Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen.

Autor: Pfluger, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11885

Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen. I.*)

Von A. Pfluger, Solothurn

Einleitung

1. Seit sich die Theorie der ganzen Funktionen zu entwickeln begann, war es eines der zentralen Probleme, die Beziehungen zwischen der Größenordnung des Betrages der ganzen Funktion und ihrer Wertverteilung aufzusuchen. Diese Aufgabe hat sich in zwei Teilaufgaben gespalten:

1. Untersuchung der Größenordnung des Betrages bei gegebener Nullstellenverteilung.
2. Untersuchung der Wertverteilung bei gegebener Größenordnung des Betrages

In gewisser Hinsicht sind diese beiden Aufgaben reziprok. Wir beschränken uns auf Funktionen endlicher Ordnung.

Daß eine ganze Funktion bis auf einen Exponentialfaktor der Form $e^{a_n z^n + \cdots + a_0}$ durch ihre Nullstellen vollständig bestimmt ist und daß die Ordnung eines kanonischen Produktes mit dem Konvergenzexponenten der Nullstellen übereinstimmt einerseits, — der *Picard*'sche und der *Borel*'sche Satz über die Wertverteilung anderseits sind die wichtigen klassischen Ergebnisse dieser beiden Aufgaben. Die letztern Resultate wurden in der Folge verschärft durch Sätze über *Julia*'sche und *Borel*'sche Richtungen, indem jene Aussagen über die Wertverteilung in globo zu solchen über ihre Verteilung in beliebig kleinen Winkelräumen verdichtet wurden. Zur Bestimmung der Lage dieser Winkelräume, genauer, der *Julia*'schen und *Borel*'schen Richtungen genügt nun nicht die Kenntnis der Größenordnung des Betrages in globo, sondern es wird notwendig, sie einzeln längs der verschiedenen Richtungen durch den Indikator oder Strahltypus (vgl. Nr. 2) anzugeben. Trotzdem mittels des Strahltypus einige Sätze über *Borel*'sche Richtungen zutage befördert wurden, harrt letzteres Problem immer noch einer vollständigen Lösung.

Eine entsprechende Weiterentwicklung der ersten Aufgabe ist ausgeblieben. Wohl ist der äußerste Spezialfall, wo sämtliche Nullstellen

*) Diese Arbeit wurde als Habilitationsschrift der Eidgenössischen Technischen Hochschule vorgelegt.

auf einer Halbgeraden liegen, hinsichtlich des Strahltypus näher untersucht worden (vgl. Hilfssatz 3). Doch ist damit die allgemeine Aufgabe, aus der Kenntnis der Nullstellenverteilung in jedem einzelnen Winkelraum Rückschlüsse auf den Strahltypus zu ziehen, kaum begonnen. Die Betrachtung dieser Situation legt es nahe, die letztere Aufgabe einmal in Angriff zu nehmen.

I. Eine ganze Funktion $f(z)$ von endlicher Ordnung ϱ besitzt die kanonische Darstellung

$$f(z) = z^{\alpha} \cdot e^{P_h(z)} \pi(z) \quad . \tag{1.1}$$

Hierin bedeuten α eine nicht negative ganze Zahl, $\pi(z)$ das *Weierstraß*'sche kanonische Produkt über die Nullstellen von $f(z)$ und $P_h(z)$ ein Polynom vom Grad $h \leqq \varrho$. Ist die Ordnung ϱ keine ganze Zahl, $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$, so ist das Geschlecht der ganzen Funktion und daher sowohl das Geschlecht des kanonischen Produktes wie der Grad von $P_h(z)$ kleiner als ϱ. Der Faktor $z^{\alpha} e^{P_h(z)}$ und die Abänderung endlich vieler Nullstellen können daher das Verhalten des Betrages von $f(z)$ nicht „wesentlich" beeinflussen: *Bei nicht ganzzahliger Ordnung ist das asymptotische Verhalten der ganzen Funktion längs irgend welcher Halbgeraden schon durch die asymptotische Verteilung der Nullstellen vollständig bestimmt*[1]).

Damit stellt sich die Aufgabe, aus einer gegebenen Verteilung der Nullstellen das asymptotische Verhalten der ganzen Funktion längs der Halbgeraden $\arg z = \varphi$ zu berechnen. Diese Aufgabe werden wir im folgenden nur für eine spezielle Klasse von Verteilungen lösen, für sogenannte *meßbare Nullstellenverteilungen* (vgl. Nr. 11). Die gewonnenen Resultate (Satz 3) lassen sich leicht auf meromorphe Funktionen übertragen (Satz 5).

II. Die Beziehung (1.61) zwischen der Maßfunktion $N^*(\varphi)$ der Null- und Polstellenverteilung und der Funktion $h(\varphi)$ gestattet eine einfache geometrische Interpretation. Zu diesem Zwecke untersuchen wir im zweiten Abschnitt die Hüllkurve der Schar (2.1) unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen über $h(\varphi)$. Diese Hüllkurve, im allgemeinen mit Spitzen und Doppelpunkten aber ohne Wendepunkte, besitzt konvexe und konkave Bogenstücke, die entsprechend positiv und negativ gezählt zum Begriff der *relativen Länge* (Nr. 18) eines Bogens führen. *Darnach ist* $2\pi(N^*(\varphi_2) - N^*(\varphi_1))$ *nichts anderes als die relative Länge* $L(\varphi_1, \varphi_2)$ *des Bogens, der von* $x \cos \varrho\varphi + y \sin \varrho\varphi - h(\varphi) = 0$, $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$ *umhüllt wird* (Satz 8). Die Untersuchung gliedert sich in die Fragen, wie sich

---

[1]) Dasselbe gilt auch für ganze Funktionen vom Minimal- oder Maximaltypus einer ganzzahligen Ordnung.

$L(\varphi_1, \varphi_2)$ aus $h(\varphi)$ berechnen läßt und welches die charakteristischen Eigenschaften der *Bogenfunktion* $L(\varphi_1, \varphi)$ sind, zunächst ohne Rücksicht auf die Periodizität der Funktionen $h(\varphi)$ und $L(\varphi_1, \varphi)$, dann aber unter der Voraussetzung, daß beide Funktionen die Periode 2π besitzen. Hier taucht ein weitgehender Unterschied auf zwischen nicht ganzzahligem und ganzzahligem ϱ, dem ein Analogon bei ganzen Funktionen der Ordnung ϱ entspricht.

III. Erlaubt die spezielle Klasse der im ersten Abschnitt betrachteten Nullstellenverteilungen einerseits leicht den Strahltypus zu bestimmen, so liefert sie anderseits Funktionen von besonders regulärem asymptotischen Verhalten, indem gemäß Satz 3 bis auf eine Menge von linearer Dichte 0 bei $r \to \infty$ $\log |f(re^{i\varphi})| \sim h(\varphi)\, V(r)$ ist. Wir betrachten nun umgekehrt die Klasse jener ganzen Funktionen, bzw. in einem Winkelraume regulären Funktionen, die sich auf diese Weise *asymptotisch regulär* verhalten. Die Untersuchungen des dritten Abschnittes zeigen, daß solche Funktionen sich auch hinsichtlich des Argumentes (Satz 12, 13, 14) und der Nullstellenverteilung (Satz 15) regulär verhalten. Wir haben also hier eine spezielle Klasse analytischer Funktionen, deren Beziehungen zwischen Betrag, Argument und Nullstellenverteilung sich asymptotisch leicht erfassen lassen; noch mehr, bei dieser Funktionsklasse lassen sich Wertverteilung und insbesondere *Borel*'sche Richtungen mittels des Strahltypus mit aller hier wünschenswerten Genauigkeit bestimmen (Satz 17).

1. Abschnitt. Das asymptotische Verhalten meromorpher Funktionen mit meßbarer Null- und Polstellenverteilung

A. Vorbereitende Begriffsbestimmungen

2. Es bezeichne $M(r)$ den maximalen absoluten Betrag der ganzen Funktion $f(z)$ auf dem Kreis $|z| = r$. Gibt es Zahlen v, für die der Ausdruck $r^{-v} \log M(r)$ beschränkt ist, so heißt $f(z)$ von endlicher Ordnung und die untere Grenze ϱ der Zahlen v von dieser Eigenschaft heißt *Ordnung* von $f(z)$. Es bleibt also $r^{-(\varrho+\varepsilon)} \log M(r)$ für jedes feste $\varepsilon > 0$ und $r > 1$ beschränkt; dagegen kann die obere Grenze des Ausdrucks $r^{-\varrho} \log M(r)$ für $r \to \infty$ null, positiv endlich oder unendlich sein[2]). Aus diesem Grunde ist die Vergleichsfunktion r^{ϱ} für feinere Untersuchungen zu grob und es wird notwendig, den Begriff der Wachstumsordnung zu *präzisieren*.

---

[2]) Die ganze Funktion heißt dann entsprechend vom Minimal-, Mittel- oder Maximaltypus der Ordnung ϱ.

Zu diesem Zwecke betrachten wir reellwertige Funktionen $\varrho(r)$ von folgenden Eigenschaften:

1. $\varrho(r)$ ist im Intervall $(0, \infty)$ stetig.
2. Die Rechts- und Linksableitung von $\varrho(r)$ existieren und stimmen stückweise überein.
3. Es gilt

$$\lim_{r\to\infty} \varrho(r) = \varrho \tag{1.2}$$

und

$$\lim_{r\to\infty} \varrho'(r)\, r \log r = 0 \;, \tag{1.3}$$

wenn für $\varrho'(r)$ die Rechts- und Linksableitung von $\varrho(r)$ eingesetzt wird; und wir definieren: *Eine ganze Funktion $f(z)$ von der Ordnung ϱ ist von der* **präzisen Wachstumsordnung** $\varrho(r)$, *wenn der Ausdruck $r^{-\varrho(r)} \log M(r)$ für $r \to \infty$ eine positive obere Grenze besitzt.* **G. Valiron**[3]) hat gezeigt, daß auf diese Weise jeder ganzen Funktion endlicher Ordnung eine präzise Wachstumsordnung zugeordnet werden kann.

Die nun stets existierende positive Zahl

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{1}{r^{\varrho(r)}} \log M(r) = \kappa$$

nennen wir den **Typus** der ganzen Funktion bezüglich der Wachstumsordnung $\varrho(r)$. Sie mißt das maximale Anwachsen von $|f(z)|$ in der ganzen z-Ebene, sagt dagegen nichts aus über ihr Verhalten in einzelnen Winkelräumen oder längs Halbgeraden durch O. Um letzteres zu erfassen betrachten wir die Funktion

$$h(\varphi) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{1}{r^{\varrho(r)}} \log |f(re^{i\varphi})| \;. \tag{1.4}$$

Sie mißt das maximale Anwachsen von $|f(z)|$ längs der Halbgeraden $\arg z = \varphi$ und wir nennen sie **Indikator** oder **Strahltypus**[4]) von $f(z)$ bezüglich der Wachstumsordnung $\varrho(r)$.

Damit präzisiert sich unsere Aufgabe (Nr. 1) dahin: Man bestimme aus der asymptotischen Nullstellenverteilung einer ganzen Funktion von nicht ganzzahliger Ordnung ihre präzise Wachstumsordnung $\varrho(r)$ und den zugehörigen Strahltypus $h(\varphi)$.

---

[3]) Bezüglich des Begriffs der präzisen Wachstumsordnung und des nachfolgenden Satzes vgl. *G. Valiron* [2], S. 64—67.

[4]) Die Eigenschaften dieser Funktion wurden erstmals in *E. Phragmén* et *E. Lindelöf* [1] untersucht.

3. Zwei bedeutsame Ansätze zur Lösung dieser Aufgabe sind bereits bekannt. Um sie zu formulieren, bezeichnen wir die Anzahl der Nullstellen im Kreis $|z| \leqq r$ mit $n(r)$. Wir wollen überdies vom Exponentialfaktor $e^{P(z)}$ in der kanonischen Darstellung der ganzen Funktion absehen, da er eine untergeordnete Rolle spielt, und nur das kanonische Produkt über ihre Nullstellen betrachten. Das erste Resultat lautet dann:

Die Funktion $\varrho(r)$ genüge den Bedingungen (1.2) *und* (1.3) *mit* $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$. *Hat der Ausdruck $r^{-\varrho(r)} \cdot n(r)$ eine positive endliche obere Grenze für $r \to \infty$, so ist das zugehörige kanonische Produkt von der präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$*[5].

Damit ist schon ein Teil unserer Aufgabe gelöst, nämlich die Bestimmung der Wachstumsordnung $\varrho(r)$. Genügt hier allein die Kenntnis des asymptotischen Verhaltens von $n(r)$, so ist zur Bestimmung des Strahltypus die Kenntnis der Nullstellenverteilung in jedem einzelnen Winkelraum notwendig. Einen Ansatz in dieser Hinsicht bieten die Untersuchungen von **E. Lindelöf** und **G. Valiron**[6] über solche ganze Funktionen, deren Nullstellen sämtliche auf einer Halbgeraden durch O liegen. Dieses zweite, für uns wichtige Resultat lautet:

Hilfssatz 1. *Die Funktion $\varrho(r)$ genüge den Bedingungen* (1.2) *und* (1.3) *mit* $\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$. *Liegen sämtliche Nullstellen eines kanonischen Produktes $\pi(z)$ auf der negativen reellen Achse (der Nullpunkt ausgeschlossen) und genügt die Anzahlfunktion dieser Nullstellen der Bedingung*

$$n(r) \sim D r^{\varrho(r)}\ , \tag{1.5}$$

so gilt gleichmäßig in jedem Intervall $-\pi + \eta \leqq \varphi \leqq \pi - \eta$, $\eta > 0$,

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r^{\varrho(r)}} \log |\pi(re^{i\varphi})| = \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cos \varrho\varphi \tag{1.6}$$

und für $\arg z \neq \pi$

$$\log \pi(z) = (-1)^q \int_0^\infty \frac{z^{q+1} \cdot n(t)\, dt}{t^{q+1}(t+z)}\ , \tag{1.7}$$

wo $q = [\varrho]$, $q < \varrho < q+1$, *das Geschlecht des kanonischen Produktes bedeutet.*

In beiden Resultaten ist nur von kanonischen Produkten die Rede. Da letztere durch die Nullstellenverteilung vollständig gegeben sind, so

---

[5]) *G. Valiron* [2], S. 67—69.

[6]) *E. Lindelöf* [1], S. 49—58; *G. Valiron* [1], S. 230—243. Einen besondern Spezialfall siehe bei *G. Pólya* [1], S. 571 und *V. Bernstein* [2], S. 267—293.

stellt sich naturgemäß eine analoge Frage für den Fall, wo $\varrho(r)$ gegen eine nicht negative ganze Zahl strebt. Hier treffen wir ganz andere Verhältnisse an. Lösungen liegen nur in Spezialfällen vor und ich gebe zur spätern Verwendung die folgende wieder:

Zusatz. *Liegen die Nullstellen des kanonischen Produktes $\pi(z)$ sämtliche auf der negativen reellen Achse und ist ihre Anzahlfunktion $n(r)$ von der Größenordnung*

$$n(r) \sim r^n (\log r)^\alpha , \quad \alpha \neq -1 , \quad n = 1, 2, 3, \ldots , \tag{1.8}$$

so gilt gleichmäßig im Winkelraum $|\arg z| \leqq \pi - \delta$, $0 < \delta < \pi$,

$$\log \pi(z) \sim \frac{(-1)^n}{\alpha + 1} \cdot z^n (\log z)^{\alpha+1} , \tag{1.9}$$

und (1.7) *für* $\arg z \neq \pi$. *Das Geschlecht q des kanonischen Produktes ist gleich n, falls $\alpha + 1 > 0$ und gleich $n - 1$, falls $\alpha + 1 < 0$*[7]).

4. *Beweis von Hilfssatz 1.* Wir folgen einer Methode, die **G. Valiron** für den Fall $\varrho(r) \to \varrho$, $0 < \varrho < 1$, verwendet hat und die sich leicht auf unsern allgemeinern Fall übertragen läßt[8]).

Bezeichnet $E(u, q)$ den **Weierstraß**'schen Primfaktor

$$E(u, q) = (1 - u) \cdot e^{u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \cdots + \frac{u^q}{q}}$$

und sind $-r_1, -r_2, \ldots, -r_\nu, \ldots$ die Nullstellen auf der negativen reellen Achse, so ist

$$\pi(z) = \prod_1^\infty E\left(-\frac{z}{r_\nu}, q\right) .$$

Wir schneiden die z-Ebene von $-r_1$ bis ∞ längs der negativen reellen Achse auf und nehmen im Ausdruck

$$\log \pi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \log E\left(-\frac{z}{r_\nu}, q\right)$$

überall denjenigen Zweig des Logarithmus, welcher für $z = 0$ verschwindet. Dadurch ist $\log \pi(z)$ in der aufgeschnittenen Ebene D als reguläre und eindeutige Funktion definiert. Es gilt

---

[7]) *E. Lindelöf* [1], S. 49—58; *R. Nevanlinna* [1], S. 221.

[8]) *G. Valiron* [2], S. 128—130.

$$\log \pi(z) = \int_{r_1}^{\infty} \log E\left(-\frac{z}{t}, q\right) dn(t) = -\int_{r_1}^{\infty} n(t) \cdot d \log E\left(-\frac{z}{t}, q\right)$$

$$= (-1)^q \cdot z^{q+1} \int_{r_1}^{\infty} \frac{n(t)\, dt}{t^{q+1}(z+t)} = (-1)^q \int_{0}^{\infty} \frac{z^{q+1} \cdot n(t)\, dt}{t^{q+1}(z+t)} .$$

Um das Verhalten von $\log \pi(z)$ zu untersuchen zeigen wir zunächst, daß die beiden Integrale

$$J_1(z) = \int_{r_1}^{\infty} \frac{z^{q+1} \cdot n(t)\, dt}{t^{q+1}(z+t)}$$

und

$$J_2(z) = \int_{r_1}^{\infty} \frac{z^{q+1} \cdot D t^{\varrho(r)} \cdot dt}{t^{q+1}(z+t)} , \quad |z| = r ,$$

für z in D asymptotisch gleich sind. Zu diesem Zweck betrachten wir ihre Differenz

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{z^{q+1} \cdot (n(t) - D t^{\varrho(r)})\, dt}{t^{q+1}(z+t)} = \int_{r_1}^{\infty} \frac{z^{q+1} \cdot \varphi(t)\, dt}{t^{q+1}(z+t)} .$$

Beschränkt man den Punkt z auf den Winkelraum

$$|\arg z| \leqq \pi - \eta , \qquad 0 < \eta < \pi , \tag{W}$$

so ist

$$|t + z| \geqq \frac{\sin \eta}{2} (t + |z|) . \tag{1.10}$$

Für jedes $k > 1$ gilt wegen (1.3) und (1.5) für $k^{-1} r \leqq t \leqq kr$

$$|\varphi(t)| = |n(t) - D t^{\varrho(r)}| < \varepsilon(r) \cdot t^{\varrho(r)} , \quad \lim_{r \to \infty} \varepsilon(r) = 0 . \tag{1.11}$$

Ferner gibt es zufolge der Voraussetzung des Hilfssatzes eine positive Zahl $\delta > 0$, so daß $q + \delta < \varrho(r) < q + 1 - \delta$,

$$\left.\begin{array}{ll} r^{\varrho(r)-q-\delta} & \text{monoton wachsend und} \\ r^{\varrho(r)-q-1+\delta} & \text{monoton abnehmend} \end{array}\right. \tag{1.12}$$

ist für genügend große r, $r > R_0$. Schließlich folgt aus (1.5)

$$n(t) < D' t^{\varrho(t)}, \; D' > D \tag{1.13}$$

für alle $t > 0$.

Zerlegen wir den Integrationsweg (r_1, ∞) in die drei Teile $(r_1, k^{-1}r)$ $(k^{-1}r, kr)$, (kr, ∞), so folgt zunächst aus (1.10)

$$|J_1(z) - J_2(z)| \leqq \frac{2r^{q+1}}{\sin\eta}\left[\frac{1}{r}\int\limits_{r_1}^{k^{-1}r}\frac{\varphi(t)\,dt}{t^{q+1}} + \int\limits_{k^{-1}r}^{kr}\frac{\varphi(t)\,dt}{t^{q+2}} + \int\limits_{kr}^{\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t^{q+2}}\right]$$

$$= \frac{2r^{q+1}}{\sin\eta}\left[J_1 + J_2 + J_3\right].$$

Wegen (1,11) ist

$$J_2 \leqq \varepsilon(r)\,\frac{k^{\delta}}{\delta}\cdot r^{\varrho(r)-q-1}\ .$$

Aus (1,13) und (1,12) ergibt sich

$$J_1 = \frac{1}{r}\left(\int\limits_{r_1}^{R_0} + \int\limits_{R_0}^{k^{-1}r}\right)\frac{\varphi(t)\,dt}{t^{q+1}} < \frac{K}{r} + (D+D')\,\frac{k^{-\delta}}{\delta}\cdot r^{\varrho(r)-q-1}$$

und entsprechend

$$J_3 \leqq (D+D')\,\frac{k^{-\delta}}{\delta}\cdot r^{\varrho(r)-q-1}\ .$$

Es folgt

$$\left|J_1(z) - J_2(z)\right| \leqq \frac{2}{\sin\eta}\left[Kr^{q-\varrho(r)} + 2(D+D')\,\frac{k^{-\delta}}{\delta} + \varepsilon(r)\,\frac{k^{\delta}}{\delta}\right] r^{\varrho(r)}\ .$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir nun $k > 1$ so groß, daß $2(D+D')\,\frac{k^{-\delta}}{\delta} < \frac{\varepsilon}{3}$, hierauf r so groß, daß $Kr^{q-\varrho(r)} < \frac{\varepsilon}{3}$ und $\varepsilon(r)\,\frac{k^{\delta}}{\delta} < \frac{\varepsilon}{3}$; dann ist für genügend große r

$$|J_1(z) - J_2(z)| \leqq \frac{2\varepsilon}{\sin\eta}\cdot r^{\varrho(r)}$$

und daher gleichmäßig für jedes z in (W):

$$\log \pi(z) = (-1)^q\cdot D\cdot z^{q+1}\int\limits_{r_1}^{\infty}\frac{t^{\varrho(r)}\cdot dt}{t^{q+1}(t+z)} + o\left(r^{\varrho(r)}\right)\ .\ ^{9)}$$

Um das asymptotische Verhalten des letztern Integrals näher zu untersuchen, betrachten wir den Integranden $\psi(t) = \frac{t^{\varrho(r)}}{t^{q+1}(t+z)}$ für komplex-

---

[9]) Im folgenden bedeutet die Gleichung $f(r) = O(\varphi(r))$, daß der Quotient $\frac{f(r)}{\varphi(r)}$ bei $r \to \infty$ von einer gewissen Stelle an beschränkt bleibt; $f(r) = o(\varphi(r))$ dagegen besagt, daß $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{f(r)}{\varphi(r)} = 0$ sei. Insbesondere bezeichnet $O(1)$ eine Größe, die bei $r \to \infty$ beschränkt bleibt; dagegen $o(1)$ eine solche, die bei $r \to \infty$ gegen Null strebt.

wertige t. Wir beschränken uns auf das Kreisäußere $|t| > r_1$ und schneiden von r_1 bis ∞ längs der positiven reellen Achse auf. Auf dem obern Schlitzrand dieses Stücks D_1 der t-Ebene wählen wir $\arg t = 0$ und $t^{\varrho(r)}$ reell. Hiedurch ist auf D_1 ein eindeutiger Zweig von $\psi(t)$ festgelegt. Betrachten wir, daß das Integral von $\psi(t)$ längs des Kreises $|t| = R$ gegen Null strebt, wenn $R \to \infty$, so folgt aus dem **Cauchy**'schen Integralsatz, sofern z in D gelegen ist,

$$(-1)^{q+1} \cdot 2\pi i \frac{(-z)^{\varrho(r)}}{z^{q+1}} = \int_{\Gamma} \frac{t^{\varrho(r)}}{t^{q+1}(z+t)} \,.$$

Dabei ist das Integral im positiven Sinn um den Rand Γ von D_1 zu nehmen. Man hat

$$\int_{\Gamma} = \int_{r_1}^{\infty} \frac{t^{\varrho(r)}\,dt}{t^{q+1}(t+z)} - e^{2\pi i \varrho(r)} \cdot \int_{r_1}^{\infty} \frac{t^{\varrho(r)}\,dt}{t^{q+1}(z+t)} + \int_{|t|=r} \,.$$

Das letztere Integral ist von der Größenordnung $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$. Weiter folgt

$$z^{q+1} \cdot \int_{r_1}^{\infty} \frac{t^{\varrho(r)}\,dt}{t^{q+1}(z+t)} = \frac{(-1)^q \cdot 2\pi i \cdot (-z)^{\varrho(r)}}{e^{2\pi i \varrho(r)} - 1} + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

$$= \frac{(-1)^q \cdot \pi}{\sin \varrho(r)\pi} \cdot e^{i\varphi\,\varrho(r)} \cdot r^{\varrho(r)} + O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

und daher gleichmäßig in (W)

$$\log \pi(z) \sim \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi}\, e^{i\varphi\varrho} \cdot r^{\varrho(r)} \,.$$

5. Durch den Hilfssatz 1 wird unter anderem gezeigt, daß zu jeder Funktion $\varrho(r)$, die gegen keine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ strebt, eine ganze Funktion von der Wachstumsordnung $\varrho(r)$ existiert. Weiter folgt, daß die Funktion $r^{\varrho(r)}$ durch eine solche mit weitgehenden Regularitätseigenschaften ersetzt werden kann. Um dies zu zeigen, nehmen wir irgendeine Funktion $\varrho(r)$, die den Eigenschaften von Nr. 2 mit $\varrho > 0$ genügt. Wir setzen

$$\varrho_1(r) = \frac{p}{\varrho}\,\varrho(r) \quad , \quad 1 < p < 2 \;,$$

und betrachten nach Hilfssatz 1 das zu $\varrho_1(r)$ und $\frac{|\sin p\pi|}{\pi}$ an Stelle von D gehörige kanonische Produkt $\pi_1(z)$. Wählen wir nun in den Ausdrücken $\log \pi_1(z)$ und $z^{\varrho/p}$ jene Zweige, die auf der positiven reellen Achse reell sind, und setzen wir

$$V(z) = -\log \pi_1(z^{\varrho/p}) \;,$$

so folgt:

*Zu jeder Funktion $\varrho(r)$ mit $\varrho > 0$ existiert eine Funktion $V(z)$, die auf der positiven reellen Achse reellwertig, monoton wachsend und von dort ausgehend im Winkelraum $|\arg z| < \frac{\pi}{\varrho}$ der **Riemann**'schen Fläche von* $\log z$ *eindeutig und analytisch ist und die den Bedingungen*

$$V(r) \sim r^{\varrho(r)} \tag{1.14}$$

und

$$V(z) \sim e^{i\varrho\varphi} \cdot V(r) \quad , \quad z = re^{i\varphi} \tag{1.15}$$

genügt; letztere gleichmäßig im Winkelraum $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{\varrho} - \eta$, $\eta > 0$. [10])

Mittels (1.2) und (1.3) folgt überdies $(kr)^{\varrho(kr)} \sim k^{\varrho} r^{\varrho(r)}$ für jedes feste positive k und hieraus in Verbindung mit (1.15) für jedes feste z in $|\arg z| < \frac{\pi}{\varrho}$

$$V(zr) \sim z^{\varrho}\, V(r) \,. \tag{1.16}$$

Die Beziehung (1.14) erlaubt es nun, im Ausdruck (1.4) die Funktion $r^{\varrho(r)}$ durch $V(r)$ zu ersetzen, die Beziehung (1.15) und die Regularität von $V(z)$ gestatten die Anwendung der **Phragmén-Lindelöf**'schen Methode[11]) auf die Funktion $f(z)e^{-V(z)}$. Daraus folgen für den Strahltypus $h(\varphi)$ die bekannten Eigenschaften, insbesondere:

a) *Der Strahltypus $h(\varphi)$ ist eine stetige Funktion des Winkels φ*[12]).

b) *Der Strahltypus $h(\varphi)$ ist eine subtrigonometrische Funktion von der Ordnung ϱ, d. h. für jedes Wertetripel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ mit*

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 \ , \quad \varphi_2 < \varphi_1 < \frac{\pi}{\varrho} \ , \quad \varphi_3 - \varphi_2 < \frac{\pi}{\varrho}$$

gilt die Funktionalungleichung

$$h(\varphi_1) \sin \varrho\, (\varphi_3 - \varphi_2) + h(\varphi_2) \sin \varrho\, (\varphi_1 - \varphi_3) + h(\varphi_3) \sin \varrho\, (\varphi_2 - \varphi_1) \geqslant 0 \,. \tag{1.17}$$

6. Hilfssatz 1 legt folgenden weitern Schritt zur Lösung unserer Aufgabe nahe: Seien sämtliche Nullstellen des kanonischen Produktes $\pi(z)$ auf den n Halbgeraden $\arg z = \varphi_i$, $0 \leqslant \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n < 2\pi$, gegelegen und $n_i(r)$ die entsprechenden Anzahlfunktionen, die den Bedingungen

$$n_i(r) \sim d_i r^{\varrho(r)} \ , \quad \varrho(r) \to \varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$$

genügen mögen; man berechne den Strahltypus von $\pi(z)$.

---

[10]) *V. Bernstein* [1], S. 346—348.

[11]) *E. Phragmén* et *E. Lindelöf* [1].

[12]) Folgt also aus (1.6) für den Strahltypus des kanonischen Produktes in Hilfssatz 1 die Beziehung $h(\varphi) = \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cos \varrho\varphi$ zunächst für $|\varphi| < \pi$, so gilt sie wegen der Stetigkeit von $h(\varphi)$ für alle φ mit $|\varphi| \leqslant \pi$.

Zur Lösung dieser Aufgabe und zugleich zum Hinweis auf die Art der spätern Verallgemeinerung bezeichnen wir mit $n(r, \varphi)$ die Anzahl der Nullstellen im Sektor $|z| \leqq r$, $0 \leqq \arg z < \varphi$, und nennen den für jedes φ existierenden Grenzwert

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, \varphi)}{r^{\varrho(r)}} = N(\varphi) \tag{1.18}$$

Maßfunktion der Nullstellen im Winkelraum $0 \leqq \arg z < \varphi$. Für diese Treppenfunktion $N(\varphi)$ gilt

$$N(\varphi) = d_1 + d_2 + \cdots + d_i\,, \quad \text{wenn} \quad \varphi_i < \varphi \leqq \varphi_{i+1}\,,$$

und

$$dN(\varphi) = \begin{matrix} 0 & \text{für } \varphi \neq \varphi_1\,, \varphi_2\,, \ldots, \varphi_n \\ d_i & \text{für } \varphi = \varphi_i \quad . \end{matrix}$$

Bezeichnet $\pi_i(z)$ das kanonische Produkt über die Nullstellen auf der Halbgeraden $\arg z = \varphi_i$, so ist

$$\pi(z) = \prod_{i=1}^{n} \pi_i(z) \quad .$$

Für $\varphi \neq \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ folgt aus Hilfssatz 1

$$\log |\pi_i(z)| \sim \frac{\pi d_i}{\sin \varrho\pi} \cos(\varrho\,|\varphi_i - \varphi| - \varrho\pi)\, V(r)$$

und hieraus

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{V(r)} \log |\pi(re^{i\varphi})| = \frac{\pi}{\sin \varrho\pi} \sum_{i=1}^{n} d_i \cos(\varrho\,|\varphi_i - \varphi| - \varrho\pi) \ .$$

Setzen wir das Differential $dN(\varphi)$ periodisch über das Intervall $(0, 2\pi)$ hinaus fort und beachten wir, daß $dN(\varphi + \theta) = d_i$ für $\theta \equiv \varphi_i - \varphi$ $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$, sonst aber Null ist, so kann letztere Summe als **Stieltjes**'sches Integral geschrieben werden. Es folgt

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{V(r)} \log |\pi(re^{i\varphi})| = \frac{\pi}{\sin \varrho\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varrho\theta - \varrho\pi)\, dN(\varphi + \theta) \ , \tag{1.19}$$

wenn $\varphi \neq \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Als stetige Funktion ist daher der Strahltypus von $\pi(z)$ für alle Winkel φ gleich der rechten Seite von (1.19).

Erlaubt die besondere Art der hier betrachteten Nullstellenverteilung einerseits leicht den Strahltypus zu bestimmen, so liefert sie anderseits Funktionen von besonders regulärem asymptotischen Verhalten, indem gemäß (1.19) für alle von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ verschiedenen Winkel φ in (1.4) der Limes superior durch den Limes ersetzt werden darf. Was diese

Regularität für $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ zerstört, sind vorab die Nullstellen, die das Anwachsen der Funktion längs der Halbgeraden $\arg z = \varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, stellenweise herabdrücken. Doch ist zu erwarten, daß das allgemeine reguläre Anwachsen sich noch irgendwie in die Grenzstrahlen hinein fortsetze, etwa so, daß die Abweichungen von der regulären Linie eher „stellenweise" als „stückweise" seien. Ein solches Verhalten können wir z. B bei der Funktion $\sin \pi z$ feststellen. Für $\varphi \neq 0, \pi$ gilt $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log |\sin(\pi r e^{i\varphi})| = \pi |\sin \varphi|$, aber nicht für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$. Stanzen wir jedoch die Umgebungen $|x \pm n| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, der Nullstellen von $\sin \pi z$ aus der reellen Achse aus, so gilt im übrigen Teil, wie klein auch diese Umgebungen gewählt werden, $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\log |\sin \pi x|}{|x|} = 0$.

7. Die allgemeine Klärung des eben dargelegten Sachverhaltes beruht im wesentlichen auf

Hilfssatz 2. *Sei $F(z)$ in $|z| \leqslant R$ regulär,*

$$\log |F(z)| \leqslant A \qquad \text{für } |z| \leqslant R$$

und bei gegebenem $k < 1$

$$\log |F(z_0)| \geqslant -A \quad \text{für ein } z_0 \text{ in } |z| \leqslant kR \;.$$

Dann gibt es

a) *zu jedem $\zeta > 0$ ein nur von k und ζ abhängiges $H = H(k, \zeta)$, so daß*

$$\log |F(z)| \geqslant -AH$$

für $|z| \leqslant kR$, ausgenommen in Kreislein, deren Radiensumme $< \zeta R$.

b) *Eine nur von k abhängige Zahl $H = H(k)$, so daß*

$$\left| \int d\{\arg F(z)\} \right| < AH \;,$$

wenn längs einer einfachen Jordankurve in $|z| \leqslant kR$ integriert wird, die irgend zwei Punkte der Peripherie $|z| = kR$ verbindet und die Nullstellen meidet.

Dies ist eine einfache Verallgemeinerung des nachfolgenden Hilfssatzes von **V. Bernstein** und **M. L. Cartwright.** [13]).

---

[13]) Zum ersten Teil (a) vgl. *V. Bernstein* [3], S. 179. — Zum zweiten Teil (b) vgl. *M. L. Cartwright* [1], S. 44—46.

Hilfssatz 3. *Die Funktion $F(z)$ sei in $|z| \leqslant R$ regulär und genüge dort den Bedingungen*

$$\log |F(0)| \geqslant -A$$

und

$$\log |F(z)| \leqslant A \ .$$

Dann gibt es

a) *zu jedem $\kappa < 1$ und $\eta > 0$ eine nur von κ und η abhängige Größe $H = H(\kappa, \eta)$, so daß im ganzen Bereich $|z| \leqslant \kappa R$*

$$\log |F(z)| > -HA$$

ist ausgenommen höchstens in Kreislein mit der Radiensumme $< \eta R$.

b) *Zu jedem $\kappa < 1$ eine nur von κ abhängige Größe $H = H(\kappa)$, so daß*

$$\left| \int d\{\arg F(z)\} \right| < HA \ ,$$

wenn längs eines einfachen Jordanbogens in $|z| \leqslant \kappa R$ integriert wird, die irgend zwei Punkte der Peripherie $|z| = \kappa R$ verbindet und die Nullstellen meidet.

Wir beweisen Hilfssatz 2 mittelst Hilfssatz 3. Sei z_0 auf der positiven reellen Achse, was durch Drehung der z-Ebene immer erreicht werden kann. Um z als Mittelpunkt legen wir den Kreis vom Radius $r = (1-k)R$ und wenden darauf mit $\kappa = \frac{2}{3}$ und $\eta = \frac{1}{7}$ den Hilfssatz 3a an. Hiernach ist in $|z - z_0| \leqslant \frac{2}{3} r$

$$\log |F(z)| > -H(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{7})A = -H_1 A \ , \tag{1.20}$$

ausgenommen höchstens in solchen Kreislein, die wegen $\eta = \frac{1}{7}$ das Intervall $(z_0 - \frac{2}{3}r, z_0 - \frac{1}{3}r)$ nicht ganz überdecken können. Dort wählen wir einen Punkt z_1, für welchen (1.20) erfüllt ist und wenden auf den Kreis $|z - z_1| \leqslant r$ wieder den Hilfssatz 3a mit $\kappa = \frac{2}{3}$ und $\eta = \frac{1}{7}$ an und fahren so fort. Nach höchstens $\left[\dfrac{kR}{\frac{r}{3}}\right] = \left[\dfrac{3k}{1-k}\right]$ Schritten kommen wir mit dem Punkt z_n in das Intervall $(-\frac{1}{3}r, +\frac{1}{3}r)$ hinein. Für diesen Punkt gilt

$$\log |F(z_n)| > -H_1^{\frac{3k}{1-k}} \cdot A \ .$$

Eine abermalige Anwendung von Hilfssatz 3a mit $\kappa = \dfrac{1+2k}{2+k}$ und $\eta = \zeta$ auf den Kreis $|z - z_n| \leqslant R - \dfrac{r}{3} = R\left(1 - \dfrac{1-k}{3}\right)$, der in $|z| \leqslant R$ enthalten ist, ergibt

$$\log |F(z)| \geqslant -H_1^{\frac{3k}{1-k}} \cdot H_2 \cdot A$$

für $|z - z_n| < R - \frac{2}{3}r = R\left(1 - \frac{2}{3}(1-k)\right)$ ausgenommen in Kreislein, deren Radiensumme $< \eta R\left(1 - \frac{1-k}{3}\right) < \eta R$ ist. Der Kreis $|z - z_n| \leqslant R\left(1 - \frac{2}{3}(1-k)\right)$ enthält aber den Kreis $|z| \leqslant kR$ und damit ist die Behauptung a) bewiesen.

Zum Beweis von b) integrieren wir zunächst über einen Durchmesser des Kreises $|z| \leqslant kR$. Gemäß Behauptung a)[14]) kann dieser Durchmesser mit zwei Kreisen überdeckt werden, für welche die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 erfüllt sind. Daraus folgt dann b) im Falle eines Durchmessers. Der allgemeine Fall ergibt sich daraus in Verbindung mit der Bemerkung, daß die Anzahl der Nullstellen von $F(z)$ in $|z| \leqslant kR$ den Betrag $\frac{2A}{\log \frac{1}{k}}$ nicht übersteigt[15]).

8. Sei nun $f(z)$ eine in $|\arg z| \leqslant \alpha$ reguläre Funktion von der Wachstumsordnung $\varrho(r)$ und dem Strahltypus $h(\varphi)$ und es gelte für $0<\varphi<\alpha$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \log |f(re^{i\varphi})| = h(\varphi) \quad . \tag{1.21}$$

Wir untersuchen bei beliebig kleinem vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die Menge $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ der r-Werte im Intervall $(0, \infty)$, für die

$$|\log|f(r)| - h(0)\cdot V(r)| < \varepsilon V(r) \ . \tag{1.22}$$

Hierzu wählen wir $\zeta > 0$ beliebig klein und $k = \frac{1}{2}$, wodurch die Größen ζ und k und hiedurch auch die Größe $H = H(k, \zeta)$ in Hilfssatz 2 festgelegt sind. Danach wählen wir β so klein, daß

$$|h(\varphi) - h(0) \cos \varrho\varphi| < \frac{\varepsilon}{8H} \cdot \left(\frac{1-\sin\beta}{1+\sin\beta}\right)^{\varrho} \tag{1.23}$$

für $|\varphi| \leqslant \beta$ und beschreiben dem Winkelraum $|\arg z| \leqslant \beta$ eine Schar von Kreisen $|z - R_n| \leqslant \frac{1}{2} R_n \sin\beta$ mit $1 = R_1 < R_2 < R_3 < \ldots$ und $R_{n+1} = R_n \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}\sin\beta}{1 - \frac{1}{2}\sin\beta}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein, so daß jeder Kreis seine beiden benachbarten von außen berührt und sie deshalb die ganze positive reelle Achse bis auf das Intervall $0 < x < 1 - \frac{1}{2}\sin\beta$ vollständig überdecken. Neben dieser Schar betrachten wir noch eine zweite, die von den Kreisen $|z - R_n| \leqslant R_n \sin\beta$ gebildet wird.

---

[14]) Man wähle dort etwa $\zeta = \frac{k}{10}$.

[15]) Letzteres ist eine unmittelbare Folge der *Jensen*'schen Ungleichung.

Wählen wir nun irgend ein φ_0 im Intervall $0 < \varphi < \frac{\beta}{4}$, so liegt $R_n e^{i\varphi_0}$ im Kreis $|z - R_n| \leqq \frac{1}{2} R_n \sin \beta$ und es gilt nach Voraussetzung (1.21) für genügend große r

$$|\log |f(R_n e^{i\varphi_0})| - h(\varphi_0) V(R_n)| < \frac{\varepsilon}{4H} (1 - \sin \beta)^\varrho \cdot V(R_n) \; ; \tag{1.24}$$

ferner

$$\log |f(z)| - h(\varphi) V(|z|) < \frac{\varepsilon}{4H} \cdot \left(\frac{1 - \sin \beta}{1 + \sin \beta}\right)^\varrho \cdot V(|z|) \tag{1.25}$$

für $|z - R_n| \leqq R_n \sin \beta$, $n > N_0$. Wir setzen

$$F(z) = f(z) \, e^{-h(0) \cdot V(z)} . \tag{1.26}$$

Dann ist wegen (1.23), (1.24), (1.25) und (1.16) für genügend große n, $n > N_1 > N_0$

$$\log |F(z)| < \frac{\varepsilon}{2H} (1 - \sin \beta)^\varrho \cdot V(R_n)$$

für $|z - R| \leqq R_n \sin \beta$ und

$$\log |F(R_n e^{i\varphi_0})| > - \frac{\varepsilon}{2H} (1 - \sin \beta)^\varrho \cdot V(R_n)$$

mit $|R_n e^{i\varphi_0} - R_n| \leqq \frac{1}{2} R_n \sin \beta$. Durch Anwendung von Hilfssatz 2 mit den eingangs festgelegten Größen ζ und $k = \frac{1}{2}$ auf $F(z)$ im Kreis $|z - R_n| \leqq R_n \sin \beta$ folgt

$$\log |F(z)| > - \frac{\varepsilon}{2} (1 - \sin \beta)^\varrho \cdot V(R_n) > - \varepsilon V(z)$$

in $|z - R_n| \leqq \frac{1}{2} R_n \sin \beta$ für $n > N_2 > N_1$ ausgenommen in Kreislein, deren Radiensumme $< \zeta R_n \sin \beta$ ist. Diese Ausnahmekreise bedecken also von der positiven reellen Achse in jedem Intervall $(0, r)$ höchstens eine Menge vom Maß $2 \zeta r + 2 \zeta r \sin \beta < 4 \zeta r$ [16]). Rechnen wir das Intervall $0 < x < R_{N_2} (1 + \frac{1}{2} \sin \beta)$ zu den Ausnahmeintervallen, die von den Ausnahmekreislein herrühren, noch hinzu, so folgt: Es gilt $\log |F(r)| > - \varepsilon V(r)$ und daher wegen (1.26) und (1.25) auch (1.22) auf der ganzen positiven reellen Achse höchstens mit Ausnahme einer Menge, deren Maß im Intervall $(0, r)$ den Betrag $4 \zeta r + R_{N_2} (1 + \frac{1}{2} \sin \beta)$ nicht übersteigt. Bezeichnet $m(r)$ das Maß des im Intervall $(0, r)$ gelegenen Stücks der Menge $\mathfrak{M}(\varepsilon)$, so ist $\liminf\limits_{r \to \infty} \frac{m(r)}{r} \geqq 1 - 4 \zeta$. Da aber $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ nur

[16]) Eine ähnliche Verwendung von Hilfssatz 3 vgl. bei *M. L. Cartwright* [2], [3], [4]; insbesondere [2], S. 165.

von ε abhängt und ζ unabhängig von ε beliebig klein gewählt werden kann, so folgt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m(r)}{r} = 1 \; . \tag{1.27}$$

Satz 1. *Es sei $f(z)$ eine in $|\arg z| \leqslant \alpha$ reguläre Funktion von der Wachstumsordnung $\varrho(r)$ und dem Strahltypus $h(\varphi)$ und es gelte für $0 < \varphi < \alpha$* (1.21). *Bezeichnet $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ die Menge der r-Werte in $(0, \infty)$, für die* (1.22) *erfüllt ist und $m(r)$ das Maß von $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ in $(0, r)$, so gilt* (1.27).

Das asymptotische Verhalten von $\log|f(r)|$ unterscheidet sich also von demjenigen der Funktion $h(0)V(r)$ nur „stellenweise" und kann als eine Verallgemeinerung der Limesbeziehung (1.21) aufgefaßt werden. Seine Bedeutung für spätere Untersuchungen rechtfertigt eine genauere Begriffsbestimmung.

9. Sei im Intervall $(0, \infty)$ eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ gegeben, die in jedem Teilintervall im **Lebesgue**'schen Sinne meßbar ist. $m(r)$ bezeichne das Maß des im Intervall $(0, r)$ enthaltenen Stücks dieser Menge. Wir nennen $m(r)$ die zur Menge $\mathfrak{M}$ gehörige **Maßfunktion** und definieren:

1. *Die Zahlen*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{m(r)}{r} = \overline{D} \quad \textit{bzw.} \quad \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r)}{r} = \underline{D}$$

heißen **obere** *bzw.* **untere lineare Dichte der Menge** $\mathfrak{M}$.

2. *Ist $\overline{D} = \underline{D}$, gilt also*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m(r)}{r} = D = \overline{D} = \underline{D} \; ,$$

so heißt $\mathfrak{M}$ von **linearer Dichte** *D.* [17])

Aus dieser Definition folgt unmittelbar:

(a) Hat $\mathfrak{M}$ die obere lineare Dichte $\overline{D}$, so hat die Komplementärmenge $\overline{\mathfrak{M}}$ die untere lineare Dichte $1 - \overline{D}$.

(b) Der Durchschnitt zweier Mengen von linearer Dichte 1 ist wieder von linearer Dichte 1.

(c) Der Durchschnitt einer Menge von der Dichte 1 und einer Menge von der obern linearen Dichte $\overline{D}$ hat wieder die obere lineare Dichte $\overline{D}$.

Aus dem dargelegten Begriff „Menge von linearer Dichte" ergibt sich folgende Erweiterung des Grenzwertes an der Stelle $x = \infty$.

---

[17]) Die Begriffe untere und obere lineare Dichte wurden in *Besicovitsch* [1] definiert.

Definition: *Die Zahl l heißt* **„dominierender Häufungswert"** *der Funktion $\varphi(x)$ für $x \to \infty$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ im Intervall $0 < x < \infty$ eine Menge $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ von linearer Dichte 1 gibt, so daß*

$$|\varphi(x) - l| < \varepsilon \, , \tag{1.28}$$

sobald x der Menge $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ angehört.

Dieser ganze Sachverhalt soll kurz durch die Schreibweise

$$\lim_{x \to \infty}{}^{*} \; \varphi(x) = l$$

ausgedrückt werden. [18])

Nach dieser Definiton darf die Ungleichung (1.28) im Gegensatz zum Grenzwert in unendlich vielen, gegen Unendlich strebenden Intervallen falsch sein, sofern nur das Maß dieser Ausnahmeintervalle im Vergleich zum Ausmaß des ganzen Intervalles verschwindend klein ist. Es wird also im allgemeinen l nicht der einzige Häufungswert von $\varphi(x)$ für $x \to \infty$ sein. Betrachtet man aber nicht nur die Existenz eines Häufungswertes h, sondern auch die „Affinität", welche $\varphi(x)$ im Intervall $(0, \infty)$ zu diesem Häufungswert besitzt, d. h. die untere lineare Dichte der Menge $\mathfrak{M}(\varepsilon)$, für welche bei kleinem $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $|\varphi(x) - h| < \varepsilon$ erfüllt ist, so hat bei obigem Sachverhalt der Häufungswert l gegenüber allen andern den Vorzug. Denkt man sich etwa statt der Häufungswerte Kugeln von der Größe ihrer Affinität zur Funktion $\varphi(x)$, so wird bei jedem noch so feinmaschigen Sieb die zum Häufungswert l gehörige Kugel als einzige im Siebe bleiben, l ist also der „dominierende Häufungswert". Dieser Sachverhalt wird durch folgenden Satz noch vertieft:

Satz 2. *Die Aussage*

$$„\lim_{x \to \infty}{}^{*} \; \varphi(x) = l \text{"}$$

ist gleichbedeutend mit der folgenden:

„Es gibt im Intervall $0 < x < \infty$ eine feste Menge $\mathfrak{M}$ von linearer Dichte 1, so daß im gewöhnlichen Sinne

$$\lim \varphi(x) = l \, ,$$

wenn x in dieser Menge $\mathfrak{M}$ gegen Unendlich strebt."

---

[18]) Falls die Funktion $\varphi(x)$ integrierbar und *absolut beschränkt* ist im Intervall $(0, \infty)$, ist dieser „dominierende Häufungswert" identisch mit dem Mittelwert $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt$. Im allgemeinen aber sind diese beiden Begriffe nicht miteinander vergleichbar. Denn ersterer besagt etwas über alle Werte von $\varphi(x)$ im Mittel, letzterer aber etwas über die meisten Werte im einzelnen, über die andern dagegen gar nichts.

Beweis: Ausgehend von der Definition des dominierenden Häufungswertes läßt sich zur Zahlenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{i}, \ldots$ eine Folge von Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_i, \ldots$ mit linearer Dichte 1 derart bestimmen, daß

$$\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{M}_i \supset \cdots$$

und

$$|\varphi(x) - l| < \tfrac{1}{i} \quad \text{für} \quad x \subset \mathfrak{M}_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots$$

Bedeutet $m_i(r)$ die zu $\mathfrak{M}_i$ gehörige Maßfunktion, so gibt es eine wachsende, gegen Unendlich strebende Folge positiver Zahlen r_i, so daß $m_i(r) > (1 - \frac{1}{i})\, r$ für $r > r_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Bezeichnet nun $\mathfrak{M}_i^*$ den im Intervall $(0, r_{i+1})$ gelegenen Teil der Menge $\mathfrak{M}_i$, so hat die Vereinigungsmenge $\mathfrak{M}$ aller dieser Mengen $\mathfrak{M}_i^*$ die im Satz behauptete Eigenschaft. Denn für ihre Maßfunktion $m(r)$ gilt $m(r) \geqslant m_i(r)$ für $r_i < r \leqslant r_{i+1}$. Es hat also $\mathfrak{M}$ die lineare Dichte 1. Gehört ferner x der Menge $\mathfrak{M}$ und dem Intervall $r_i < x \leqslant r_{i+1}$ an, so gehört x auch zur Menge $\mathfrak{M}_i$. Folglich ist

$$|\varphi(x) - l| < \tfrac{1}{i}\ ,$$

woraus sich die Behauptung $\lim \varphi(x) = l$ für $x \subset \mathfrak{M}$ ergibt.

Der Beweis der Umkehrung ist einfach und sei dem Leser überlassen.

Aus den Eigenschaften der Mengen von linearer Dichte ergibt sich leicht, daß der dominierende Häufungswert von der Auswahl der Mengen $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ unabhängig, also durch die Funktion $\varphi(x)$ eindeutig bestimmt ist. Ebenso folgt, daß die Rechenregeln für Grenzwerte auch für dominierende Häufungswerte Geltung besitzen. Denn sind $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ zwei Funktionen, für die $\lim\limits_{x\to\infty}{}^* \varphi_1(x)$ und $\lim\limits_{x\to\infty}{}^* \varphi_2(x)$ existieren, so gilt nach Satz 2 für zwei feste Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ von linearer Dichte 1

$$\lim_{x - \mathfrak{M}_1 \to \infty} \varphi_1(x) = l_1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x - \mathfrak{M}_2 \to \infty} \varphi_2(x) = l_2\,.$$

Dasselbe gilt auch für den Durchschnitt dieser Mengen, der ebenfalls von linearer Dichte 1 ist und durch Anwendung der Rechenregeln für Grenzwerte folgen dann wieder unter Verwendung von Satz 2 die entsprechenden Rechenregeln für dominierende Häufungswerte. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty}{}^* \varphi_1(x) \pm \lim_{x\to\infty}{}^* \varphi_2(x) = \lim_{x\to\infty}{}^* (\varphi_1(x) \pm \varphi_2(x))\ , \tag{a}$$

$$\lim_{x\to\infty}{}^* \varphi_1(x) \cdot \lim_{x\to\infty}{}^* \varphi_2(x) = \lim_{x\to\infty}{}^* (\varphi_1(z) \cdot \varphi_2(x))\ , \tag{b}$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}{}^* \varphi_1(x)}{\lim\limits_{x\to\infty}{}^* \varphi_2(x)} = \lim_{x\to\infty}{}^* \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\ , \tag{c}$$

letzteres sofern $\varphi_2(x) \neq 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty}{}^* \varphi_2(x) \neq 0$.

Gemäß unserer getroffenen Begriffsbestimmung läßt sich jetzt die Behauptung von Satz 1 so formulieren:

Es gilt

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{\log |f(r)|}{V(r)} = h(0) \;.$$

Entsprechend erfährt das Resultat (1.19) von Nr. 6 mittels Satz 1 folgende Präzisierung:

Wird die in Nr. 6 betrachtete Nullstellenverteilung zugrunde gelegt, so gilt für alle Winkel φ

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{V(r)} \log |\pi(re^{i\varphi})| = \frac{\pi}{\sin \varrho\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varrho\theta - \varrho\pi)\, d\, N(\varphi + \theta) \qquad (1.29)$$

und in jenen Winkelräumen, die keine Nullstellen enthalten, darf lim* *durch* lim *ersetzt werden.*

B. Ganze Funktionen mit meßbarer Nullstellenverteilung; Verallgemeinerung auf meromorphe Funktionen

10. Durch genügende Verfeinerung der obigen Nullstellenverteilung läßt sich erreichen, daß die zugehörige Maßfunktion $N(\varphi)$ mit beliebiger Genauigkeit eine vorgegebene monoton wachsende Funktion approximiert. Alle diese Verteilungen sind aber insofern noch von sehr spezieller Natur, als die Nullstellen immer nur auf einer endlichen (wenn auch beliebig großen) Anzahl von Strahlen durch 0 liegen dürfen. Um uns von dieser Forderung loszulösen, müssen wir einen „Verschmierungsprozeß" vornehmen, dessen Möglichkeit auf der folgenden Tatsache beruht: Das asymptotische Verhalten eines kanonischen Produktes $\pi_\delta(z)$, dessen Nullstellen im Winkelraum $|\arg z - \pi| \leqq \delta$ gelegen sind und der Bedingung (1.5) genügen, nähert sich demjenigen von $\pi(z)$ (vgl. Hilfssatz 1) um so mehr, je kleiner der Winkel δ wird. Genauer formuliert heißt dies:

Hilfssatz 4. *Zu jedem $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ und $\xi > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon, \eta, \xi)$ mit $\eta > \delta \geqq 0$ von folgender Eigenschaft: Liegen sämtliche Nullstellen eines* ***Weierstraß****'schen kanonischen Produktes $\pi_\delta(z)$ im Winkelraum $|\arg z - \pi| \leqq \delta$ und genügt die Anzahlfunktion dieser Nullstellen der Bedingung*

$$n(r) \sim D r^{\varrho(r)}\,, \quad \varrho(r) \to \varrho \neq 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1.30)$$

so gilt gleichmäßig im Intervall $|\varphi| \leqslant \pi - \eta$ *für genügend große* r

$$\left| \log |\pi_\delta(re^{i\varphi})| - \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cos \varrho\varphi \cdot V(r) \right| < \varepsilon \frac{\pi D}{|\sin \varrho\pi|} \cdot V(r) . \tag{1.31}$$

In den Restintervallen $\pi - \eta \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ *gilt nur*

$$\log |\pi_\delta(re^{i\varphi})| - \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cos \varrho\varphi \cdot V(r) < \varepsilon \frac{\pi D}{|\sin \varrho\pi|} \cdot V(r) \tag{1.32}$$

gleichmäßig für alle genügend großen r, *währenddem*

$$\log |\pi_\delta(re^{i\varphi})| - \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cdot V(r) > \varepsilon \frac{\pi D}{|\sin \varrho\pi|} \cdot V(r) \tag{1.33}$$

gültig ist für alle $r > 0$ *bis auf eine Menge von oberer linearer Dichte* $< \xi$.

Beweis: Wir beweisen den Hilfssatz in drei Abschnitten, indem wir bei gegebenem $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $\xi > 0$ zeigen:

1. δ läßt sich so klein wählen, daß (1.31) für genügend große r gleichmäßig im Intervall $-\pi + \eta \leqslant \varphi \leqslant \pi - \eta$ erfüllt ist.

2. δ läßt sich überdies noch so klein wählen, daß für genügend große r (1.32) auch in den Restintervallen $\pi - \eta \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ erfüllt ist.

3. δ läßt sich schließlich so klein wählen, daß (1.33) auch in den Restintervallen $\pi - \eta \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ für $r > 0$ bis auf eine Menge von oberer linearer Dichte $< \xi$ erfüllt ist.

Erster Schritt. Wir bezeichnen die nach wachsenden Beträgen geordneten Nullstellen von $\pi_\delta(z)$ mit $-a_\nu = -r_\nu e^{i\alpha_\nu}$, $|\alpha_\nu| \leqslant \delta$, und betrachten die beiden Produkte

$$\pi_0(z) = \prod_1^\infty E\left(-\frac{z}{r_\nu}, q\right)$$

und

$$\pi_\delta(z) = \prod_1^\infty E\left(-\frac{z}{a_\nu}, q\right),$$

wobei das Geschlecht q des **Weierstraß**'schen Primfaktors $E(u, q)$ (vgl. Nr. 4) gleich der größten in ϱ enthaltenen ganzen Zahl ist. Bezeichnet C_ν den Bogen, der r_ν mit $r_\nu e^{i\alpha_\nu}$ verbindet, so folgt

$$\log \pi_\delta(z) - \log \pi_0(z) = \sum_{\nu=1}^\infty \left(\log E\left(-\frac{z}{a_\nu}, q\right) - \log E\left(-\frac{z}{r_\nu}, q\right)\right) \tag{1.34}$$

$$= \sum_{\nu=1}^\infty \int_{C_\nu} \left(\frac{d}{d\zeta} \log E\left(-\frac{z}{\zeta}, q\right)\right) d\zeta = (-1)^{q+1} \sum_{\nu=1}^\infty \int_{C_\nu} \frac{z^{q+1}\, d\zeta}{\zeta^{q+1}(z+\zeta)} .$$

$z = re^{i\varphi}$ und $\zeta = te^{i\theta}$ gesetzt, gilt wegen $|\varphi| \leqq \pi - \eta$, $|\theta| \leqq \delta$ und $\delta < \eta$ die Ungleichung

$$|z+\zeta| \geqq (r+t)\sin\frac{\eta-\delta}{2}\ .$$

Das Integral der letzten Summe von (1.34) ist absolut kleiner als

$$\frac{\delta \cdot r^{q+1}}{\sin\frac{\eta-\delta}{2} \cdot r_\nu^q (r+r_\nu)}$$

und deshalb

$$\left|\log \pi_\delta(re^{i\varphi}) - \log \pi_0(re^{i\varphi})\right| < \frac{\delta}{\sin\frac{\eta-\delta}{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r^{q+1}}{r_\nu^q(r+r_\nu)} = \frac{\delta}{\sin\frac{\eta-\delta}{2}} \int_0^\infty \frac{r^{q+1}\,dn(t)}{t^q(r+t)}$$

$$= \frac{\delta \cdot r^{q+1} n(t)}{\sin\frac{\eta-\delta}{2}\, t^q(r+t)}\Bigg|_0^\infty - \frac{\delta}{\sin\frac{\eta-\delta}{2}} \int_0^\infty n(t)\, r^{q+1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^q(r+t)}\right) dt\ .$$

Wegen (1.30) verschwindet das erste Glied der letzten Seite. Der Differentialquotient unter dem Integral ist negativ. Sein absoluter Betrag ist kleiner als $\dfrac{q+1}{t^{q+1}(r+t)}$ und folglich

$$\Big|\log|\pi_\delta(re^{i\varphi})| - \log|\pi_0(re^{i\varphi})|\Big| \leqq \frac{\delta(q+1)}{\sin\frac{\eta-\delta}{2}} \int_0^\infty \frac{r^{q+1} \cdot n(t)\,dt}{t^{q+1}(r+t)} =$$

$$= \frac{\delta(q+1)}{\sin\frac{\eta-\delta}{2}} \log \pi_0(r)\ .$$

Wählen wir nun bei beliebig kleinem aber festem $\eta > 0$ die Zahl δ so klein, daß $\dfrac{\delta(q+1)}{\sin\frac{\eta-\delta}{2}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, so ist

$$\Big|\,|\log \pi_\delta(re^{i\varphi})| - \log|\pi_0(re^{i\varphi})|\,\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \log \pi_0(r)\ ,$$

woraus sich in Verbindung mit Hilfssatz 1 ergibt, daß bei genügend großem r (1.31) gleichmäßig im ganzen Intervall $-\pi+\eta \leqq \varphi \leqq \pi-\eta$ erfüllt ist. Damit ist der erste Schritt bewiesen.

Zweiter Schritt. Der Beweis dieses Teiles gelingt mit Hilfe eines **Phragmén-Lindelöf**'schen Satzes über den Strahltypus[19]). Ist $\varepsilon > 0$

---

[19]) *E. Phragmén* et *E. Lindelöf* [1], Gilt für eine ganze Funktion der Ordnung ϱ $h(\pm a) \leqq A$, $0 < a < \dfrac{\pi}{2\varrho}$, so folgt $h(\varphi) \leqq \dfrac{A}{\cos\varrho a}\cos\varrho\varphi$, $|\varphi| \leqq a$.

beliebig vorgegeben, so läßt sich aus Stetigkeitsgründen η' mit $0 < \eta' < \frac{\pi}{2\varrho}$, $\eta' < \eta$, so klein wählen, daß

$$\left(\pm \cos \varrho (\pi - \eta') + \frac{\varepsilon}{4}\right) \frac{\cos \varrho (\varphi - \pi)}{\cos \varrho \eta'} < \pm \cos \varrho\varphi + \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.35}$$

für $\pi - \eta' \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Gemäß dem ersten Schritt gilt für genügend kleines δ, mit η' an Stelle von η:

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log |\pi_\delta (r e^{i\varphi})|}{V(r)} < \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cos \varrho\varphi + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{\pi D}{|\sin \varrho\pi|} \tag{1.36}$$

für $|\varphi| \leqslant \pi - \eta'$. Der Wachstumsindikator $h(\varphi)$ der ganzen Funktion $\pi_\delta(z)$ von der Ordnung ϱ genügt also in den Enden des Intervalls $\pi - \eta' \leqslant \varphi \leqslant \pi + \eta'$, $\eta' < \frac{\pi}{2\varrho}$, der Ungleichung

$$h(\pi \pm \eta') < \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cos \varrho (\pi - \eta') + \frac{\pi D}{|\sin \varrho\pi|} \cdot \frac{\varepsilon}{4}$$

und infolgedessen nach dem Satz von **Phragmén-Lindelöf** im ganzen Winkelraum $\pi - \eta' \leqslant \varphi \leqslant \pi + \eta'$ der Ungleichung

$$h(\varphi) < \pi D \left(\frac{\cos \varrho (\pi - \eta')}{\sin \varrho\pi} + \frac{\varepsilon}{4\,|\sin \varrho\pi|}\right) \frac{\cos \varrho (\varphi - \pi)}{\cos \varrho\eta'} .$$

Berücksichtigt man (1.35) und (1.36), so folgt

$$h(\varphi) < \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cos \varrho\varphi + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\pi D}{|\sin \varrho\pi|}, \qquad |\varphi| \leqslant \pi ,$$

womit der zweite Schritt bewiesen ist.

Dritter Schritt. Seien $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ und $\xi > 0$ beliebig kleine vorgegebene Zahlen. Durch $\zeta = \frac{\xi}{2}$ und $k = \frac{1}{2}$ sind dann die Größen ζ und k und damit auch $H = H(k, \zeta) > 1$ in Hilfssatz 2 festgelegt. Darnach wählen wir $\eta'' < \eta$ so klein, daß

$$\frac{\pi D}{|\sin \varrho\pi|} \left| \cos \varrho\varphi - \cos \varrho\pi \cos \varrho (\varphi - \pi) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{24 H} \left(\frac{1 - \sin 4\eta''}{1 + \sin 4\eta''}\right)^{\varrho} < \frac{\varepsilon}{6} \tag{1.37}$$

für $|\varphi - \pi| \leqq 4\,\eta''$ und bestimmen hierauf gemäß dem zweiten Schritt δ so, daß für genügend große $|z|$, $|z| > R_0$,

$$\log\, |\pi_{\delta}(z)| < \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cos \varrho\varphi \cdot V(|z|) + \frac{\varepsilon}{12H}\left(\frac{1 - \sin 4\eta''}{1 + \sin 4\eta''}\right) \cdot V(|z|) \tag{1.38}$$

gleichmäßig in $|\arg z| \leqq \pi$ und gemäß dem ersten Schritt

$$\log\, |\pi_{\delta}(z)| > \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cos \varrho\pi \cdot V(|z|) - \frac{\varepsilon}{6H}(1 - \sin 4\eta'')^{\varrho} \cdot V(|z|) \tag{1.39}$$

gleichmäßig in $|\arg z| \leqq \pi - \eta''$. Wir betrachten nun die in $|\arg z - \pi| < \pi|\varrho$ eindeutige und reguläre Funktion

$$F(z) = \pi_{\delta}(z)\, e^{-\pi D \operatorname{cotg} \varrho\pi \cdot V(ze^{-i\pi})} \tag{1.40}$$

auf der Kreiskette $|z + R_n| \leqq R_n \sin 4\,\eta''$ mit $R_1 = 2\,R_0$ und $R_{n+1} = R_n(1 + \frac{1}{2}\sin 4\,\eta'')$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, die im Winkelraum $|\arg z - \pi| \leqq 4\,\eta''$ enthalten ist. Wegen (1.37) bis (1.40) und (1.16) folgt

$$\log\, |F(z)| < \frac{\varepsilon}{6H}\left(\frac{1 - \sin 4\,\eta''}{1 + \sin 4\,\eta''}\right)^{\varrho} V(|z|) < \frac{\varepsilon}{3H}\,(1 - \sin 4\,\eta'')^{\varrho} V(R_n)$$

für $|z + R_n| \leqq R_n \sin 4\,\eta''$, $n > N_0$ und

$$\log\, |F(R_n e^{i(\pi - \eta'')})| > -\frac{\varepsilon}{3H}\,(1 - \sin 4\,\eta'')^{\varrho} \cdot V(R_n)\,,\quad n > N_0\,.$$

Dabei ist $R_n e^{i(\pi - \eta'')}$ in $|z + R_n| \leqq \frac{1}{2} R_n \sin 4\,\eta''$ enthalten. Durch Anwendung des Hilfssatz 2 mit den eingangs festgelegten Größen ζ und k auf $F(z)$ in den Kreisen $|z + R_n| \leqq R_n \sin 4\,\eta''$ folgt

$$\log |F(z)| > -\frac{\varepsilon}{3}\,(1 - \sin 4\,\eta'')^{\varrho}\, V(R_n) > -\frac{2}{3}\,\varepsilon\, V(|z|)$$

und hieraus in Verbindung mit (1.40) und (1.37)

$$\log\, |\pi_{\delta}(z)| > \frac{\pi D}{\sin \varrho\pi} \cos \varrho\varphi \cdot V(|z|) - \varepsilon V(|z|)$$

für alle z in $|z + R_n| \leqq \frac{1}{2} R_n \sin 4\,\eta''$, $n > N_1 > N_0$, ausgenommen je höchstens in solchen Kreislein, deren Radiensumme $< \zeta R_n \sin 4\,\eta''$ ist. Die Kreise $|z + R_n| \leqq \frac{1}{2} R_n \sin 4\,\eta''$ überdecken aber bis auf ein endliches

Stück den ganzen Winkelraum $|\arg z - \pi| \leqslant \eta''$, währenddem die Ausnahmekreislein auf jedem Strahl dieses Winkelraumes höchstens eine Menge von oberer linearer Dichte $2\zeta = \xi$ überdecken können. Daraus folgt aber (1.33) mit ε an Stelle von $\varepsilon \frac{\pi D}{|\sin \varrho\pi|}$ zunächst für $\pi - \eta'' \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ und wegen (1.39) dann im ganzen Winkelraum $\pi - \eta \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ für alle $r > 0$ höchstens mit Ausnahme einer Menge von oberer linearer Dichte $< \xi$. Damit ist auch der dritte Schritt bewiesen.

Mit dem gleichen Beweisverfahren folgt aus dem Zusatz des Hilfssatzes 1 (Ende Nr. 3):

Zusatz: *Sind die Nullstellen im Winkelraum* $|\arg z - \pi| < \delta$ *von der Größenordnung*

$$n(r) \sim D r^n (\log r)^\alpha \;, \quad n = 1, 2, \ldots \;, \quad \alpha \neq -1 \;, \tag{1.30a}$$

so gilt gleichmäßig im Intervall $|\varphi| \leqslant \pi - \eta$ *für genügend große* r

$$\left| \log |\pi_\delta(r e^{i\varphi})| - \frac{(-1)^n D}{\alpha+1} r^n (\log r)^{\alpha+1} \cdot \cos n\varphi \right| < \varepsilon \frac{D}{\alpha+1} r^n (\log r)^{\alpha+1}. \tag{1.31a}$$

In den Restintervallen $\pi - \eta \leqslant |\varphi| \leqslant \pi$ *gilt nur*

$$\log |\pi_\delta(r e^{i\varphi})| - \frac{(-1)^n D}{\alpha+1} r^n (\log r)^{\alpha+1} \cos n\varphi \quad < \varepsilon \frac{D}{\alpha+1} r^n (\log r)^{\alpha+1} \tag{1.32a}$$

gleichmäßig für alle genügend großen r, *währenddem*

$$\log |\pi_\delta(r e^{i\varphi})| - \frac{(-1)^n D}{\alpha+1} r^n (\log r)^{\alpha+1} \cos n\varphi > \quad -\varepsilon \frac{D}{\alpha+1} r^n (\log r)^{\alpha+1} \tag{1.33a}$$

gültig ist für alle $r > 0$ *bis auf eine Menge von oberer linearer Dichte* $< \xi$.

11. Im Anschluß an Nr. 6 und Nr. 10 ist es nun naheliegend, allgemein solche Verteilung der Nullstellen zu betrachten, bei denen der Grenzwert (1.18) für jedes φ existiert und diesen Grenzwert $N(\varphi)$ zur Berechnung des Strahltypus heranzuziehen. Diese Art, die Nullstellenverteilung zu charakterisieren, ist aber in doppelter Hinsicht nicht ganz zweckmäßig:

1. Der Strahltypus ist gegenüber Translationen der z-Ebene invariant, dagegen nicht die Funktion $N(\varphi)$. [20])

[20]) Man betrachte etwa die beiden parallelen Punktfolgen $\{n + i\}$ und $\{n - i\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, i = imaginäre Einheit. Ihre Maßfunktionen sind verschieden. Denn für die erste gilt $N(0) = 0$, $N(\varphi) \equiv 1$ $(0 < \varphi \leqslant 2\pi)$ und für die zweite $N(\varphi) \equiv 1 (0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, $N(2\pi) = 2$.

2. Es gibt Nullstellenverteilungen, die nicht von der festgesetzten Art sind, deren zugehöriger Strahltypus sich aber leicht nach Hilfssatz 4 berechnen läßt. [21])

Um allgemein vorzugehen, definieren wir:

Gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Strahlen von der Richtung

$$\begin{aligned} &\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi\,, \\ \textit{mit}\quad &0 \leqq \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n < 2\pi\,, \\ &\varphi_{i+1} - \varphi_i < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n\,, \end{aligned} \tag{E}$$

derart, daß die Grenzwerte

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, \varphi_i, \varphi_{i+1})}{r^{\varrho(r)}} \tag{1.41}$$

für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ existieren, so heißt die Nullstellenverteilung **meßbar** *bezüglich der Ordnung $\varrho(r)$* [22]). Dabei bedeutet $n(r, \varphi_i, \varphi_{i+1})$ die Anzahl der Nullstellen im Sektor $|z| \leqq r, \varphi_i \leqq \arg z < \varphi_{i+1}$. Um solche Verteilungen durch eine Funktion $N(\varphi)$ zu charakterisieren, setzen wir

$$\limsup_{r \to \infty}\; r^{-\varrho(r)} \cdot n(r, \varphi) = \overline{N}(\varphi) \text{ [23])}$$

$$\liminf_{r \to \infty}\; r^{-\varrho(r)} \cdot n(r, \varphi) = \underline{N}(\varphi)$$

und setzen diese Funktionen gemäß der Bedingung

$$\overline{N}(\varphi \pm 2\pi) = \overline{N}(\varphi) \pm \overline{N}(2\pi) \qquad \text{bzw.} \qquad \underline{N}(\varphi \pm 2\pi) = \underline{N}(\varphi) \pm \underline{N}(2\pi)$$

über das Intervall $(0, 2\pi)$ hinaus fort. Es sind $\overline{N}(\varphi)$ und $\underline{N}(\varphi)$ für alle φ monoton wachsend; sie haben also höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Wir zeigen, daß

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, \varphi', \varphi'')}{r^{\varrho(r)}} = \overline{N}(\varphi'') - \overline{N}(\varphi') = \underline{N}(\varphi'') - \underline{N}(\varphi') \tag{1.42}$$

[21]) Man wähle z. B. auf den Geraden $x + i$, $x > 0$ und $x - i$, $x > 0$ je eine Punktfolge, die zusammen meßbar, einzeln aber nicht meßbar sind bezüglich $\varrho(r) \equiv \frac{1}{2}$. Für keinen Winkel φ wird dann der Grenzwert (1.18) existieren. Dagegen subsummiert sich dieser Fall sehr wohl für jedes $\delta > 0$ unter die Voraussetzungen von Hilfssatz 4 (immer abgesehen von endlich vielen Nullstellen).

[22]) Es sei ausdrücklich bemerkt, daß diese Definition nur die Existenz von beliebig feinen Einteilungen des Intervalls $(0, 2\pi)$ verlangt und nicht etwa, daß jede der möglichen Einteilungen sich beliebig verfeinern lasse. Letzteres ist auch nicht eine Folge des erstern, wie leicht durch Beispiele belegt werden kann.

[23]) $n(r, \varphi)$ bedeutet wie früher die Anzahl der Nullstellen im Sektor $|z| \leqq r$, $0 \leqq \arg z < \varphi$.

ist, wenn φ' und φ'' zwei beliebige Stetigkeitsstellen der Funktion $\overline{N}(\varphi)$ sind. Zum Beweis wählen wir η so klein, daß bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$|\overline{N}(\varphi) - \overline{N}(\varphi')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{bzw.} \quad |\overline{N}(\varphi) - \overline{N}(\varphi'')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

sobald $|\varphi - \varphi'| < \eta$ bzw. $|\varphi - \varphi''| < \eta$ ist. Nach Voraussetzung existiert aber eine so feine Einteilung (E), daß in die Intervalle $(\varphi', \varphi' + \eta)$ und $(\varphi'' - \eta, \varphi'')$ je ein Strahl von der Richtung φ_i und φ_k zu liegen kommt. Darnach ist

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-\varrho(r)} \cdot n(r, \varphi', \varphi'') \leqq \lim_{r\to\infty} r^{-\varrho(r)} \cdot n(r, \varphi_i, \varphi_k) + \varepsilon$$

und

$$\liminf_{r\to\infty} r^{-\varrho(r)} \cdot n(r, \varphi', \varphi'') \geqq \lim_{r\to\infty} r^{-\varrho(r)} \cdot n(r, \varphi_i, \varphi_k)$$

und somit (1.42) bewiesen[24]). Ist also φ_0 irgend eine Stetigkeitsstelle von $\overline{N}(\varphi)$, so stimmen wegen (1.42) die Funktionen $\overline{N}(\varphi) - \overline{N}(\varphi_0)$ und $\underline{N}(\varphi) - \underline{N}(\varphi_0)$ für fast alle φ, höchstens mit Ausnahme von abzählbar vielen Werten, überein. Daraus folgt aber, daß die Grenzwerte $\overline{N}(\varphi + 0) - \overline{N}(\varphi_0)$[25]) und $\underline{N}(\varphi + 0) - \underline{N}(\varphi_0)$ bzw. $\overline{N}(\varphi - 0) - \overline{N}(\varphi_0)$ und $\underline{N}(\varphi - 0) - \underline{N}(\varphi_0)$, die gegenüber Translationen der z-Ebene invariant sind, für alle φ übereinstimmen.

Wir setzen

$$\overline{N}(\varphi - 0) - \overline{N}(\varphi_0) = \underline{N}(\varphi - 0) - \underline{N}(\varphi_0) = N_-(\varphi)$$

$$\overline{N}(\varphi + 0) - \overline{N}(\varphi_0) = \underline{N}(\varphi + 0) - \underline{N}(\varphi_0) = N_+(\varphi)$$

$$N(\varphi) = \frac{N_+(\varphi) + N_-(\varphi)}{2}$$

und nennen $N(\varphi)$ die **Maßfunktion** der gegebenen Nullstellen. Da $N(\varphi - 0) = N_-(\varphi)$ und $N(\varphi + 0) = N_+(\varphi)$, so folgt

Die Maßfunktion $N(\varphi)$ ist monoton wachsend, bis auf eine additive Konstante durch die Nullstellen bestimmt und gegenüber Translationen der z-Ebene invariant. Es gilt für alle φ

---

[24]) Genau gleich läßt sich zeigen, daß (1.42) auch für zwei Stetigkeitsstellen von $\underline{N}(\varphi)$ erfüllt ist. Daraus folgt dann, daß die Stetigkeitsstellen von $\overline{N}(\varphi)$ und $\underline{N}(\varphi)$ zusammenfallen.

[25]) Allgemein bezeichnen wir mit $f(x + 0)$ den Grenzwert der Funktion $f(x + \eta)$, wenn η von rechts in den Nullpunkt hineinrückt, und entsprechend mit $f(x - 0)$ den Grenzwert von $f(x + \eta)$, wenn η von links in den Nullpunkt hineinrückt.

$$N(\varphi)=\frac{N(\varphi+0)+N(\varphi-0)}{2} \tag{1.43}$$

und für irgend zwei Stetigkeitsstellen φ_1 *und* φ_2

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r\,,\,\varphi_1\,,\,\varphi_2)}{r^{\varrho(r)}} = N(\varphi_2)-N(\varphi_1)\ .^{26)} \tag{1.44}$$

Ist umgekehrt $N(\varphi)$ eine monoton wachsende Funktion, für die (1.43) und (1.44) gilt, so ist die Nullstellenverteilung meßbar bezüglich der Ordnung $\varrho(r)$ und $N(\varphi)$ ihre Maßfunktion.

Obige Definition der meßbaren Nullstellenverteilung schließt auch den Fall in sich, wo $N(\varphi)$ identisch verschwindet.

12. Der Hauptsatz über das asymptotische Verhalten ganzer Funktionen mit meßbarer Nullstellenverteilung lautet nun:

Satz 3. *Sei* $f(z)$ *eine ganze Funktion höchstens von der Wachstumsordnung* $\varrho(r)$, $\varrho(r)\to\varrho\neq 0, 1, 2, \ldots$. *Ist ihre Nullstellenverteilung meßbar bezüglich der Ordnung* $\varrho(r)$ *und* $N(\varphi)$ *die zugehörige Maßfunktion, so gilt für alle* φ

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{V(r)}\cdot\log|f(re^{i\varphi})| = h(\varphi) \tag{1.45}$$

und

$$h(\varphi)=\frac{\pi}{\sin\varrho\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\cos(\varrho\theta-\varrho\pi)\,dN(\varphi+\theta)\ . \tag{1.46}$$

Insbesondere darf in jedem Winkelraum, der keine Nullstellen enthält, bei (1.45) lim* *durch* lim *ersetzt werden.*†)

Beweis: Da $f(z)$ bis auf einen Faktor $z^{\alpha}e^{P(z)}$, für den

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{V(r)}\cdot\log\left|(re^{i\varphi})^{\alpha}e^{P(re^{i\varphi})}\right|=0$$

ist, durch das **Weierstraß**'sche kanonische Produkt $\pi(z)$ über die Nullstellen von $f(z)$ dargestellt wird, so genügt es, das Wachstum des letztern zu untersuchen. Seien $\varepsilon>0$ und $\xi>0$ zwei beliebig kleine Zahlen und φ irgend eine feste Richtung. Zu ε, ξ und $\eta_0=1$ bestimmen wir nach Hilfssatz 4 zunächst $\delta_0=\delta(\varepsilon,\xi,1)$ und wählen dann $\eta<\delta_0$. Im Intervall $|\theta-\varphi|<\eta$ gibt es zwei Stetigkeitsstellen $\varphi_0<\varphi$ und $\varphi_1>\varphi$ von

---

[26]) Allgemein gilt

$$N(\varphi_2-0)-N(\varphi_1+0)-0(1)<\frac{n(r,\varphi_1,\varphi_2)}{V(r)}<N(\varphi_2+0)-N(\varphi_1-0)+0(1)\ .$$

†) Vgl. die Ankündigung dieses Satzes bei *A. Pfluger* [1].

$N(\varphi)$, für die (1.44) mit φ_0 und φ_1 an Stelle von φ_1 und φ_2 erfüllt ist. Bezeichnet $\pi_0(z)$ das kanonische Produkt über die Nullstellen von $f(z)$ im Winkelraum $\varphi_0 \leqq \arg z < \varphi_1$, so gilt nach Hilfssatz 4

$$\left|\log|\pi_0(re^{i\varphi})| - \frac{\pi}{\sin\varrho\pi}(N(\varphi_1) - N(\varphi_0))\cos\varrho\pi\cdot V(r)\right| < \frac{\varepsilon\pi}{|\sin\varrho\pi|}(N(\varphi_1) - N(\varphi_0))\,V(r) \tag{1.47}$$

für $r > 0$ ausgenommen eine Menge von oberer linearer Dichte $< \xi$.

Wir teilen nun den Winkelraum $\varphi_1 \leqq \arg z \leqq \varphi_0 + 2\pi$ durch Strahlen von der Richtung $\varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_n < \varphi_{n+1} = \varphi_0 + 2\pi$ in solche Teile ein, daß (1.41) für $i = 1, 2, 3, \ldots$ erfüllt ist und wählen diese Einteilung so fein, daß $\varphi_{i+1} - \varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots$ kleiner wird als die nach Hilfssatz 4 den Größen ε, ξ, η zugeordnete Zahl $\delta(\varepsilon, \xi, \eta)$. Bezeichnet $\pi_i(z)$ das kanonische Produkt über die Nullstellen von $f(z)$ im Winkelraum $\varphi_i \leqq \arg z < \varphi_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, so gilt nach Hilfssatz 4

$$\left|\log|\pi_i(re^{i\varphi})| - \frac{\pi}{\sin\varrho\pi}(N(\varphi_{i+1}) - N(\varphi_i))\cos(\varrho(\varphi_i - \varphi) - \varrho\pi)\,V(r)\right| < \frac{\varepsilon\pi}{|\sin\varrho\pi|}\cdot(N(\varphi_{i+1}) - N(\varphi_i))\,V(r) \tag{1.48}$$

bei genügend großem r, und zwar gleichmäßig für $i = 1, 2, \ldots, n$. Berücksichtigt man, daß $\pi(z) = \prod_{i=0}^{n} \pi_i(z)$, so folgt aus (1.47) und (1.48)

$$\begin{aligned}\Bigg|\log|\pi(re^{i\varphi})| &- \frac{\pi}{\sin\varrho\pi}(N(\varphi_1) - N(\varphi_0))\cos\varrho\pi\,V(r) \\ &- \frac{\pi}{\sin\varrho\pi}\sum_{i=1}^{n}(N(\varphi_{i+1}) - N(\varphi_i))\cos(\varrho(\varphi_i - \varphi) - \varrho\pi)\,V(r)\Bigg| \\ &< \frac{\varepsilon\pi}{|\sin\varrho\pi|}(N(2\pi) - N(0))\,V(r)\end{aligned} \tag{1.49}$$

für $r > 0$ bis auf eine Ausnahmemenge von oberer linearer Dichte $< \xi$. Dies gilt aber für alle genügend feinen Einteilungen des Intervalles $(\varphi_1, \varphi_0 + 2\pi)$. Lassen wir daher die Maximallänge der Teilintervalle gegen Null streben, so strebt die Summe

$$\sum_{i=1}^{n}(N(\varphi_{i+1}) - N(\varphi_i))\cos(\varrho(\varphi_i - \varphi) - \varrho\pi)$$

gegen das Stieltjes'sche Integral

$$\int_{\varphi_1-\varphi}^{\varphi_0+2\pi-\varphi} \cos(\varrho\theta - \varrho\pi)\,dN(\varphi+\theta) = J(\varphi_1 - \varphi, \varphi_0 + 2\pi - \varphi)\,.$$

Demnach gilt an Stelle von (1.49)

$$\left|\frac{\log|\pi(re^{i\varphi})|}{V(r)}-\frac{\pi}{\sin\varrho\pi}\left[J(\varphi_1-\varphi,\varphi_0+2\pi-\varphi)+(N(\varphi_1)-N(\varphi_0))\cos(\varrho\theta-\varrho\pi)\right]\right| < \frac{\varepsilon\pi}{|\sin\varrho\pi|}(N(2\pi)-N(0)) \;. \tag{1.50}$$

Diese Beziehung gilt aber bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und $\xi > 0$ für jedes $\eta < \delta(\varepsilon, \xi, 1)$. Lassen wir daher η gegen Null streben, so strebt die eckige Klammer von (1.50) gegen das Integral $J(0, 2\pi)$. Es ist also

$$\left|\frac{\log|\pi(re^{i\varphi})|}{V(r)}-\frac{\pi}{\sin\varrho\pi}\cdot J(0,2\pi)\right| < \frac{\varepsilon\pi}{|\sin\varrho\pi|}(N(2\pi)-N(0))$$

für alle $r > 0$ mit Ausnahme einer Menge $\mathfrak{M}(\varepsilon)$, die nur von ε abhängt und deren obere lineare Dichte ξ nicht übersteigt. Da aber ξ unabhängig von ε beliebig klein gemacht werden kann, so ist die Ausnahmemenge $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ von linearer Dichte 0. Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$; also ist

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\frac{\log|\pi(re^{i\varphi})|}{V(r)} = \frac{\pi}{\sin\varrho\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\varrho\theta-\varrho\pi)\cdot dN(\theta+\varphi) = h(\varphi)\;.$$

Damit ist (1.45) und (1.46) bewiesen.

Daß in jedem Winkelraum, der keine Nullstellen enthält, lim* durch lim ersetzt werden darf, folgt ohne weiteres aus (1.48).

Da in Satz 3 die Funktion $f(z)$ *höchstens* von der Wachstumsordnung $\varrho(r)$ zu sein braucht, so gilt der Satz insbesondere für solche Funktionen, die den Minimaltypus der Ordnung $\varrho(r)$ nicht übersteigen. Die Nullstellenverteilung solcher Funktionen ist immer meßbar bezüglich der Ordnung $\varrho(r)$; ihre Maßfunktion ist identisch null. Für eine ganze Funktion, die den Minimaltypus der Ordnung $\varrho(r)$, $\varrho(r)\to\varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ nicht übersteigt, gilt daher

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-\varrho(r)}\log|f(re^{i\varphi})| \equiv 0$$

m. a. W. die Menge der r-Werte, für die $\log|f(re^{i\varphi})| < -\varepsilon r^{\varrho(r)}$ ist für jedes $\varepsilon > 0$ von der linearen Dichte null.

So viel folgt aus Satz 3. Daß die Behauptung auch für $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$ stimmt, läßt sich mit andern Methoden[27]) beweisen. Die Beziehung dieses letztern Ergebnisses zum **Faber-Pólya**'schen Satz[28]) über ganze Funktionen vom Minimaltypus der Ordnung 1 ist offensichtlich.

---

[27]) etwa durch Verwendung von Hilfssatz 3.

[28]) *G. Faber* [1], S. 297; *G. Pólya* [2], S. 745. Vgl. auch eine Verallgemeinerung bei *K. Pennycuick* [1].

Die Formel (1.46) wird für $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$ sinnlos. Es muß deshalb interessieren, welche Formel an Stelle von (1.46) tritt, wenn wir ganze Funktionen von ganzzahliger Ordnung n betrachten, deren Nullstellenverteilung bezüglich der Größenordnung $r^n (\log r)^\alpha$, $\alpha \neq -1$, meßbar ist. Die oben verwendete Methode führt in Verbindung mit dem Zusatz von Hilfssatz 4 (Ende Nr. 10) zum Ergebnis

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{r^n (\log r)^{\alpha+1}} \log |\pi(re^{i\varphi})| = \frac{(-1)^n}{\alpha+1} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - n\pi)\, dN(\varphi+\theta) = h(\varphi).$$

Eine einfache Umformung des Integrals ergibt

$$\begin{aligned} h(\varphi) &= \cos n\varphi \cdot \frac{1}{\alpha+1} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cdot dN(\theta) + \sin n\varphi \cdot \frac{1}{\alpha+1} \cdot \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cdot dN(\theta) \\ &= A \cos n\varphi + B \sin n\varphi = P \cdot \cos n(\varphi - \varphi_0) \quad . \end{aligned}$$

Es folgt:

Zusatz: *Ist die Nullstellenverteilung eines kanonischen Produktes bezüglich der Größenordnung* $r^n (\log r)^\alpha$, $\alpha \neq -1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *meßbar, so gilt*

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{r^n (\log r)^{\alpha+1}} \log |\pi(re^{i\varphi})| = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi$$

$$(\alpha+1) A = \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cdot dN(\theta)\,, \quad (\alpha+1) B = \int_0^{2\pi} \sin n\theta \cdot dN(\theta) \quad .$$

Ist die Nullstellenverteilung rotationssymmetrisch bezüglich des Nullpunktes von der Ordnung $2n$, so ist $A = 0$ und $B = 0$ und daher die ganze Funktion höchstens vom Minimaltypus.

13. Die in Nr. 11 definierte Maßfunktion einer meßbaren Nullstellenverteilung ist monoton wachsend. Wir zeigen, daß diese Klasse von Funktionen keiner weitern einschränkenden Bedingung unterworfen ist.

Satz 4. *Zu jeder gegebenen, monoton wachsenden Funktion* $N(\varphi)$ *und zu jeder präzisen Wachstumsordnung* $\varrho(r)$ *gibt es eine Nullstellenverteilung, welche meßbar ist bezüglich der Ordnung* $\varrho(r)$ *und die Funktion* $N(\varphi)$ *als Maßfunktion besitzt.*

Beweis: Zur Konstruktion der Nullstellenverteilung benützen wir die leicht ersichtliche Tatsache, daß sich $N(\varphi)$ durch eine Folge von Treppenfunktionen $T_\nu(\varphi)$ gleichmäßig approximieren läßt. Genauer ausgedrückt heißt dies: Zu jeder positiven ganzen Zahl ν existieren im Intervall $(0, 2\pi)$ Stellen

$$0 = \varphi_{\nu,1}\,, \varphi_{\nu,2}\,, \ldots, \varphi_{\nu,h}\,, \ldots, \varphi_{\nu,k_\nu}$$

mit der Anzahl $k_\nu (> k_{\nu-1})$, so daß bei $T_\nu(\varphi) = N(\varphi_{\nu,h})$ für $\varphi_{\nu,h} \leqslant \varphi < \varphi_{\nu,h+1}$

$$N(\varphi) - \frac{1}{\nu+1} \leqslant T_\nu(\varphi) \leqslant N(\varphi), \quad T_\nu(\varphi) \geqslant T_{\nu-1}(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad (1.51)$$

ist. Bezeichnen wir den Sprung der Treppenfunktion $T_\nu(\varphi)$ an der Stelle $\varphi_{\nu,h}$ mit $s_{\nu,h}$, so ist

$$\begin{aligned} s_{\nu,h} &= N(\varphi_{\nu,h}) - N(\varphi_{\nu,h-1}), \\ T_\nu(\varphi) &= \sum_{\varphi_{\nu,h} \leqslant \varphi} s_{\nu,h}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Mit Hilfe der Funktion $V(r)$ (vgl. Nr. 5) und der Zahlen k_ν bestimmen wir nun eine Folge von Radien $\{R_\nu\}$ nach der Vorschrift

$$V(R_1) > 2k_2, \quad (1.53)$$

$$V(R_{\nu-1}) > \operatorname{Max}\{\nu k_\nu, 6V(R_{\nu-2})\}, \quad \nu = 3, 4, \ldots \quad (1.54)$$

und bezeichnen mit $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ je die Lösung der Gleichungen $V(r) = \nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Wir konstruieren die Verteilung zunächst im Kreis $|z| \leqslant R_1$ und nachher in den Kreisringen $R_{\nu-1} < |z| \leqslant R_\nu$, $\nu = 2, 3, \ldots$.

1. *Die Nullstellen im Kreis* $|z| \leqslant R_1$.

Auf jedem Strahl $\arg z = \varphi_{1,h}$, $h = 1, 2, \ldots, k_1$, wählen wir die Punktfolge $\left\{\frac{a_i}{s_{1,h}} e^{i\varphi_{1,h}}\right\}$, $i = 1, 2, \ldots$, soweit sie in den Kreis $|z| \leqslant R_1$ hineinfällt und bezeichnen ihre Anzahlfunktion mit $n(r, 1, h)$. Dann ist

$$s_{1,h} \cdot V(r) - 1 \leqslant n(r, 1, h) \leqslant s_{1,h} \cdot V(r), \quad h = 1, 2, \ldots, k_1, \quad 0 \leqslant r \leqslant R_1.$$

Durch Summation dieser Ungleichungen über alle h mit $\varphi_{1,h} \leqslant \varphi$ folgt wegen (1.52) und (1.53)

$$T_1(\varphi) V(r) - \frac{V(R_1)}{2} \leqslant n(r, \varphi) \leqslant T_1(\varphi) V(r), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant R_1.$$

2. *Die Nullstellen im Kreisring* $R_{\nu-1} < |z| \leqslant R_\nu$.

Wir nehmen an, die Nullstellen seien im Kreis $|z| \geqslant R_{\nu-1}$ bereits so bestimmt, daß

$$T_{\nu-1}(\varphi) V(R_{\nu-1}) - \frac{V(R_{\nu-1})}{\nu} \leqslant n(R_{\nu-1}, \varphi) \leqslant T_\nu(\varphi) V(R_{\nu-1}), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

und wir wählen auf jeder Halbgeraden $\arg z = \varphi_{\nu,h}$, $h = 1, 2, \ldots, k_\nu$ die Punktfolge $\left\{\frac{a_i}{S_{\nu,h}} e^{i\varphi_{\nu,h}}\right\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, soweit sie in den Kreisring $R_{\nu-1} < |z| \leqq R_\nu$ hineinfällt [29]. Es folgt

$$\big(V(r) - V(R_{\nu-1})\big)\, s_{\nu,h} - 1 \leqq n(r, \nu, h) \leqq \big(V(r) - V(R_{\nu-1})\big)\, s_{\nu,h}\,,$$
$$h = 1, 2, 3, \ldots, k_\nu, \qquad R_{\nu-1} < r \leqq R_\nu\,,$$

und durch Summation über alle h mit $\varphi_{\nu,h} \leqq \varphi$ wegen (1.52)

$$\begin{gathered} T_\nu(\varphi)\, V(r) - T_\nu(\varphi)\, V(R_{\nu-1}) - k_\nu \leqq n(r, \varphi) - n(R_{\nu-1}, \varphi) \leqq T_\nu(\varphi)\, V(r) - \\ - T_{\nu-1}(\varphi)\, V(R_{\nu-1})\,, \qquad (1.56) \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,, \\ R_{\nu-1} < r \leqq R_\nu\,. \end{gathered}$$

Addieren wir zu (1.56) die Ungleichung (1.55), so folgt

$$T_\nu(\varphi) V(r) - V(R_{\nu-1}) \big(T_\nu(\varphi) - T_{\nu-1}(\varphi)\big) - \frac{V(R_{\nu-1})}{\nu} - k_\nu \leqq n(r, \varphi) \leqq T_\nu(\varphi) V(r)$$

für $R_{\nu-1} < r \leqq R_\nu$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. Da nach (1.51) $T_\nu(\varphi) - T_{\nu-1}(\varphi) \leqq \frac{1}{\nu}$, so folgt weiter

$$T_\nu(\varphi) \cdot V(r) - \frac{2V(R_{\nu-1})}{\nu} - k_\nu \leqq n(r, \varphi) \leqq T_\nu(\varphi) \cdot V(r)\,. \qquad (1.57)$$

Nun ist wegen (1.54)

$$\frac{2V(R_{\nu-1})}{\nu \cdot V(r)} + \frac{k_\nu}{V(r)} \leqq \frac{3}{\nu} \quad \text{für} \quad R_{\nu-1} \leqq r \leqq R_\nu$$

und

$$\frac{2V(R_{\nu-1})}{\nu V(r)} + \frac{k_\nu}{V(r)} \leqq \frac{1}{2\nu} < \frac{1}{\nu + 1}\,, \quad \nu = 2, 3, \ldots\,.$$

Dies gibt in Verbindung mit (1.57)

$$T_\nu(\varphi) - \frac{3}{\nu} \leqq \frac{n(r, \varphi)}{V(r)} \leqq T_\nu(\varphi)\,,\ R_{\nu-1} < r \leqq R_\nu\,,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\,, \qquad (1.58)$$

und

$$T_\nu(\varphi) - \frac{1}{\nu + 1} \leqq \frac{n(R_\nu, \varphi)}{V(R_\nu)} \leqq T_\nu(\varphi)\,,\ \nu = 2, 3, \ldots\,. \qquad (1.59)$$

Durch allgemeine Induktion folgt, daß die Ungleichung (1.58) für alle $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ richtig ist, woraus sich schließlich in Verbindung mit (1.51)

---

[29]) Ihre Anzahlfunktion sei mit $n(r, \nu, h)$ bezeichnet.

$$N(\varphi) - \frac{4}{\nu} \leqslant \frac{n(r,\varphi)}{V(r)} \leqslant N(\varphi)\,, \; R_{\nu-1} < r \leqslant R_\nu\,, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,, \; \nu = 1, 2, \ldots$$

ergibt. Damit ist der gewünschte Beweis erbracht.

Aus Satz 3 und Satz 4 ergibt sich unmittelbar, daß zu jeder präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$, $\varrho(r) \to \varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ und zu jeder monoton wachsenden Funktion $N(\varphi)$ eine ganze Funktion $f(z)$ existiert, für die (1.45) und (1.46) erfüllt sind.

14. Die Tatsache, daß jede meromorphe Funktion sich als Quotient zweier ganzer Funktionen darstellen läßt, führt in Verbindung mit Satz 3 und den Rechenregeln mit lim* zu folgendem Resultat über das asymptotische Verhalten meromorpher Funktionen mit meßbarer Null- und Polstellenverteilung:

Satz 5. *Sei $f(z)$ eine meromorphe Funktion von der präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$, $\varrho(r) \to \varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$*[30].

Ist sowohl ihre Nullstellen- als auch Polstellenverteilung meßbar bezüglich der Ordnung $\varrho(r)$ und sind $N_0(\varphi)$ und $N_\infty(\varphi)$ ihre entsprechenden Maßfunktionen, so gilt für jedes φ

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{V(r)} =$$

$$= \frac{\pi}{\sin\varrho\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varrho\theta - \varrho\pi) \cdot d\{N_0(\varphi+\theta) - N_\infty(\varphi+\theta)\} = h(\varphi)\,. \tag{1.60}$$

Insbesondere darf in jedem Winkelraum, der keine Nullstellen und Pole enthält, lim* *durch* lim *ersetzt werden.*

Beweis: Es gibt zwei ganze Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ ohne gemeinsame Nullstellen, die je höchstens von der präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$ sind, so daß

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\,.$$

Nach Satz 3 folgt

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{V(r)} \log|\varphi(re^{i\varphi})| = \frac{\pi}{\sin\varrho\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varrho\theta - \varrho\pi) \cdot dN_0(\varphi+\theta)$$

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*} \frac{1}{V(r(} \log|\psi(re^{i\varphi})| = \frac{\pi}{\sin\varrho\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varrho\theta - \varrho\pi) \cdot dN_\infty(\varphi+\theta)$$

[30]) In der kanonischen Darstellung einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung hat der Exponentialfaktor sowohl als auch das kanonische Produkt über die Nullstellen und jenes über die Pole je eine präzise Ordnung: ϱ bzw. $\varrho_0(r)$ bzw. $\varrho_\infty(r)$. Diejenige mit dem stärksten Anwachsen bezeichnen wir als die präzise Wachstumsordnung der meromorphen Funktion.

und durch Subtraktion, in Verbindung mit den Rechenregeln in Nr. 9, die Gleichung (1.60).

Aus Satz 5 ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß für das asymptotische Verhalten der meromorphen Funktion $f(z)$ nur die Differenz der Maßfunktionen $N_0(\varphi)$ und $N_\infty(\varphi)$ maßgebend ist. Es wurde vorausgesetzt, daß die Pol- und Nullstellenverteilungen einzeln meßbar seien. Inwieweit es hiebei überhaupt nur auf die Differenz $n_0(r, \varphi) - n_\infty(r, \varphi)$ der Nullstellen und Pole ankommt, kann noch nicht mitgeteilt werden.

15. Die Maßfunktion $N_0(\varphi) - N_\infty(\varphi)$ der Null- und Polstellenverteilung ist als Differenz zweier monotoner Funktionen von beschränkter totaler Schwankung. Umgekehrt kann aber jede Funktion von beschränkter totaler Schwankung als Differenz zweier monotoner Funktionen dargestellt werden. Daraus folgt in Verbindung mit Satz 4:

Zu jeder präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$, $\varrho(r) \to \varrho \neq 0, 1, 2, \ldots$ *und zu jeder Funktion* $N^*(\varphi)$ *von beschränkter totaler Schwankung gibt es eine meromorphe Funktion* $f(z)$ *für die* (1.60) *mit* $N^*(\varphi)$ *an Stelle von* $N_0(\varphi) - N_\infty(\varphi)$ *erfüllt ist.*

Die so definierten Funktionen

$$h(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \varrho\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varrho\theta - \varrho\pi) \cdot dN^*(\varphi + \theta) \tag{1.61}$$

sind von weitgehender Allgemeinheit. Die im nächsten Abschnitt folgende nähere Untersuchung der Beziehung zwischen den Funktionen $h(\varphi)$ und $N^*(\varphi)$ und deren geometrische Interpretation führt zu einer durchsichtigern Charakterisierung dieser Funktionen.

(Eingegangen den 28. Oktober 1938.)

Bernstein, V.: [1] Sulla crescenza delle trascendenti intere d'ordine finito. R. Acc. d'Italia 4 (1933).

— [2] Leçons sur les progrès récents de la Théorie des Séries de Dirichlet. Paris, Gauthier-Villars, 1933.

— [3] Annali di Mat. 12 (1934).

Besicovitsch: [1] Math. Ann. 97 (1927), 677—695.

Cartwright, M. L.: [1] Quart. J. of Math. (Oxford Series) 1 (1930).

— [2] On functions which are regular and of finite order in an angle, Proc. London Math. Soc. 38 (1935), 158—179.

— [3] On the directions of Borel of analytic functions. Ibid. p. 417–457.

— [4] On the directions of Borel of functions which are regular and of finite order in an angle. Ibid. p. 503—541.

Faber, G.: [1] Bemerkungen zu einem funktionentheoretischen Satz des Herrn Hadamard. Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung 16 (1907).

Lindelöf, E.: [1] Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini. Acta Soc. Sci. Fenn. 31 (1902).

Nevanlinna, E.: [1] Eindeutige analytische Funktionen. Berlin, Julius Springer, 1936.

Pennycuick, K.: [1] Extension of a Theorem of Faber-Pólya. J. London Math. Soc. 12 (1937).

Phragmén, E. und *Lindelöf, E.:* [1] Sur l'extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier. Acta math. 31 (1908).

Pfluger, A.: [1] Sur la croissance et la distribution des zéros de certaines fonctions entières d'ordre positif fini. C.R. Acad. Sci., Paris 205 (1937), 889—890.

Pólya, G.: [1] Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Math. Zeitschrift 29 (1929).

— [2] Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Part. II. Annals of Math. 34 (1933).

Valiron, G.: [1] Sur les fonctions entières d'order nul et d'order fini, et en particulier les fonctions à correspondance régulière. Ann. Fac. Sci. Toulouse 5 (1913).

— [2] Lectures on the general Theory of integral functions. Toulouse, Edouard Privat, 1923.