**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 11 (1938-1939)

**Artikel:** Über die Cesàroschen und Rieszschen Mittel Fourierscher Reihen.

**Autor:** Szász, Otto

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-11886

# Über die Cesàroschen und Rieszschen Mittel Fourierscher Reihen

**Max Dehn zu seinem sechzigsten Geburtstag gewidmet**

Von Otto Szász, Cincinnati (Ohio), U. S. A.

**§ 1.** Es sei $f(x)$ eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare, modulo $2\pi$ periodische Funktion. Ihre Fouriersche Reihe sei

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1.1}$$

mit den Partialsummen

$$s_0 \equiv \frac{a_0}{2}, \quad s_n(x) \equiv s_n \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) .$$

Nach einem klassischen Resultat von *Fejér* (1900) ist an jeder Stetigkeitsstelle von $f(x)$ die Reihe (1.1) $(C, 1)$-summierbar gegen $f(x)$, das heißt, es ist

$$\lim_{n\to\infty} C_n^{(1)} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} = f(x) .$$

*Lebesgue* hat bewiesen, daß die Cesàroschen Mittel zweiter Ordnung der Reihe (1)

$$C_n^{(2)} \equiv \frac{(n+1)\, s_0 + n\, s_1 + \cdots + s_n}{n+1 \quad + n \quad + \cdots + 1}$$

an einer Stelle $x$ gegen $s$ konvergieren, wenn

$$\varphi(x,t) \equiv \frac{1}{t}\int_0^t \left\{\frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} - s\right\} dt \to 0 \text{ für } t \to 0 ;$$

dies ist bekanntlich für fast alle $x$ der Fall.

Kürzlich hat nun *Fejér* eine neue, interessante Eigenschaft der Cesàroschen Mittel höherer Ordnung entdeckt, die darin besteht, daß sich die Approximationskurven schon für jedes endliche $n$ der geometrischen Konfiguration der Kurve $y = f(x)$ anpassen. Setzt man

$$s_n^{(1)}(x) = \sum_0^n s_\nu(x) , \quad s_n^{(2)}(x) = \sum_0^n s_\nu^{(1)}(x) , \quad s_n^{(3)}(x) = \sum_0^n s_\nu^{(2)}(x) ,$$

so sind die Cesàroschen Mittel erster, zweiter und dritter Ordnung

$$C_n^{(1)} = \frac{s_n^{(1)}}{n+1}, \quad C_n^{(2)} = \frac{2\, s_n^{(2)}}{(n+1)\,(n+2)}, \quad C_n^{(3)} = \frac{2\cdot 3\cdot s_n^{(3)}}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} . \tag{1.2}$$

Ich hebe hier folgendes Resultat von *Fejér* hervor:

Es sei im Intervall $0 < x < \pi$ $f(x) > 0$ und nach oben konvex; dann sind für die Sinusreihe von $f(x)$ alle Kurven

$$y = C_n^{(3)}(x)\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \quad 0 < x < \pi\,,$$

oberhalb der $x$-Achse gelegen, und nach oben konvex [1]). Für die Cesàromittel zweiter Ordnung hingegen gilt dies im allgemeinen nicht mehr. (1, 2, 3, vgl. Literaturnachweis.)

Die Cesàroschen Mittel $k$-ter Ordnung einer Reihe $\sum\limits_0^\infty u_\nu$ kann man in der Form schreiben:

$$C_n^{(k)} \equiv \frac{\binom{n+k}{k} u_0 + \binom{n+k-1}{k} u_1 + \cdots + \binom{k}{k} u_n}{\binom{n+k}{k}}\;;$$

eng verwandt damit sind die von *M. Riesz* eingeführten Mittel $(R, k)$ (vgl. 4):

$$R_n^{(k)} \equiv \frac{(n+1)^k u_0 + n^k u_1 + \cdots + 1^k u_n}{(n+1)^k} \equiv \frac{\varrho_n^{(k)}}{(n+1)^k} \tag{1.3}$$

Im folgenden wird sich das überraschende Resultat ergeben, daß der dem vorhin zitierten Fejérschen Satze analoge Satz bei Rieszschen Mitteln schon für $k = 2$ gilt. In der Beweismethode schließe ich mich dem Fejérschen Gedankengange an. In § 2 schicke ich einige Hilfsbetrachtungen voraus. In § 3 wird der Hauptsatz bewiesen; in § 4 wird der Zusammenhang zwischen den $(C, 2)$- und den $(R, 2)$-Mitteln allgemein betrachtet.

**§ 2.** Mit $F(r)$ bezeichne ich die formal gegebene Potenzreihe $\sum\limits_0^\infty u_\nu r^\nu$, nicht notwendig konvergent, sondern als Träger der beliebigen Reihe $\sum\limits_0^\infty u_\nu$ gedacht. Setzt man

$$\sum_0^n u_\nu = U_n = U_n^{(0)}\,, \quad \sum_0^n U_\nu = U_n^{(1)}, \quad \sum_0^n U_\nu^{(1)} = U_n^{(2)}\,, \quad \sum_0^n U_\nu^{(2)} = U_n^{(3)}\,,$$

so ist, im Sinne formaler Cauchyscher Multiplikation

$$\frac{1}{1-r} F(r) = \sum_0^\infty U_\nu r^\nu\,, \quad \frac{1}{(1-r)^2} F(r) = \sum_0^\infty U_\nu^{(1)} r^\nu\,, \quad \frac{1}{(1-r)^3} F(r) = \sum_0^\infty U_\nu^{(2)} r^\nu\,,$$

und

$$\frac{1+r}{(1-r)^3} F(r) = u_0 + \sum_1^\infty (U_{\nu-1}^{(2)} + U_\nu^{(2)}) r^\nu\,. \tag{2.1}$$

---

[1]) Also $y'' < 0$.

Andererseits ist

$$\frac{1+r}{(1-r)^3}=\frac{1+r}{2}\sum_0^\infty(\nu+1)(\nu+2)r^\nu=\sum_0^\infty(\nu+1)^2r^\nu,$$

und formale Multiplikation mit $F(r)$ ergibt

$$\frac{1+r}{(1-r)^3}F(r)=\sum_0^\infty\varrho_\nu^{(2)}r^\nu. \tag{2.2}$$

Aus (2.1) und (2.2) folgt

$$U_{\nu-1}^{(2)}+U_\nu^{(2)}=\varrho_\nu^{(2)},\quad \nu=1,2,3,\ldots,$$

oder, nach (1.2) und (1.3)

$$R_n^{(2)}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}C_{n-1}^{(2)}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}C_n^{(2)}\right\}(n+1)^{-2}.$$

Es besteht somit die folgende bemerkenswerte Beziehung zwischen den $(C, 2)$- und $(R, 2)$-Mitteln:

$$\boxed{R_n^{(2)}=\frac{n\,C_{n-1}^{(2)}+(n+2)\,C_n^{(2)}}{2(n+1)}},\quad n=1,2,3,\ldots. \tag{2.3}$$

Ich setze jetzt speziell

$$F(r)=r\sin x\frac{1-r^2}{(1-2r\cos x+r^2)^2}=\sum_0^\infty\nu r^\nu\sin\nu x;$$

der Formel (2.2) entspricht jetzt

$$\sum_0^\infty\varrho_\nu^{(2)}(x)r^\nu=r\sin x\left\{\frac{1-r^2}{(1-r)^2(1-2r\cos x+r^2)}\right\}^2$$

$$=r\sin x\left\{\sum_0^\infty\left(\frac{\sin(\nu+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2r^\nu\right\}^2.$$

Daher sind alle $\varrho_\nu^{(2)}(x)\geqq 0$ für $0\leqq x\leqq\pi$; genauer ist, wenn zur Abkürzung

$$\left(\frac{\sin(\nu+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=k_\nu(x),\quad \nu=0,1,2,\ldots$$

gesetzt wird,

$$\boxed{\varrho_{n+1}^{(2)}(x)=\sin x\sum_0^n k_\nu(x)\,k_{n-\nu}(x)>0\ \text{ für }\ 0<x<\pi} \tag{2.4}$$

$$n=0,1,2,\ldots.$$

Wir wollen dieses Resultat anwenden, um mit Hilfe eines Fejérschen Gedankenganges zu beweisen, daß auch die $(R, 2)$-Mittel der Reihe

$$\sum_{0}^{\infty} \sin \nu a \sin \nu x \quad \text{für} \quad 0 < a < \pi\,, \qquad 0 < x < \pi$$

nicht negativ sind. Wir bezeichnen die $(R, 2)$-Mittel dieser Reihe mit

$$P_n^{(2)}(a, x),\ n = 0, 1, 2, \ldots\ ;$$

dann ist offenbar

$$P_n^{(2)}(a, x) = P_n^{(2)}(x, a), \quad P_n^{(2)}(\pi - a, \pi - x) = P_n^{(2)}(a, x)\ .$$

Es genügt daher, die Behauptung im Dreieck.

$$0 \leqq a + x \leqq \pi\,, \qquad 0 \leqq a - x \leqq \pi \tag{2.5}$$

zu beweisen. Nun ist auf der Hypothenuse

$$x = 0\,, \quad 0 \leqq a \leqq \pi\ :\ P_n^{(2)}(a, 0) = 0\ ;$$

ferner ist offenbar

$$\frac{\partial}{\partial x} P_n^{(2)}(a, x) = \frac{1}{2}\left\{ \varrho_n^{(2)}(a + x) + \varrho_n^{(2)}(a - x) \right\},$$

und dies ist nach (2.4) nicht negativ im Dreieck (2.5). Daher ist in diesem Dreieck das trigonometrische Polynom $P_n^{(2)}(a, x)$ monoton wachsend auf jeder vertikalen Geraden (d. h. für festes $a$). Somit ist in diesem Dreieck $P_n^{(2)}(a, x) > 0$ für $x > 0$. Es gilt daher:

$$\boxed{P_n^{(2)}(a, x) > 0 \quad \text{für} \quad 0 < a < \pi\,, \quad 0 < x < \pi}\ , \ n = 1, 2, 3, \ldots\ . \tag{2.6}$$

§ 3. Um nun zu dem in § 1 angedeuteten Resultat zu gelangen, betrachte ich zunächst die „Dachfunktion“:

$$0 + \frac{2b}{a(\pi - a)} \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin \nu a \sin \nu x}{\nu^2} = \begin{cases} \dfrac{b}{a} x & \text{für } 0 \leqq x \leqq a \\[2ex] b\,\dfrac{\pi - x}{\pi - a} & \text{für } a \leqq x \leqq \pi\ , \end{cases} \tag{3.1}$$

wobei $0 < a < \pi$, $0 < b$.

Bezeichnet man die Partialsummen dieser Reihe mit

$$\tau_0 = 0\ ,\ \tau_n(x) = \frac{2b}{a(\pi - a)} \sum_1^n \frac{\sin \nu a \sin \nu x}{\nu^2}\ ,\ n = 1, 2, 3, \ldots\ ,$$

und setzt man

$$\tau_n^{(1)}(x) = \sum_0^n \tau_\nu(x)\ ,\ \tau_n^{(2)}(x) = \sum_0^n \tau_\nu^{(1)}(x)\ ,$$

so ist nach den Resultaten von § 2

$$P_n^{(2)}(a\,,\,x) = -\frac{d^2}{dx^2}\frac{\tau_{n-1}^{(2)}(x) + \tau_n^{(2)}(x)}{(n+1)^2} < 0$$

für $0 < a < \pi$, $0 < x < \pi$. Somit sind die $(R, 2)$-Mittel der Reihe (3.1) nach oben konvex für $0 < x < \pi$.

Nun ist jedes oberhalb der Abszissenachse liegende konvexe Polygon darstellbar als Summe endlich vieler Dachfunktionen; ferner ist jede positive, in $0 < x < \pi$ nach oben konvexe Funktion gleichmäßig approximierbar durch solche Polygone. Hieraus folgt unmittelbar unser zu beweisender

*Satz. Ist $f(x) > 0$ in $0 < x < \pi$, und daselbst nach oben konvex, so sind für ihre Fouriersche Sinusreihe die in § 1 definierten $(R, 2)$-Mittel sämtlich nach oben konvex.*

Es ist ganz leicht, hieraus den in der Einleitung zitierten Fejérschen Satz herzuleiten.

Mit den Bezeichnungen von § 2 ist

$$\frac{1}{(1-r)^4}F(r) = \sum_0^\infty U_\nu^{(3)} r^\nu = \frac{1}{1-r^2}\cdot\frac{1+r}{(1-r)^3}F(r) =$$

$$= \left(\sum_0^\infty \frac{1+(-1)^\nu}{2} r^\nu\right)\left(\sum_0^\infty \varrho_\nu^{(2)} r^\nu\right) = \frac{1}{2}\sum_0^\infty (\varrho_n^{(2)} + \varrho_{n-2}^{(2)} + \cdots) r^n\ .$$

Daher ist

$$U_n^{(3)} = \tfrac{1}{2}(\varrho_n^{(2)} + \varrho_{n-2}^{(2)} + \cdots)\ .$$

Da aber unter den Voraussetzungen unseres Satzes die Kurven $y = \varrho_n^{(2)}(x)$ oberhalb der Abszissenachse liegen und nach oben konvex sind für $0 < x < \pi$ , so gilt das gleiche für die Kurven $y = U_n^{(3)}(x)$ ; womit der Fejérsche Satz bewiesen ist.

**§ 4.** In diesem Zusammenhang ist es bemerkenswert, daß für eine Reihe, deren allgemeines Glied nach Null konvergiert, also insbesondere für jede Fouriersche Reihe, die $(C, 2)$- und $(R, 2)$-Mittel entweder beide konvergieren oder beide divergieren. Es ist nämlich nach (2.3)

$$R_n^{(2)} - C_n^{(2)} = \frac{n}{2(n+1)} (C_{n-1}^{(2)} - C_n^{(2)}) ,$$

und wir brauchen nur zu beweisen, daß

$$C_n^{(2)} - C_{n-1}^{(2)} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty .$$

Nun ist

$$C_n^{(2)} - C_{n-1}^{(2)} = \frac{2}{n+1} \left\{ \frac{U_n^{(2)}}{n+2} - \frac{U_{n-1}^{(2)}}{n} \right\} = \frac{2}{n+1} \frac{n U_n^{(2)} - (n+2) U_{n-1}^{(2)}}{n(n+2)}$$

$$= \frac{2U_n^{(1)}}{(n+1)(n+2)} - \frac{4U_{n-1}^{(2)}}{n(n+1)(n+2)} ,$$

und aus der Voraussetzung $u_n \to 0$ folgt unmittelbar

$$\frac{U_n}{n} \to 0 , \ \frac{U_n^{(1)}}{n^2} \to 0 , \ \frac{U_n^{(2)}}{n^3} \to 0 \ \text{für} \ n \to \infty ,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Während noch im allgemeinen aus $C_n^{(2)} \to s$ nach (2.3) stets $R_n^{(2)} \to s$ folgt, gilt das Umgekehrte nicht immer. Setzt man z. B. $C_n^{(2)} = (-1)^n$, so wird nach (2.3) $R_n^{(2)} = \frac{(-1)^n}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, während $C_n^{(2)}$ offenbar oszilliert.

## LITERATURVERZEICHNIS


1. *L. Fejér*, Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. 13 (1933), pp. 80—88.
2. *L. Fejér*, A. Fourier-féle sor és a hatvány sor számtani közepeinek néhány uj tulajdonságáról. Matematikai és Fizikai Lapok 41 (1934), pp. 1—16.
3. *L. Fejér*, On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier series, Journal of Mathematics and Physics of the Massachusetts Institute of Technology 13 (1934), pp. 1—17.
4. *M. Riesz*, Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 22, (1924), pp. 412—419.


(Eingegangen den 9. September 1938.)