so ist

$$(\mathfrak{e} : \mathfrak{e}^{(\mathfrak{p})}) = \frac{(\mathfrak{e}_Z : \mathfrak{e}_Z^{(\mathfrak{p})})}{(\mathfrak{e}_Z : \bar{\mathfrak{e}}_Z)} \; \frac{(q^n - 1)\, q^n - q) \ldots (q^n - q^{n-1})}{q - 1} \ . \tag{11}$$

---

[5]) Die Rechnung läßt sich durchführen auf Grund von Satz 5 in: *M. Eichler*, Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen, J. reine angew. Math. **179** (1938), S. 227.

[6]) Ein Beweis dieser Tatsache findet sich auch in: *M. Eichler*, Über die Idealklassenzahl total definitiver Quaternionenalgebren, Math. Z. **43** (1937), S. 102.

8. Für die in 7 genannten Gruppen $\acute{e}$ an Stelle von e bleiben, wegen der Endlichkeit des Index $(e : \acute{e})$, die Ergebnisse des § 2 über die Existenz eines Diskontinuitätsbereiches von e in m wörtlich in Geltung. Jetzt greifen gruppentheoretische und geometrische Vorstellungen in charakteristischer Weise ineinander: die Formeln aus **4**:

$$\sum_{\varepsilon} d\,\varepsilon = m\,, \qquad d \frown d\,\varepsilon = 0\,,$$

welche einen Diskontinuitätsbereich d charakterisieren, lassen sich noch anders schreiben: Durchlaufen δ und δ' die Gesamtheit aller als Gruppenelemente aufgefaßten Punkte aus d, so läßt sich der Inhalt beider Formeln auch so ausdrücken:

$$\sum \delta\, e = m\,, \qquad \delta\, e \neq \delta'\, e \quad (\text{für } \delta \neq \delta')\,.$$

Diese Formeln geben aber die Zerlegung von m in linksseitige Nebengruppen nach e wieder. d ist also gleichzeitig ein Repräsentantensystem für die linksseitigen Nebengruppen von e in m. Wir wollen kurz

$$de = m$$

schreiben.

Wegen der Endlichkeit der Indizes (5) und $(e : \acute{e})$ kann man jetzt die Ergebnisse des § 2 gleich allgemeiner so ausdrücken:

Es gibt ein stetig begrenztes Repräsentantensystem d[7]) *der linksseitigen Nebengruppen von* $\acute{e}$ *in* m^+; d *hat dieselbe Dimension wie* m^+; d *stößt längs seines Randes nur an endlich viele äquivalente Diskontinuitätsbereiche* $d\,\varepsilon$ *an.*

Wenn d und $d\varepsilon$ längs einer Randmannigfaltigkeit f_ε aneinander anstoßen, so identifiziere f_ε mit $f_\varepsilon \varepsilon^{-1}$ oder „biege d so zusammen", daß f_ε und $f_\varepsilon \varepsilon^{-1}$ aufeinander liegen. Durch diesen in der Topologie üblichen Prozeß der Ränderzuordnung entsteht eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit D; sie hat folgende Eigenschaften:

1. m^+ *ist eine Überlagerung von* D, *und zwar eine unverzweigte.* Es gibt nämlich keinen Punkt δ in d, der bei Multiplikation mit einer von 1 verschiedenen Einheit ε aus $\acute{e}$ fest bleibt, denn aus $n(\delta) = 1$ und $\delta\varepsilon = \delta$ folgt $\varepsilon = 1$.

2. m^+ *ist eine reguläre Überlagerung von* D, denn die Überlagerungswege auf m^+ eines geschlossenen Weges auf D sind entweder alle offen oder alle geschlossen.

3. *Folglich ist* $\acute{e}$ *die Monodromiegruppe der Überlagerung* m^+/D.

---

[7]) Eine Verwechslung mit dem früher ebenfalls mit d bezeichneten Diskontinuitätsbereich von e in m ist ausgeschlossen, da dieser nicht mehr vorkommen wird.

Hieraus folgt schließlich, weil d nur an endlich viele äquivalente Bereiche anstößt, daß $\acute{\mathsf{e}}$ durch endlich viele Einheiten erzeugt werden kann. Das ergibt wegen der Endlichkeit des Index $(\mathsf{e} : \acute{\mathsf{e}})$: e *besitzt ein endliches Erzeugendensystem.*

4. D enthält nicht mehr, wie d, irgendwelche Willkürlichkeiten, sondern ist durch m^+ und $\acute{\mathsf{e}}$ eindeutig bestimmt. Ich führe deshalb die folgende Bezeichnung ein:

$$\mathsf{D} = \mathsf{m}^+/\acute{\mathsf{e}}\ ^{8)}\ .$$

Wegen der Beziehung von D zu der Zerlegung von m^+ in linksseitige Nebengruppen nach $\acute{\mathsf{e}}$ kann man D als *das System der linksseitigen Nebengruppen von* $\acute{\mathsf{e}}$ *in* m^+ bezeichnen. D ist eine (homogene) Mannigfaltigkeit.

9. Eine vollständige Beschreibung von D kommt nach 8 einer vollständigen Beschreibung von $\acute{\mathsf{e}}$ gleich, das letztere ist das Ziel der Einheitentheorie; leider liegt aber die Lösung der ersteren Aufgabe noch recht fern. Eine wichtige topologische Invariante von D ist die folgendermaßen definierte Zahl r: D läßt sich stetig auf eine Mannigfaltigkeit R der Dimension r abbilden, wobei $\acute{\mathsf{e}}$ in deren Fundamentalgruppe übergeht, aber nicht auf eine Mannigfaltigkeit von kleinerer Dimension. Der Hauptsatz dieser Arbeit besteht in einer Beschreibung von R und r; zu seiner Formulierung ist aber noch eine kleine Vorbereitung nötig.

Es sei o eine Untergruppe von m^+. Dann läßt sich genau wie in 8 das System

$$\mathsf{S} = \mathsf{o}\backslash\mathsf{m}^+\ ^{9)} \tag{12}$$

der rechtsseitigen Nebengruppen von o in m^+ bilden; die Punkte von S sind die Nebengruppen $\mathsf{o}\mu$. Man kann in naheliegender Weise den Umgebungsbegriff von m^+ auf S übertragen, *so daß* S *ein stetiges Abbild von* m^+ *ist.* Ebenso wie die Multiplikation der Zahlen μ aus m^+ mit Zahlen ν aus m^+ stetige Abbildungen $\mu \to \mu\nu$ von m^+ auf sich ergibt, liefert auch die Multiplikation der Nebengruppen $\mathsf{o}\mu$ mit Zahlen ν stetige Abbildungen $\mathsf{o}\mu \to \mathsf{o}\mu\nu$ von S auf sich. Eine Abbildung $\mathsf{o}\mu \to \mathsf{o}\mu\nu$ ist dann und nur dann von der identischen verschieden, wenn nicht $\mu\nu\mu^{-1} \subset \mathsf{o}$ für alle μ aus m^+ gilt. Ist o_1 der größte in o enthaltene Normalteiler von m^+, so liefert die Multiplikation der Punkte von S mit Zahlen aus m^+ eine mit der Faktorgruppe $\mathsf{m}^+/\mathsf{o}_1$ isomorphe Gruppe stetiger Abbildungen von S auf sich. Wir werden es im folgenden nur mit solchen Fällen zu tun haben, wo $\mathsf{o}_1 = 1$ ist.

---

[8]) Lies: m^+ rechts durch $\acute{\mathsf{e}}$ dividiert.

[9]) Lies: m^+ links durch o dividiert.

Wenn $\mathsf{é}$ auch auf S einen Diskontinuitätsbereich r besitzt, so erhält man bei der Abbildung $\mathsf{m}^+ \to \mathsf{S}$ in der Gestalt des Systems

$$\mathsf{R} = \mathsf{o} \backslash \mathsf{m}^+ / \mathsf{é}\ ^{10)} \tag{13}$$

der Komplexe $\mathsf{o}\varrho\mathsf{é}$ in der Doppelmodulzerlegung

$$\mathsf{m}^+ = \sum_{\varrho} \mathsf{o}\varrho\mathsf{é} = \mathsf{or}\mathsf{é}$$

ein stetiges Abbild von D, welches von S unverzweigt überlagert wird, und welches in ähnlicher Weise wie D die Eigenschaften von $\mathsf{é}$ widerspiegelt.

Hauptsatz. *Man erhält alle Mannigfaltigkeiten* R *kleinster Dimension mit der Fundamentalgruppe* $\mathsf{é}$, *auf die sich* D *stetig abbilden läßt, in der Form* (13), *indem man für* o *alle möglichen maximalen orthogonalen*[11] *Untergruppen von* m^+ *nimmt. Die so erhaltenen* R *sind sämtlich untereinander homöomorph, und ihre Dimension ist*

$$r = r_1 \frac{n(n+1)}{2} + r_2 n^2 + r_3 \frac{n(n-1)}{2} - 1\ . \tag{14}$$

Genauer gilt: $\mathsf{é}$ *ist eine in* S *diskontinuierliche Abbildungsgruppe und besitzt dort einen Diskontinuitätsbereich* r; R *entsteht aus* r *durch Ränderzuordnung (ebenso wie* D *aus* d *in* 8). S *ist die universelle Überlagerung und* $\mathsf{é}$ *die Fundamentalgruppe von* R.

10. Bevor der Hauptsatz bewiesen wird, sind noch zwei erklärende Bemerkungen nützlich.

1. A/k sei volle Matrixalgebra n-ten Grades. Dann ist die Gruppe aller ganzzahligen unimodularen Substitutionen n-ten Grades eine Einheitengruppe e von A. Wenn man für o die Gruppe der Substitutionen nimmt, welche die Form $\sum x_1^2$ fest lassen, so erhält man eine mit S homöomorphe Mannigfaltigkeit S', indem man jeder Matrix ξ von A das Produkt $\varphi = \xi' \xi$ mit ihrer transponierten zuordnet. φ ist bekanntlich die Koeffizientenmatrix einer definiten quadratischen Form. Den Abbildungen $\mathsf{o}\xi \to \mathsf{o}\xi\varepsilon$ in S entsprechen die Transformationen $\varphi \to \varepsilon' \varphi \varepsilon$ der quadratischen Formen. *Die Aufstellung von Reduktionsbedingungen für quadratische Formen ist nichts anderes als das Aufsuchen eines Diskontinuitätsbereiches für die Gruppe* e. Aus einem Diskontinuitätsbereich von e in

[10]) Lies: m^+ rechts durch $\mathsf{é}$, links durch o dividiert.

[11]) Eine Untergruppe o von m^+ soll *orthogonal* heißen, wenn o bei einer geeigneten Matrizendarstellung von A als eine Gruppe euklidischer Drehungen dargestellt wird.

$\mathsf{m} = \mathsf{m}^+$ erhält man einen in S und umgekehrt (vgl. 5); es ist mithin gleichgültig, ob man e als eine in m oder in S diskontinuierliche Gruppe betrachtet. Dies erkannte bereits Minkowski[4]). Darüber hinaus besagt der oben ausgesprochene Hauptsatz, daß S der einzige Raum kleinster Dimension ist, in dem e einen Diskontinuitätsbereich besitzt.

2. Es sei $A = Z$. Dann haben R und S die Dimension $r = r_1 + r_2 - 1$. Sicherlich wird schon allein daraus, daß $\acute{\mathsf{e}}$ abelsch und die Fundamentalgruppe einer solchen r-dimensionalen Mannigfaltigkeit R ist, die sich nicht stetig und unter Erhaltung dieser Fundamentalgruppe auf eine Mannigfaltigkeit von niederer Dimension abbilden läßt, ableiten lassen, daß $\acute{\mathsf{e}}$ eine genau r-gliedrige Basis besitzt. Diese Aussage, d. h. den Dirichletschen Einheitensatz, erhält man aber jedenfalls dann sofort, wenn man auch den zweiten Teil des Hauptsatzes heranzieht und nacheinander zeigt: 1. o besteht aus allen Zahlen von Z, die mitsamt ihren konjugierten Zahlen den absoluten Betrag 1 haben. 2. S läßt sich folgendermaßen durch Koordinaten beschreiben: Sind $\alpha_1(\xi), \ldots, \alpha_{r+1}(\xi)$ die $r+1$-absoluten Beträge der allgemeinen Zahl ξ aus Z (d. h. die verschiedenen unter den absoluten Beträgen der zu ξ konjugierten Zahlen), so liefert die Abbildung von ξ auf den Punkt mit den Koordinaten $\alpha_i(\xi)$ mit $\sum \alpha_i(\xi) = 0$ im $(r+1)$-dimensionalen affinen Raume ein homöomorphes Bild von S. 3. Die Abbildungen $\mathsf{o}\,\xi \to \mathsf{o}\,\xi\varepsilon$ von S auf sich sind topologisch Translationen in diesem r-dimensionalen affinen Raume äquivalent. 4. R ist ein r-dimensionaler Torus. *Die klassische Einheitentheorie ist mithin in obigem Hauptsatze enthalten*, wenn auch etwas versteckt. Umgekehrt folgt aus ihr der Hauptsatz für $A = Z$, sodaß man bei seinem Beweise $n > 1$ voraussetzen darf.

§ 4. Beweis des Hauptsatzes

11. D möge sich stetig auf eine Mannigfaltigkeit R abbilden lassen, wobei $\acute{\mathsf{e}}$ in deren Fundamentalgruppe übergeht. Die Punkte aus D sind die linksseitigen Nebengruppen $\omega\acute{\mathsf{e}}$. Es bezeichne $\bar{\mathsf{O}}_\omega$ die Gesamtheit der Punkte aus D, welche in R den gleichen Bildpunkt wie $\omega\acute{\mathsf{e}}$ haben. Die $\bar{\mathsf{O}}_\omega$ müssen abgeschlossene und untereinander homöomorphe Mannigfaltigkeiten sein, wenn R ein homogenes stetiges Abbild von D sein soll. In m^+ gibt es dann Punktmengen $\bar{\mathsf{o}}_\omega$ mit der Eigenschaft

$$\bar{\mathsf{o}}_\omega \acute{\mathsf{e}} = \bar{\mathsf{O}}_\omega \quad ;$$

die $\bar{\mathsf{o}}_\omega$ lassen sich durch die Forderung noch genauer festlegen, daß sie minimale und mit den $\bar{\mathsf{O}}_\omega$ homöomorphe Mannigfaltigkeiten sein sollen;

sie sind dann bis auf rechtsseitige Multiplikation mit Einheiten aus $\mathfrak{e}$ eindeutig festgelegt. Für die so bestimmten $\bar{\mathfrak{o}}_\omega$ gilt:

1. *Durch jeden Punkt von* $\mathfrak{m}^+$ *geht genau ein* $\bar{\mathfrak{o}}_\omega$.
2. *Für Einheiten aus* $\mathfrak{e}$ *gilt*
$$\bar{\mathfrak{o}}_\omega \cdot \varepsilon = \bar{\mathfrak{o}}_{\omega\varepsilon} \,. \tag{15}$$
3. *Für jedes* ω *aus* $\mathfrak{m}^+$ *gibt es eine Vollumgebung* $\mathfrak{v}$ *um* ω, *so daß für jedes* ω' *aus* $\mathfrak{v}$ *und jedes* ε *aus* $\mathfrak{e}$
$$\bar{\mathfrak{o}}_{\omega'} \neq \bar{\mathfrak{o}}_\omega \cdot \varepsilon$$
ist.

Wenn umgekehrt in $\mathfrak{m}^+$ Teilmannigfaltigkeiten $\bar{\mathfrak{o}}_\omega$ mit diesen Eigenschaften gegeben sind, so bilden die aus ihnen erzeugten Teilmannigfaltigkeiten $\bar{\mathfrak{O}}_\omega = \bar{\mathfrak{o}}_\omega \mathfrak{e}$ von $\mathfrak{D}$ eine Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}$, welche die Mannigfaltigkeit aller $\bar{\mathfrak{o}}_\omega$ als reguläre Überlagerung und $\mathfrak{e}$ als die zugehörige Monodromiegruppe hat, und $\mathfrak{R}$ ist ein stetiges Bild von $\mathfrak{D}$. Eine stetige Deformation der $\bar{\mathfrak{O}}_\omega$ innerhalb von $\mathfrak{D}$ ergibt sogar dieselbe Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}$, also nicht nur eine Mannigfaltigkeit mit derselben Monodromiegruppe. Ein stetiges Bild von $\mathfrak{D}$ mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{e}$ ist $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{o}^* \backslash \mathfrak{D}$, wo $\mathfrak{o}^*$ eine maximale orthogonale Untergruppe von $\mathfrak{m}^+$ ist (Nr. 16). Hat $\mathfrak{R}$ die Fundamentalgruppe $\mathfrak{e}$ und minimale Dimension, so ist $\mathfrak{R}$ ein stetiges Bild von $\mathfrak{R}^*$. Falls noch nicht $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$ ist, lassen sich die $\bar{\mathfrak{O}}_\omega$, wegen $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}^* \mathfrak{R}^*$, in die Gestalt $\mathfrak{o}^* \bar{\mathfrak{O}}_\omega$ deformieren, wobei die entsprechend den $\bar{\bar{\mathfrak{O}}}_\omega$ gebildeten $\bar{\bar{\mathfrak{o}}}_\omega$ Mannigfaltigkeiten eine Dimension $p < m - r$ haben und auch die Bedingungen 1.—3. erfüllen. Sie definieren also ein stetiges Bild $\bar{\mathfrak{R}}$ von $\mathfrak{D}$. Ich zeige nun, daß sich die $\bar{\bar{\mathfrak{O}}}_\omega$ in die Gestalt $\mathfrak{o}\,\omega\,\mathfrak{e}$ mit $\mathfrak{o} < \mathfrak{o}^*$ deformieren lassen. Dann ist also $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$. Dabei schreibe ich wieder $\mathfrak{R}$, $\bar{\mathfrak{O}}_\omega$, $\bar{\mathfrak{o}}_\omega$ anstatt von $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\bar{\mathfrak{O}}}_\omega \bar{\bar{\mathfrak{o}}}_\omega$; die Dimension p der $\bar{\mathfrak{o}}_\omega$ ist also fortan $< m - r$.

Ich zeige zunächst, daß sich die $\bar{\mathfrak{o}}_\omega$ unter Erhaltung der Eigenschaften 1. bis 3. und unter gleichzeitiger stetiger Deformation der $\bar{\mathfrak{O}}_\omega$ innerhalb von $\mathfrak{D}$ in Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{o}_\omega$ mit
$$\mathfrak{o}_\omega = \mathfrak{o} \cdot \omega \tag{16}$$
deformieren lassen, wobei $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1$ von ω unabhängig ist.

12. $\mathfrak{D}$ enthält eine Menge $\bar{\mathfrak{R}}$ von teils offenen, teils abgeschlossenen Simplizes, die man leicht aus einer simplizialen Zerlegung von $\mathfrak{R}$ gewinnen kann, mit den Eigenschaften: 1. Durch jeden Punkt von $\bar{\mathfrak{R}}$ geht genau ein $\bar{\mathfrak{O}}_\omega$. 2. Die Ränder der einzelnen Simplizes sind derart auf einander bezogen, daß ein $\bar{\mathfrak{O}}_\omega$, das durch einen Randpunkt P_1 eines Simplex S_1 geht, auch stets durch einen Randpunkt P_2 eines anderen Simplex S_2 geht, wobei wegen 1. entweder P_1 zu S_1 oder P_2 zu S_2, jedoch nicht gleichzeitig P_1 zu S_1 und P_2 zu S_2 gehört. Werden die in dieser Weise einander zugeordneten Simplexränder identifiziert, so entsteht eine zu R homöomorphe Mannigfaltigkeit. 3. $\bar{\mathsf{R}}$ läßt sich stets so wählen, daß die $\bar{\mathsf{o}}_\omega$, welche durch eine beliebige Vollumgebung eines beliebigen Punktes aus D gehen, nicht durch Randpunkte von $\bar{\mathsf{R}}$ hindurchgehen. $\bar{\mathsf{S}}$ sei die größte Punktmenge aus m^+, welche bei der Abbildung $\mathsf{m}^+ \to \mathsf{D}$ auf $\bar{\mathsf{R}}$ abgebildet wird; sie ist durch diese Forderung eindeutig festgelegt. Durch jeden Punkt von $\bar{\mathsf{S}}$ geht genau ein $\bar{\mathsf{o}}_\omega$, jedes $\bar{\mathsf{o}}_\omega$ geht durch einen Punkt von $\bar{\mathsf{S}}$.

Es werde nun ein Produkt $\bar{\mathsf{o}}_\omega \circ \mu$ durch die Festsetzung erklärt: es sei σ_ω der Punkt von $\bar{\mathsf{o}}$, der auf $\bar{\mathsf{S}}$ liegt, und

$$\bar{\mathsf{o}}_\omega \circ \mu = \bar{\mathsf{o}}_{\sigma_\omega \mu} \quad . \tag{17}$$

Ferner werde durch

$$(\bar{\mathsf{o}}_\omega \circ \mu_1) \circ \mu_2 = \bar{\mathsf{o}}_\omega \circ (\mu_1 \circ \mu_2) \tag{18}$$

ein Produkt $\mu_1 \circ \mu_2$ der Zahlen aus m^+ untereinander definiert. Bezüglich dieser neu erklärten Verknüpfung erzeugen die Elemente von m^+ eine Gruppe M stetiger Abbildungen einer Überlagerung von R auf sich.

Zur Untersuchung von M sei u eine infinitesimale Umgebung der 1 in m^+. Man mache nun zunächst von der Erlaubnis, die $\bar{\mathsf{o}}_\omega$ und $\bar{\mathsf{R}}$ stetig zu deformieren, soweit Gebrauch, daß man erstens $\bar{\mathsf{R}}$ und damit auch $\bar{\mathsf{S}}$ durch 1 hindurchgehen läßt und zweitens die $\bar{\mathsf{o}}_\omega$ und $\bar{\mathsf{S}}$ zu linearen Teilräumen von m^+ (oder m. a. W. von A) macht, soweit sie innerhalb u verlaufen, wobei hier die $\bar{\mathsf{o}}_\omega$ auf $\bar{\mathsf{S}}$ senkrecht stehen. Jetzt haben die Zahlen von $\mathsf{u} \frown \bar{\mathsf{o}}_\omega$ die Form $\omega + \Sigma \alpha_i \, dt_i$, wobei die α_i von ω unabhängige Elemente aus A und dt_i reelle variable infinitesimale Größen bedeuten. Für irgend zwei Elemente $1 + d\mu$ und $1 + d\nu$ aus u folgt nun, wenn man infinitesimale Größen zweiter Ordnung vernachlässigt,

$$\mathsf{u} \frown \bar{\mathsf{o}}_{(1+d\mu)\,(1+d\nu)} = \mathsf{u} \frown \bar{\mathsf{o}}_{1+d\mu} \cdot (1 + d\nu) \quad . \tag{19}$$

Diese Gleichung besagt, falls durch $\bar{\mathsf{o}}_1 \frown \mathsf{u}$ kein Normalteiler von m^+ geht, daß M und m^+ im kleinen homöomorph sind. In jeder einfach zusammenhängenden Umgebung stimmen mithin M und m^+ hinsichtlich der Gesamtheit ihrer Elemente überein; dasselbe gilt dann auch im großen.

Durch eine geeignete Deformation der $\bar{\mathsf{o}}_\omega$ kann man ferner erreichen, daß M und m^+ isomorphe Gruppen sind. Zum Beweise mögen v und w zwei Vollumgebungen von 1 in m^+ mit der in **11**, **3**. beschriebenen Eigenschaft bezeichnen, wobei v ganz im Inneren von w liegt. Werden v und w

hinreichend klein gewählt, so sind die Durchschnitte $\mathsf{v} \frown \bar{\mathsf{o}}_\omega$, $\mathsf{w} \frown \bar{\mathsf{o}}_\omega$, sobald ω in v bzw. w liegt, Vollumgebungen von ω in $\bar{\mathsf{o}}_\omega$. Man lege $\mathsf{u} \frown \bar{\mathsf{o}}_1$ auf eine p-dimensionale Untergruppe $\tilde{\mathsf{o}}$ von m^+, welche keinen Normalteiler von m^+ enthält (da die m_i in (4) einfach sind, und wegen $n > 1$, $p < m - r$ gibt es solch ein $\tilde{\mathsf{o}}$), und setze

$$\tilde{\mathsf{o}}_\omega = \tilde{\mathsf{o}} \cdot \omega \ .$$

Wird v hinreichend klein gewählt, so sind die $\mathsf{v} \frown \tilde{\mathsf{o}}_\omega$ mit den $\mathsf{v} \frown \bar{\mathsf{o}}_\omega$ homöomorph, und das gleiche gilt für deren Randmannigfaltigkeiten. Wird v ferner so klein gewählt, daß die $\mathsf{v} \frown \tilde{\mathsf{o}}_\omega$, sofern $\mathsf{v} \frown \tilde{\mathsf{o}}_\omega \neq 0$ ist, mit $\bar{\mathsf{S}}$ genau einen Punkt gemeinsam haben, welcher wiederum mit σ_ω bezeichnet sei, so ist

$$\mathsf{v} \frown \tilde{\mathsf{o}}_\omega = \mathsf{v} \frown \tilde{\mathsf{o}}_{\sigma_\omega} \ , \ \mathsf{v} \frown \tilde{\mathsf{o}}_{\omega\omega'} = \mathsf{v} \frown \tilde{\mathsf{o}}_{\sigma_\omega \omega'} = \mathsf{v} \frown \tilde{\mathsf{o}}_{\sigma_\omega} \cdot \omega' \ , \tag{20}$$

und die von $\mathsf{v} \frown \bar{\mathsf{S}}$ und den $\mathsf{v} \frown \tilde{\mathsf{o}}_\omega$ in v einschließlich des Randes erzeugte Konfiguration ist mit der durch $\mathsf{v} \frown \bar{\mathsf{S}}$ und die $\mathsf{v} \frown \bar{\mathsf{o}}_\omega$ erzeugten homöomorph. Folglich kann man die $\bar{\mathsf{o}}_\omega$ stetig so deformieren, daß sie erstens außerhalb aller Gebiete $\mathsf{w}\varepsilon$ ungeändert bleiben, zweitens innerhalb von v in die $\tilde{\mathsf{o}}_\omega$ übergehen und drittens einer stetigen Deformation der $\bar{\mathsf{O}}_\omega$ innerhalb von D entsprechen. Nach dieser Deformation sind M und m^+ wegen (20), und weil $\tilde{\mathsf{o}}$ keinen Normalteiler von m^+ enthalten sollte, innerhalb von v identisch. Weil sie andererseits im großen homöomorph sind, sind sie im großen topologisch isomorph.

Jetzt ist die Gruppe M eine „Verzerrung" von m^+ in dem Sinne, daß es eine eineindeutige stetige Abbildung V von m^+ auf sich gibt, daß

$$\mu_1 \circ \mu_2 = V^{-1}\left(V(\mu_1) \cdot V(\mu_2)\right) \tag{21}$$

ist. Setzt man

$$\mathsf{o}_\omega = V(\bar{\mathsf{o}}_{V^{-1}(\omega)}) \ , \tag{22}$$

so erfüllen die o_ω die Bedingungen 1. bis 3. und (16) in **11**. Das Erfülltsein von 1. ist klar. Da $\bar{\mathsf{S}}$ durch 1 hindurch geht, folgt aus (17) und (18)

$$\bar{\mathsf{o}}_1 \circ \mu_1 \circ \mu_2 = \bar{\mathsf{o}}_{\mu_1 \circ \mu_2}$$

und aus (21) und (22), wenn man zur Abkürzung

$$V(\mu_1) = \bar{\mu}_1, \qquad V(\mu_2) = \bar{\mu}_2$$

setzt,

$$V^{-1}(\mathsf{o}_1 \, \bar{\mu}_1 \, \bar{\mu}_2) = V^{-1}(\mathsf{o}_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2})$$

oder

$$\mathsf{o}_1 \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 = \mathsf{o}_{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2} \ .$$

$\bar{\mu}_1$ und $\bar{\mu}_2$ durchlaufen zugleich mit μ_1 und μ_2 die ganze Gruppe m^+; dann folgt aber unmittelbar 2. und (16).

Schließlich ergibt sich aus (15), (17) und (18) für ε aus $\acute{\mathsf{e}}$ und μ aus m^+

$$\varepsilon \circ \mu = \varepsilon\mu \,, \qquad \mu \circ \varepsilon = \mu\varepsilon \;.$$

Mithin läßt die Verzerrung V, welche vermittels (21) die gewöhnliche Multiplikation mit der Verknüpfung $\circ$ verbindet, die ε fest und liefert eine stetige Deformation von D. Ferner bewirkt die Verzerrung (22) eine stetige Deformation der $\bar{\mathsf{O}}_\omega$ in die $\mathsf{O}_\omega = \mathsf{o}_\omega \acute{\mathsf{e}}$ innerhalb von D. Also ist auch 3. erfüllt und die O_ω bilden nach **11** dieselbe Mannigfaltigkeit R wie die $\bar{\mathsf{O}}_\omega$.

13. Von jetzt ab darf (16) als erfüllt angenommen werden. Aus **11** geht dann hervor: Bezeichnet S die Gesamtheit der o_ω, so ist $\acute{\mathsf{e}}$ eine in S diskontinuierliche und fixpunktfreie Abbildungsgruppe; einen Diskontinuitätsbereich r von $\acute{\mathsf{e}}$ in S erhält man in Gestalt der Gesamtheit der o_ω, welche durch die Punkte eines Diskontinuitätsbereiches d von $\acute{\mathsf{e}}$ in m^+ gehen. R entsteht aus r durch Ränderzuordnung wie D aus d in **8**. Ist S einfach zusammenhängend, so ist es die universelle Überlagerung von R. Dies ergibt den zweiten Teil des Hauptsatzes. Es genügt daher, o näher zu betrachten.

o *ist eine Gruppe*. Nämlich, weil o die Gesamtheit der Punkte ist, die in S denselben Bildpunkt haben wie 1, gilt

$$\mathsf{o}\mathsf{o} = \mathsf{o} \;.$$

Ist ω ein Element aus o, so enthält $\mathsf{o}\omega^{-1}$ die 1, es ist also nach **11,1**

$$\mathsf{o}\,\omega^{-1} = \mathsf{o} \;,$$

folglich ist o wirklich eine Gruppe. Ferner ist

$$\mathsf{S} = \mathsf{o}\backslash\mathsf{m}^+ \;.$$

14. o *liegt ganz im Endlichen*, d. h. die Koordinaten der Elemente von o im Sinne der Koordinatendarstellung (1) sind beschränkt. Ich beweise diese Behauptung zunächst unter der Voraussetzung, daß A nullteilerfrei ist. Jetzt gibt es nach **4** einen ganz im Endlichen gelegenen Diskontinuitätsbereich d von $\acute{\mathsf{e}}$ in m^+. Wenn o nicht im Endlichen läge, so durchliefe o unendlich viele mit d äquivalente Diskontinuitätsbereiche $\mathsf{d}\varepsilon$. Dann enthielte aber der Bereich r in S, der aus allen o_ω besteht, die durch Punkte von d hindurchgehen, unendlich viele Paare äquivalenter Punkte

o_ω, $o_\omega \varepsilon$. Da r nach **13** ein Diskontinuitätsbereich von $é$ in S ist, müßte dann jedesmal $o_\omega = o_\omega \varepsilon$ gelten, und in diesem Falle könnte $é$ nicht in der Fundamentalgruppe von R liegen. Die Behauptung ist damit bewiesen.

15. Nun sei A wieder beliebig. *Wenn* o *ganz im Endlichen liegt, ist* o *eine orthogonale Gruppe.* Wenn man nämlich o durch lineare Substitutionen darstellt, so sind die Koeffizienten dieser Substitutionen beschränkt. Folglich lassen sie eine definitive quadratische Form fest[12]); eine solche Substitutionsgruppe ist stets mit einer Gruppe euklidischer Drehungen äquivalent.

Alle maximalen orthogonalen Untergruppen o von m^+ sind in m^+ konjugiert. Aus **11** ergibt sich aber, daß $o\backslash m^+/é$ und $\mu^{-1}\, o\mu\backslash m^+/é$ homöomorph sind, denn die Punkte von $\mu^{-1}\, o\mu\backslash m^+/é$ sind die Mannigfaltigkeiten

$$o'_\omega = \mu^{-1}\, o_{\mu\omega\mu^{-1}}\, \mu \ ,$$

sie gehen aus den o_ω durch eine stetige Deformation von m^+ hervor, bei welcher gleichzeitig die O_ω stetig in die $O'_\omega = o_\omega é$ übergehen.

16. Umgekehrt liegt eine orthogonale Untergruppe o von m^+ ganz im Endlichen. Da $é$ keine Elemente von endlicher Ordnung enthalten sollte, ist jetzt für jedes ω aus m^+

$$o \frown \omega^{-1} é\, \omega = 1 \ . \tag{23}$$

Die durch $é$ gelieferten stetigen Abbildungen $o_\omega \to o_\omega \varepsilon$ von $o\backslash m^+ = S$ auf sich bilden daher eine diskontinuierliche und fixpunktfreie Gruppe; einen Diskontinuitätsbereich erhält man in Gestalt des Bildes eines Diskontinuitätsbereiches d bei der Abbildung $m^+ \to S$. *Ist* o *eine maximale orthogonale Untergruppe von* m^+, *so ist* S *einfach zusammenhängend;* S ist die universelle Überlagerung von $S/é = o\backslash m^+/é$, und $é$ ist die Fundamentalgruppe von $S/é$. Die maximalen orthogonalen o können also wirklich, wie der Hauptsatz aussagt, zur Bildung von R hergezogen werden; sie liefern die R von minimaler Dimension. Die Gestalt der maximalen orthogonalen Untergruppen o von m^+ übersieht man nämlich am besten mit Hilfe von (4): es ist

$$o = (o \frown m_1) \times \cdots \times (o \frown m_{r_1+r_2+r_3}) \ .$$

Die $o \frown m_i$ sind beschränkt und lassen sich daher als unitäre Substi-

[12]) *H. Auerbach*, C. R. Acad. Paris **195** (1932), S. 1367.

tutionsgruppen darstellen[12]). Nach **3** und (12) ist dann S das topologische Produkt der a_i und z^+ und folglich einfach zusammenhängend. Die maximalen unitären Untergruppen der m_i haben die Dimension

$$\frac{n(n+1)}{2} - n \quad \text{für } i = 1, \ldots, r_1 ,$$

$$2\,\frac{n(n+1)}{2} - n \quad \text{für } i = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2 ,$$

$$4\,\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} - \frac{n}{2} \quad \text{für } i = r_1 + r_2 + 1, \ldots, r_1 + r_2 + r_3 .$$

Die Dimension von R ist gleich der Dimension von m^+, vermindert um die von o. Hieraus ergibt sich die Formel (14) für die Dimension von R. Für nullteilerfreie Algebren ist der Hauptsatz hiermit in vollem Umfange bewiesen.

17. Für nullteilerhaltige Algebren bleibt allein noch der Satz aus **14** zu beweisen. Seine Gültigkeit für die kommutativen Unterkörper K von A wird dabei benutzt, ferner der folgende Hilfssatz: *Eine zusammenhängende kontinuierliche Substitutionsgruppe* o, *deren Elemente nicht beschränkte Koeffizienten haben, enthält eine zyklische Untergruppe, deren Elemente auch nicht beschränkte Koeffizienten haben.* — Beweis. Es sei u eine Umgebung der 1 in o und U die Menge der Gruppenelemente, welche Potenzen von Elementen aus u sind. U hat die gleiche Dimension wie o und ist in o abgeschlossen und ohne Rand. Folglich ist $\mathsf{U} = \mathsf{o}$. Im Gegensatz zur Behauptung mögen nun die Beträge der Koeffizienten der Potenzen jedes Elementes α unter einer Schranke $S(\alpha)$ liegen. Nach der Voraussetzung gibt es eine Folge von Gruppenelementen α_i, so daß $\lim\limits_{i=\infty} S(\alpha_i) = \infty$ ist. Wegen $S(\alpha) \geqq S(\alpha^n)$ für jedes α und jedes n gibt es eine solche Folge bereits in u, denn alle Elemente aus o lassen sich als Potenzen von Elementen aus u darstellen. Eine Teilfolge konvergiert dann gegen ein α mit $S(\alpha) = \infty$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

o sei eine nicht ganz im Endlichen gelegene kontinuierliche Untergruppe von m^+ und α ein Element aus o, dessen Potenzen nicht beschränkt sind. Ist α in einer Matrizendarstellung von A auf Hauptdiagonalform transformierbar, so gibt es dann einen kommutativen Unterkörper K und ein Element τ in A, daß $\tau^{-1}\alpha\tau$ der Limes einer Zahlenfolge aus K ist. Wenn man o zur Bildung von R benutzen kann, so kann man nach **15** (letzter Absatz) auch $\tau^{-1}\mathsf{o}\tau$ hierzu benutzen. Wenn man sich auf die

Betrachtung des Teiles K von A beschränkt, so kann man ferner hierzu auch die maximale Untergruppe $\mathfrak{o}_K$ von $\tau^{-1}\mathfrak{o}\tau$ benutzen, deren Elemente Grenzwerte von Zahlenfolgen aus K sind. $\mathfrak{o}_K$ enthält aber die Zahl $\tau^{-1}\alpha\tau$ und ist daher im Gegensatz zu **14** nicht ganz im Endlichen gelegen. Folglich muß in jedem Falle $\mathfrak{o}$ ganz im Endlichen gelegen sein, wenn es zur Bildung von R benutzt werden kann.

Ist jedoch α nicht auf Hauptdiagonalform transformierbar, so muß man folgendermaßen schließen: es sei $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u} \supset \mathfrak{u}_2 \supset \mathfrak{u}_0 \supset \dots$ eine gegen 1 konvergierende Folge von Umgebungen der 1 und α_i Zahlen aus $\mathfrak{u}_i$, so daß $\alpha_i^{n_i} = \alpha$ mit ganzen rationalen n_i gilt (vgl. den Beweis des Hilfssatzes). Dann erzeugen die α_i eine kontinuierliche abelsche Untergruppe $\mathfrak{o}_\alpha$ von $\mathfrak{o}$, die ebenso wie $\mathfrak{o}$ zur Bildung von R herangezogen werden kann. Sämtliche Elemente ξ von $\mathfrak{o}_\alpha$ lassen sich simultan auf Dreiecksform transformieren:

$$\sigma^{-1}\,\xi\,\sigma = \begin{pmatrix} x_{11} \cdot \cdots \cdot & 0 \\ \vdots \quad \ddots & \vdots \\ x_{n1} \cdot \cdots \cdot & x_{nn} \end{pmatrix} = \xi_0\,\xi_1 \quad \text{mit} \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_{nn} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Es gibt in A eine Zahl τ und einen kommutativen Unterkörper K der Art, daß die $\tau^{-1}\,\xi_1\tau$ Grenzwerte von Zahlenfolgen aus K sind, und wenn man sich wieder allein auf K beschränkt, darf man die Gruppe der $\tau^{-1}\,\xi_1\tau$ zur Bildung von R benutzen. Nach dem Hauptsatz haben die x_{ii} folglich alle den Betrag 1. Dann aber enthält $\mathfrak{o}_\alpha$ wegen $S(\alpha) = \infty$ Zahlen $\xi \neq 1$ mit $\xi_1 = 1$ in (24), und diese lassen sich weiter so transformieren, daß oberhalb der Hauptdiagonalen nur 0 und unterhalb der Hauptdiagonalen 0 oder 1 steht. Sie sind also Einheiten aus $\acute{\mathfrak{e}}$ äquivalent, und (23) gilt deshalb nicht mehr für alle ω, und dies hat zur Folge, daß $\mathfrak{o}_\alpha$ und $\mathfrak{o}$ nicht zur Bildung von R benutzt werden darf.

§ 5. Weitere topologische Invarianten von D

18. Es sei Z' ein in Z enthaltener Zahlkörper und $\acute{\mathfrak{e}}_{(Z')}$ die Gruppe derjenigen Einheiten aus $\acute{\mathfrak{e}}$, welche bezüglich Z' die Relativnorm 1 haben. Ferner sei $\mathfrak{m}^+_{(Z')}$ analog zu $\mathfrak{m}^+$ durch die Relativnormen von A bezüglich Z' erklärt. Es gebe r_1' reelle und $2r_2'$ imaginäre zu Z' konjugierte Zahlkörper. Die Betrachtungen der vorigen Paragraphen bleiben fast wörtlich gültig, wenn man $\mathfrak{m}^+$ und $\acute{\mathfrak{e}}$ durch $\mathfrak{m}^+_{(Z')}$ und $\acute{\mathfrak{e}}_{(Z')}$ ersetzt; insbesondere gilt:

$$\mathfrak{m}^+_{(Z')}/\acute{\mathfrak{e}}_{(Z')} = \mathsf{D}_{(Z')}$$

ist eine Mannigfaltigkeit, die Mannigfaltigkeiten kleinster Dimension mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{é}_{(Z')}$, auf die sich $\mathsf{D}_{(Z')}$ stetig abbilden läßt, erhält man in der Form

$$\mathsf{R}_{(Z')} = \mathsf{o}_{(Z')} \backslash \mathsf{m}^{+}_{(Z')} / \mathfrak{é}_{(Z')} ,$$

wobei $\mathsf{o}_{(Z')}$ irgendwelche maximalen orthogonalen Untergruppen von $\mathsf{m}^{+}_{(Z')}$ sind. Alle so erhaltenen $\mathsf{R}_{(Z')}$ sind untereinander homöomorph, und ihre Dimension ist, wenn r die Bedeutung (14) hat,

$$r_{(Z')} = r - r_1' - r_2' .$$

Es sei speziell $Z' = Z$. Man überlegt leicht, daß das direkte Produkt

$$\mathsf{e}^* = \mathfrak{é}_{(Z)} \times \mathfrak{é}_Z \qquad (\mathfrak{é}_Z = \mathfrak{é} \frown Z)$$

in $\mathfrak{é}$ einen endlichen Index hat. Ist jetzt $\mathsf{n}_{(Z)}$ die von z^+ und $\mathsf{o}_{(Z)}$ erzeugte Gruppe, so ist

$$\mathsf{R}_{(Z)} = \mathsf{n}_{(Z)} \backslash \mathsf{m}^+ / \mathsf{e}^* ,$$

und aus dieser Gleichung kann man wegen der Endlichkeit des Index $(\mathfrak{é} : \mathsf{e}^*)$ folgern, daß sich D stetig auf $\mathsf{R}_{(Z)}$ abbilden läßt.

Ist $\bar{\mathsf{R}}$ irgend eine Mannigfaltigkeit, auf die sich R stetig abbilden läßt, so ist die Fundamentalgruppe von $\bar{\mathsf{R}}$ die Faktorgruppe $\mathfrak{é}/\bar{\mathsf{e}}$ von $\mathfrak{é}$ nach einem Normalteiler $\bar{\mathsf{e}} \cdot \bar{\mathsf{e}}$ und die Dimension eines solchen $\bar{\mathsf{R}}$ sind topologische Invarianten von D. Vermutlich wird aber $\bar{\mathsf{e}}$ entweder $\mathfrak{é}_{(Z)}$ enthalten oder in $\mathfrak{é}_Z$ enthalten sein; in beiden Fällen würde man so keine wesentlich neuen Invarianten finden.

19. Die einzigen Fälle, wo $\mathfrak{é}_{(Z')}$ nicht in Z liegt und $r_{(Z')} = 2$ ist, sind: $Z' = Z$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $n = 2$. Sie liegen bei Quaternionenalgebren über total reellen Zahlkörpern vor, welche nur an einer einzigen unendlichen Primstelle nicht verzweigt sind. Jetzt ist $\mathsf{R}_{(Z)}$ eine geschlossene orientierbare Fläche (geschlossen ist sie, wenn A nullteilerfrei ist), sie wird durch ihr Geschlecht $g_{(Z)}$ eindeutig beschrieben. Die Berechnung von $g_{(Z)}$ erfolgt genau so wie in dem bereits früher behandelten Spezialfall $r_3 = 0$[13]. Man zeigt, daß $\mathsf{S}_{(Z)} = \mathsf{o}_{(Z)} \backslash \mathsf{m}^{+}_{(Z)}$ mit der hyperbolischen Ebene homöomorph ist, und daß $\mathfrak{é}_{(Z)}$ eine in $\mathsf{S}_{(Z)}$ diskontinuierliche Gruppe hyperbolischer Bewegungen liefert[14]. Nun läßt sich das Residuum der Zeta-

[13]) *M. Eichler*, a. a. O.[3]), Nrn. 6—12.

[14]) Diese Gruppe gehört im wesentlichen zu dem Typus der schon früher (Fricke-Klein, Automorphe Funktionen I, Leipzig 1897) behandelten Grenzkreisgruppen, welche durch die Automorphismen ternärer indefiniter quadratischer Formen geliefert werden. Die Theorie dieser Gruppen wurde kürzlich von K. Heegner (Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen I und II, Math. Z. **43** (1938), III, Math. Z. **44** (1938) ausführlich dargestellt, so daß ich mich hier mit einer kurzen Bemerkung begnügen darf.

funktion einer Idealklasse von A mit Hilfe eines über $\mathfrak{d}$ erstreckten Integrals berechnen, und dieses läßt sich auf das Integral über die Gaußsche Hauptkrümmung von $\mathsf{R}_{(Z)}$ zurückführen. Mit Hilfe der Gauß-Bonnetschen Integralformel erhält man so einen Zusammenhang zwischen $g_{(Z)}$ und der Zetafunktion von A[15]. Das Endresultat lautet, falls $\acute{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}^{+}$ ist (vgl. 7):

$$g_{(Z)} = 1 + 2^{n_0} \frac{\zeta_0(2)\,|D_0|^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^{2n_0}} \Pi(n_{Z/k}\,\mathfrak{p}' - 1)\ ,$$

und falls $\acute{\mathfrak{e}} = \mathfrak{e}^{(\mathfrak{p})}$ ist,

$$g_{(Z)} = 1 + (\mathfrak{e}_Z : \mathfrak{e}_Z^{(\mathfrak{p})})\; q\,(q^2 - 1) \frac{\zeta_0(2)\,|D_0|^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^{2n_0}} \Pi(n_{Z/k}\,\mathfrak{p}' - 1)\ ,$$

darin mögen $\mathfrak{e}_Z$, $\mathfrak{e}_Z^{(\mathfrak{p})}$ und q die oben in 7 erklärte Bedeutung haben, $\zeta_0(s)$, D_0, n_0 seien Zetafunktion, Diskriminante und Absolutgrad von Z und $\mathfrak{p}'$ durchlaufe die verschiedenen Primideale von Z, die in der Diskriminante von A/Z aufgehen.

20. Im Falle $A = Z$ ist das Residuum der Zetafunktion einer Idealklasse bis auf einen Faktor gleich dem Regulator der Einheitengruppe und nicht eine topologische Invariante von $\mathfrak{D}$; der Regulator wird zur Bestimmung der Idealklassenanzahl auf transzendentem Wege benutzt. Wie hier an dem Beispiel gewisser Quaternionenalgebren gezeigt wurde, liegen die Dinge im Nichtkommutativen völlig anders: die Idealklassenanzahl stimmt im wesentlichen mit der des Zentrums überein, infolgedessen gelingt die Berechnung des Residuums der Zetafunktion einer Idealklasse, und mittels dieses Residuums kann man eine wichtige und scheinbar nicht elementar zugängliche topologische Invariante der Einheitengruppe berechnen. Man kann jetzt fragen: kann man immer im Nichtkommutativen auf diesem Wege topologische Invarianten von $\acute{\mathfrak{e}}$ finden, und erhält man so neben den früher besprochenen Invarianten alle? Die Beantwortung dieser Fragen scheint heute gewiß sehr schwierig, wenn nicht gar einstweilen unmöglich zu sein.

(Eingegangen den 16. Januar 1939.)

[15]) Hierbei wird die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen den Idealklassenanzahlen in A und Z benutzt.