Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Les demi-surfaces de Riemann. Application au problème du type.

Autor: Blanc, Charles

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11883

Les demi-surfaces de Riemann. Application au problème du type

Par Charles Blanc, Lausanne

§ 1. Demi-surfaces et surfaces entaillées. Les problèmes qui se posent.

Soit une surface de Riemann F, simplement connexe, dont la base est la sphère de Riemann, et soit T un chemin ouvert sans point double sur F, et dont la trace sur la sphère est une courbe rectifiable de longueur finie. T divise F en deux parties simplement connexes F_1 et F_2. Nous appellerons *demi-surfaces de Riemann* les surfaces qui peuvent être obtenues comme F_1 ou F_2 à partir d'une surface F simplement connexe. Aux extrémités de T correspondent deux singularités a et b de F (qui peuvent être confondues); on dira que a et b sont sur le bord de F_1.

Si T relie un point de la surface (régulier ou algébrique) à une singularité de F, il ne décompose pas F, mais il la transforme en une demi-surface de nature particulière: on dira que la surface F^* ainsi obtenue est une *surface entaillée.*

On peut parler du type d'une demi-surface F_1: représentons conformément F_1 sur le demi-plan $\mathfrak{J}\zeta > 0$; deux cas peuvent se présenter:

1° à T correspond toute la droite $\mathfrak{J}\zeta = 0$, moins un point. On convient alors de dire que F_1 appartient au type parabolique;

2° il y a plus d'un point de $\mathfrak{J}\zeta = 0$ qui ne correspond à aucun point de T. On dit alors que F_1 est du type hyperbolique.

Une surface entaillée étant une demi-surface, elle appartient aussi à un type bien déterminé.

Plusieurs problèmes se posent au sujet des demi-surfaces. Le premier est naturellement le suivant:

Problème A : Déterminer le type d'une demi-surface donnée F.

La solution de ce problème paraît plus simple que celle de la détermination du type d'une surface entière.

On voit immédiatement que si l'on peut diviser une surface simplement connexe F en deux demi-surfaces F_1 et F_2 dont l'une au moins est hyperbolique, F est hyperbolique. On peut donc répartir les surfaces de Riemann simplement connexes en trois catégories:

1° les surfaces du type *parabolique*. Toutes les demi-surfaces qu'elles contiennent sont paraboliques;

2° les surfaces *semi-hyperboliques;* ce sont celles que l'on peut décomposer en deux demi-surfaces paraboliques; nous savons qu'il en existe[1]);

3° les surfaces *absolument hyperboliques:* celles que l'on ne peut pas décomposer en deux demi-surfaces paraboliques (la surface de la fonction modulaire, par exemple).

La solution complète du problème A ne permettrait pas de distinguer les cas 1⁰ et 2⁰. Il resterait donc à résoudre le problème suivant:

Problème B: Une surface simplement connexe donnée étant décomposable en deux demi-surfaces paraboliques, reconnaître quel est son type.

On peut se poser un problème analogue au sujet des surfaces entaillées. Une surface entaillée F^* étant une demi-surface, le problème A s'y applique sans autre. Si F^* est hyperbolique, la surface obtenue en soudant l'entaille l'est également. La réciproque n'est pas exacte. On a cependant la propriété suivante:

Théorème: Si une surface hyperbolique F donne une surface entaillée F^* parabolique, F est semi-hyperbolique.

Représentons, en effet, F^* sur un demi-plan; et soit T' un chemin rectifiable, de longueur finie, ne coupant pas la frontière T de F^* et reliant l'extrémité de T située sur F à une singularité de F (qui peut être la même que celle qui est à l'extrémité de T); $T + T'$ divise F en deux demi-surfaces; dans la représentation de F^* sur un demi-plan, ces deux demi-surfaces sont représentées sur des domaines dont un seul point frontière ne correspond pas à un point de F; il en résulte que ces demi-surfaces sont paraboliques. Le théorème est ainsi démontré.

Le problème B se double naturellement du

Problème C: Une surface entaillée F^* parabolique étant donnée, trouver le type de la surface F obtenue en soudant l'entaille de F^*.

Ce problème peut être traité par une méthode analogue à celle que nous avons donnée pour le problème B[2]).

[1]) Voir *Ch. Blanc,* Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes. Comm. Math. Helv. **9** (1937), 367; voir aussi Actes Soc. Helv. Sc. Nat. **1937**, p. 95—96; et C. R. Acad. Sc. Paris, **206** (1938), 1078—1080.

[2]) Voir C. R. Acad. Sc. Paris, **202** (1936), p. 623.

Représentons conformément F^* sur le plan (ζ) entaillé le long de l'axe réel positif; on peut opérer cette représentation en sorte que tout point à distance finie de cette demi-droite corresponde à deux points de l'entaille, le point $\zeta = 0$ correspondant à l'extrémité de l'entaille.

A un point de l'entaille de F^* correspondent deux points de $\mathfrak{J}\zeta = 0$, $\Re\zeta > 0$, d'affixes r_1 et r_2; on a ainsi une relation

$$J(r_1, r_2) = 0 \qquad r_1 \geqslant 0\,, \quad r_2 \geqslant 0$$

avec

$$J(0, 0) = 0$$

et

$$\lim_{r_1 \to \infty} r_2 = \infty\,.$$

La recherche du type de F se fait par l'étude du comportement de $J(r_1, r_2) = 0$ lorsque r_1 et r_2 tendent vers l'infini.

Les problèmes B et C concernent les propriétés du type en relation avec les opérations qui font passer de demi-surfaces à des surfaces entières. On peut aussi chercher à étudier les opérations qui transforment les demi-surfaces en d'autres demi-surfaces. Les résultats que l'on obtient ainsi donnent des renseignements sur la solution du problème A.

Considérons une demi-surface F, de bord T; en reliant un point de T à une singularité de F, on divise F en deux demi-surfaces F_1 et F_2. Si l'une des deux est hyperbolique, F l'est aussi.

Problème D: Une demi-surface F étant décomposable en deux demi-surfaces F_1 et F_2, paraboliques, quel est le type de F?

La solution de ce problème est plus simple que celle du problème B; on peut montrer que, sous des hypothèses très générales, F est parabolique[3]).

On peut passer du problème B au problème C par la transformation suivante: soient F_1 et F_2 deux demi-surfaces paraboliques, pouvant se souder le long d'une courbe T de facon à former une surface simplement connexe F. Si nous soudons F_1 et F_2 le long d'un arc de T issu d'une des singularités, nous obtenons une surface entaillée F^*.

Problème E: Une surface entaillée F^* pouvant être obtenue en soudant partiellement deux demi-surfaces paraboliques, déterminer son type.

Ce problème est un cas particulier du problème D. Sa solution permet de passer d'une relation $H = 0$ à une relation $J = 0$, dont l'étude est plus simple.

[3]) C. R. Acad. Sc. Paris, **206** (1938), 1079.

§ 2. Autres énoncés des problèmes B à E: introduction des relations de soudure.

Nous avons démontré le théorème suivant:

Soit $H(r_1, r_2) = 0$ *une relation analytique (relation de soudure) satisfaisant aux conditions*

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{r_1 \to -\infty} r_2 \to -\infty \\ \lim\limits_{r_1 \to +\infty} r_2 \to +\infty \end{array}\right\} \tag{H}$$

On peut définir, au moyen de deux demi-plans soudés suivant la relation $H = 0$, *une surface de Riemann simplement connexe.*

Les conditions (H) sont dans la nature du problème; par contre, la condition d'analyticité peut être levée en partie; cela nous permettra de poser d'une facon un peut différente les problèmes que nous avons en vue.

Considérons une relation $H = 0$ *continue* et vérifiant les conditions (H) ci-dessus (la continuité de $H = 0$ est nécessaire pour que le problème ait un sens). Pour faire disparaître les valeurs particulières $r_1 = r_2 = \infty$, transformons $H = 0$ en une relation

$$\mathfrak{H}(\theta_1, \theta_2) = 0$$

liant les arguments de deux points situés sur le cercle $|\zeta| = 1$, la relation $\mathfrak{H} = 0$ vérifiant les conditions

$$\mathfrak{H}(0, 0) = \mathfrak{H}(2\pi, 2\pi) = 0$$

θ_2 étant une fonction monotone croissante de θ_1 pour $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi$.

En reprenant la démonstration du théorème cité au début de ce paragraphe, on montrerait que si $\mathfrak{H}(\theta_1, \theta_2)$ est analytique pour $|\theta_1| < \varepsilon$, $|\theta_2| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, il correspond à $\theta_1 = \theta_2 = 0$ un point de la surface de Riemann; si ce fait se produit pour tous les couples de valeurs (θ_1, θ_2) satisfaisant à $\mathfrak{H}(\theta_1, \theta_2) = 0$, avec $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi$ et $0 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$, alors on peut faire correspondre à la relation $\mathfrak{H} = 0$ une surface de Riemann topologiquement équivalente à une sphère. La relation $\mathfrak{H} = 0$ peut alors être engendrée par la décomposition du plan de Gauss en deux parties par une courbe simple, elle est du type parabolique.

Supposons maintenant que pour certains couples de valeurs (θ_1, θ_2), la relation $\mathfrak{H}(\theta_1, \theta_2) = 0$ ne soit plus analytique. Si l'on parvient cependant à leur faire correspondre des points de la surface, le type de $\mathfrak{H} = 0$ est encore parabolique.

Si l'on peut montrer qu'il existe un et un seul de ces couples auquel on ne peut attribuer aucun point, le type est hyperbolique. S'il y en a plusieurs, la surface engendrée n'est plus simplement connexe.

Si $\mathfrak{H} = 0$ a été obtenue à partir d'une relation $H = 0$, analytique pour r_1 et r_2 finis, elle est analytique pour tous les couples (θ_1, θ_2), sauf pour celui qui correspond à $r_1 = r_2 = \infty$.

Le problème du type d'une relation $H = 0$, c'est-à-dire le problème B, se trouve ramené au problème suivant:

Problème B' : Soit une correspondance biunivoque et continue $H(r_1, r_2) = 0$ avec $H(0, 0) = 0$. Reconnaître dans quels cas l'on peut faire correspondre à $r_1 = r_2 = 0$ et à son voisinage un point d'une surface de Riemann et le voisinage de ce point.

Avant de donner des solutions de ce problème, nous chercherons à traduire d'une façon analogue les autres problèmes du paragraphe précédent.

La relation $J(r_1, r_2) = 0$ que nous avons introduite au sujet du problème C se ramène à une relation $H = 0$, si l'on pose $r_1 = r_2$, pour $r_1 < 0$. Mais la singularité intéressante est celle qui correspond à $r_1 = r_2 = \infty$. Elle conduit sans autre au problème suivant:

Problème C' : Soit une correspondance biunivoque et continue $H(r_1, r_2) = 0$ avec $H(t, t) = 0$ pour $-\varepsilon \leqslant t \leqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Reconnaître dans quels cas on peut faire correspondre à $r_1 = r_2 = 0$ et à son voisinage un point d'une surface de Riemann et le voisinage de ce point.

La singularité de la relation est simplifiée, puisqu'elle n'apparaît que d'un seul côté (pour $r_1 > 0$).

Le problème D conduit également à un cas particulier du problème B'.

Représentons les deux demi-surfaces F_1 et F_2 dont il est question dans ce problème sur les quart-de-plan $0 \leqslant \arg \zeta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg \zeta \leqslant \pi$, la demi-droite $\Re \zeta = 0$, $\Im \zeta > 0$ correspondant dans ces deux représentations aux bords de F_1 et de F_2 qui viennent se souder dans F. Soient A et B deux points qui se correspondent ainsi, $A = i\, s_1$, $B = i\, s_2$. Il existe entre s_1 et s_2 une relation

$$K(s_1, s_2) = 0$$

biunivoque et telle que $K(0, 0) = 0$, et

$$\lim_{s_1 \to +\infty} s = +\infty$$

Considérons la relation $H(r_1, r_2) = 0$ qui est donnée par

$$\begin{aligned} H(r_1, r_2) &\equiv K(r_1, r_2) & \text{si} \quad r_1 \geqslant 0 \\ H(r_1, r_2) &\equiv K(-r_1, -r_2) & \text{si} \quad r_1 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Cette relation vérifie les conditions (H). Si elle est parabolique, la demi-surface F l'est aussi ; réciproquement, si F est parabolique, H l'est aussi. On est donc ramené à l'étude d'une relation $H = 0$. Mais elle est particulière, puisque si (r_1, r_2) est un couple satisfaisant à $H = 0$, $(-r_1, -r_2)$ en est également un. On dira alors que $H = 0$ est à symétrie axiale[4]). Le problème D peut s'énoncer de la façon suivante:

Problème D': Soit une correspondance biunivoque et continue $H(r_1, r_2) = 0$ avec symétrie axiale. Reconnaître dans quels cas on peut faire correspondre à $r_1 = r_2 = 0$ et à son voisinage un point d'une surface de Riemann et le voisinage de ce point.

Le problème E enfin peut aussi se traduire en un problème analogue aux précédents. Soient deux demi-surfaces paraboliques F_1 et F_2, représentées conformément sur les demi-plans $\mathfrak{J}\zeta \geqslant 0$ et $\mathfrak{J}\zeta \leqslant 0$, ce qui donne lieu à une relation $H(r_1, r_2) = 0$ pour laquelle nous supposerons, ce qui ne restreint pas la généralité, $H(0, 0) = 0$. Soudons F_1 et F_2 le long de leur bord qui correspond à l'axe réel négatif: nous obtenons une surface entaillée F^*. Le problème E pose la question suivante: peut-on représenter conformément F^* sur un demi-plan, la droite limitant ce demi-plan correspondant (à part un point) à l'entaille de F^*; on peut remplacer cette représentation par une représentation sur un plan pourvu d'une entaille le long de l'axe réel positif. Supposons que nous ayons fait une inversion du plan (ζ), par rapport à l'origine pour amener le seul point singulier à l'origine; la question qui se posera sera alors la suivante: soient un demi-disque $|\zeta| \leqslant \varrho$, $\mathfrak{J}\zeta \geqslant 0$, et le demi-disque du demi-plan $\mathfrak{J}\zeta \leqslant 0$ limité par le demi-cercle dont les extrémités sont les points qui correspondent, par la relation $H = 0$, à ϱ et $-\varrho$. Ces deux demi-disques forment un domaine D. On demande s'il est possible de représenter conformément D, entaillé le long de l'axe réel positif, sur l'intérieur d'un cercle $|u| < 1$, entaillé le long du segment $(0, 1)$, cette représentation étant telle que $u(\zeta) \to 0$ lorsque $\zeta \to 0$.

La solution dépend du comportement de $H(r_1, r_2) = 0$ pour $-\varrho < r_1 \leqslant 0$; elle ne dépend pas du tout de cette relation pour $r_1 > 0$. Si par exemple, $H = 0$ est analytique pour $-\varrho < r_1 \leqslant 0$, la réponse est affirmative, et F^* est parabolique. On obtient alors une relation entre les abscisses des points correspondants du segment $(0, 1)$ du plan (u), relation de la forme $J(s_1, s_2) = 0$. Cette relation pourra être plus ou moins semblable à $H = 0$ pour $r_1 > 0$, suivant que $H = 0$ diffère peu ou beaucoup de $r_1 - r_2 = 0$ pour $r_1 < 0$.

[4]) Si, par contre, $H(r_1, r_2) = 0$ entraîne $H(-r_2, -r_1) = 0$, on dira que $H = 0$ est à *symétrie centrale*.

S'il est possible de passer de la relation $H = 0$ à la relation $J = 0$, nous dirons que la singularité est *décomposable.* Le problème E deviendra alors:

Problème E': Reconnaître si une singularité donnée d'une relation $H = 0$ est décomposable.

Et nous y joindrons le problème:

Problème E'': Etant donné une singularité décomposable d'une relation $H = 0$ donnée, étudier la singularité correspondante de la relation $J = 0$ qui en résulte.

§ 3. Le problème B'.

Nous appliquerons à la résolution de ce problème les résultats récents de M. *Lavrentieff* sur les représentations quasi-conformes. On dit qu'une représentation d'un domaine D du plan $z = x + iy$ sur un domaine $\mathfrak{D}$ du plan w est quasi-conforme si elle vérifie les conditions suivantes[5]):

1° elle est topologique;

2° l'élément de longueur ds qui correspond à un élément $dz = dx + idy$ est donné par une forme quadratique définie

$$ds^2 = g_{11}\,dx^2 + 2g_{12}\,dx\,dy + g_{22}\,dy^2$$

où g_{11}, g_{12}, g_{22} sont des fonctions continues de x et de y, excepté peut-être sur un ensemble E de D formé d'un nombre fini d'arcs analytiques;

3° l'ellipse indicatrice de la représentation a une excentricité bornée dans D.

Ces représentations s'étendent à des domaines situés sur des surfaces de Riemann. On démontre le théorème fondamental suivant:

S'il existe une représentation quasi-conforme d'un domaine D simplement connexe sur un domaine $\mathfrak{D}$, il existe une représentation conforme de D sur $\mathfrak{D}$.

Il en résulte par exemple que si l'on peut représenter quasi-conformément une surface de Riemann sur le plan ouvert, cette surface est du type parabolique.

---

[5]) On constate un certain flottement dans la terminologie de cette question. Certains auteurs appellent *représentations quasi-conformes* des représentations satisfaisant aux conditions 1° et 2° seulement, et ajoutent „*à excentricité limitée*" si la condition 3° est vérifiée. On appelle aussi *fonction presque analytique* une fonction qui représente quasi-conformément un domaine sur un autre.

Nous écrirons *représentation q. c.* (quasi-conforme) pour toute représentation vérifiant les conditions 1° à 3°.

M. *Lavrentieff*[6]) a démontré un théorème d'existence dont nous aurons à faire usage dans la suite:

Théorème I: Etant donné dans un domaine D deux fonctions réelles $p(z)$ et $\theta(z)$ telles que

1° $1 \leqslant p(z) \leqslant M$ *dans* D;

2° *sauf sur un ensemble E de D, formé d'un nombre fini d'arcs analytiques, $p(z)$ est continue;*

3° *si $p(z)$ est continue et différente de l'unité, $\theta(z)$ est continue;*

4° *$p(z)$ est uniformément continue dans tout domaine D_1 de D limité par une courbe analytique et qui ne contient aucun point de E; il en est de même de $\theta(z)$, pour autant que D_1 ou sa frontière ne contient pas de point où $p(z) = 1$.*

Alors il existe une représentation q. c. de D sur $|w| < 1$ telle qu'en chaque point le rapport des axes de l'ellipse indicatrice est $p(z)$ et l'angle entre le grand axe et l'axe réel $\mathfrak{J} z = 0$ est égal à $\theta(z)$.

Nous utiliserons ce théorème de la façon suivante: après avoir défini les voisinages du couple $(r_1 = 0, r_2 = 0)$ nous en donnons une représentation q. c. sur l'intérieur du cercle $|z| < 1$; en représentant ensuite q. c. ce cercle sur le cercle $|Z| < 1$ avec des fonctions $p(z)$ et $\theta(z)$ convenablement choisies, nous définissons une représentation *conforme* de tout voisinage de $(r_1 = 0, r_2 = 0)$ sur le disque $|Z| < 1$, le couple venant en $Z = 0$.

Celà dit, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème 1: Si, pour $|r_1| < \varepsilon$, r_2 est une fonction de r_1 pourvue d'une dérivée continue toujours positive, on peut faire correspondre au couple $(r_1 = 0, r_2 = 0)$ un point de la surface de Riemann.

Définissons les voisinages du couple. Posons, pour $|r_1| < \varepsilon$, $r_2 = h(r_1)$. Soit $0 < \varrho \leqslant \varepsilon$; le voisinage V_ϱ sera formé:

1° du demi-disque $|\zeta| < \varrho$, $\mathfrak{J}\zeta \geqslant 0$;

2° du demi-disque de diamètre $h(-\varrho)$, $h(\varrho)$, situé dans le demi-plan $\mathfrak{J}\zeta \leqslant 0$.

Nous représentons q. c. ce voisinage V_ϱ sur un disque D du plan $z = x + iy$ de la façon suivante; nous posons:

[6]) Recueil Math. Moscou, 42 (1935), 407—424. Le théorème cité est le théorème 3, p. 414.

1°
$$x = h(\Re\zeta)$$
$$y = \Im\zeta \cdot \frac{h(\varrho) - h(-\varrho)}{2\varrho}$$

pour la partie de V_ϱ située dans le demi-plan $\Im\zeta \geqslant 0$;

2°
$$x = \Re\zeta\,, \qquad y = \Im\zeta$$

pour la partie dans $\Im\zeta \leqslant 0$.

Cette représentation est topologique. Cela est clair si $\Im\zeta \neq 0$. Si $\Im\zeta = 0$, on a, pour tout couple (u_1, u_2), dans le premier cas

$$x = h(u_1) \qquad y = 0$$

et dans le second

$$x = u_2 = h(u_1)$$
$$y = 0\ .$$

Le carré de la différentielle de l'arc est partout donné par une forme quadratique définie; ses coefficients sont continus sauf peut-être aux points pour lesquels $\Im\zeta = 0$. Posons $\zeta = u + iv$. Pour $\Im\zeta \geqslant 0$,

$$dx = h'\,du$$
$$dy = \frac{h(\varrho) - h(-\varrho)}{2\varrho}\,dv$$

$$ds^2 = h'^2 du^2 + \left[\frac{h(\varrho) - h(-\varrho)}{2\varrho}\right]^2 dv^2\ .$$

Puisque $h'(u)$ est continue et toujours positive, le rapport

$$\frac{h(\varrho) - h(-\varrho)}{2\varrho h'}$$

est compris entre des limites finies, l'excentricité est bornée.

Pour $\Im\zeta \leqslant 0$, la représentation est évidemment q. c.

Cela étant fait, on peut, en vertu du théorème I, construire une représentation q. c. de D sur $|Z| < 1$, telle que la représentation de V_ϱ sur $|Z| < 1$ qui en résulte soit conforme. On pose

$$p(z) = \begin{cases} \max\left[\dfrac{h(\varrho) - h(-\varrho)}{2\varrho h'(r_1)}\,,\ \dfrac{2\varrho h'(r_1)}{h(\varrho) - h(-\varrho)}\right] & \text{si } \Im z \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } \Im z \leqslant 0 \end{cases}$$

la valeur de r_1 dans $h'(r_1)$ étant l'abscisse du point correspondant du plan (ζ). On pose enfin

$$\theta = 0 \quad \text{si} \quad \frac{2\varrho h'(r_1)}{h(\varrho) - h(-\varrho)} \leqslant 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{si} \quad \frac{2\varrho h'(r_1)}{h(\varrho) - h(-\varrho)} > 1 \ .$$

Ces fonctions vérifient les conditions de l'énoncé du théorème I; l'ensemble E est formé du segment $(-1, +1)$.

Remarque: La démonstration précédente est en défaut si $h'(r_1)$ s'annule dans l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Il convient alors de faire des hypothèses supplémentaires. Si $h'(0) \neq 0$, on peut toujours prendre $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $h'(r_1) \neq 0$ lorsque $|r_1| < \varepsilon$ (continuité de $h'(r_1)$). Supposons donc que $h'(0) = 0$, et $h'(r_1) > 0$ pour $0 < |r_1| < \varepsilon$.

Théorème 2: Si $h'(0) = 0$ *possède un ordre déterminé* m, *on peut faire correspondre un point de la surface au couple* $(r_1 = 0, r_2 = 0)$.

Cela revient à supposer qu'il existe un nombre positif m tel que

$$\frac{h'(r_1)}{r_1^m}$$

est une fonction continue non nulle pour $|r_1| < \varepsilon$. Nous procéderons comme nous l'avons fait pour un théorème analogue dans notre thèse (où l'hypothèse sur l'ordre du zéro était inutile, puisque la fonction $h(r_1)$ était alors analytique). On pose

$$Z_1 = \zeta_1^{2\frac{m+1}{m+2}}$$
$$Z_2 = \zeta_2^{\frac{2}{m+2}}$$

en choisissant la détermination telle que Z_1 et Z_2 soient réels positifs si ζ_1 et ζ_2 le sont. Le voisinage V_ϱ^* de $Z = 0$ est formé

1° du secteur $\quad |Z| < \varrho^{2\frac{m+1}{m+2}} \qquad 0 \leqslant \arg Z \leqslant 2\dfrac{m+1}{m+2}\pi$

2° d'un secteur de l'angle

$$2\frac{m+1}{m+2}\pi \leqslant \arg Z \leqslant 2\pi$$

limité par la courbe image du demi-cercle de diamètre $h(-\varrho)$, $h(\varrho)$, du demi-plan $\mathfrak{J}\zeta \leqslant 0$ par $Z = \zeta^{\frac{2}{m+2}}$.

Ces deux parties sont soudées le long de la demi-droite arg $Z = 0$ par une relation

$$Z_2 = h^*(Z_1)$$

et le long de la demi droite arg $Z = 2\frac{m+1}{m+2}\pi$, par

$$|Z_2| = h^{**}(|Z_1|)$$

ces deux relations étant déduites de $r_2 = h(r_1)$. Elles possèdent une dérivée continue et positive pour toutes les valeurs de Z_1 que nous considérons.

On représente ce voisinage sur un disque D du plan $z = x + iy = ue^{i\theta}$

1° si $0 \leqslant \arg Z \leqslant 2\frac{m+1}{m+2}\pi$, on pose

$$\theta = \arg Z$$

$$u = \frac{\arg Z \cdot h^{**}(|Z|) + \left[2\frac{m+1}{m+2}\pi - \arg Z\right]h^*(|Z|)}{2\frac{m+1}{m+2}\pi} .$$

2° si $2\frac{m+1}{m+2}\pi \leqslant \arg Z \leqslant 2\pi$

$$\theta = \arg Z , \quad u = |Z| .$$

Cette représentation est topologique; il suffit de le montrer pour

$$\arg Z = 0 \quad \text{et} \quad \arg Z = 2\frac{m+1}{m+2}\pi .$$

Si arg $Z = 0$, la représentation 1° donne

$$\theta = 0 \qquad u = h^*(Z_1) = Z_2$$

et la représentation 2°

$$\theta = 0 \qquad u = Z_2 .$$

Pour arg $Z = 2\frac{m+1}{m+2}\pi$, on a respectivement

$$\theta = 2\frac{m+1}{m+2}\pi \quad u = h^{**}(|Z_1|) = |Z_2|$$

et

$$\theta = 2\frac{m+1}{m+2}\pi \quad u = |Z_2| .$$

On démontre ensuite comme plus haut que la représentation est q. c., et le théorème en résulte par le théorème I.

Il est immédiat que l'on peut, pour appliquer le théorème 2, intervertir les demi-plans ζ_1 et ζ_2.

Les conditions du théorème 2 peuvent encore être élargies.

Théorème 3: Si, pour $0 < |r_1| < \varepsilon$, $r_2 = h(r_1)$ *a une dérivée continue et positive,*

avec
$$0 < \frac{1}{K} < h'(r_1) < K \tag{1}$$

on peut faire correspondre au couple (0, 0) *un point de la surface de Riemann.*

On fait, pour le démontrer, la même représentation qu'au théorème 1. Il faut montrer qu'elle est q. c. et que les conditions du théorème I sont vérifiées.

Cela est clair pour tous les points qui ne sont pas sur le segment $(0, i\varrho)$. En ces points, les fonctions $g_{i,k}$ cessent d'être continues. Mais l'ensemble singulier E que l'on a ainsi, est formé d'un segment de l'axe réel et d'un segment de l'axe imaginaire, ce qui est conforme aux conditions du théorème I. D'autre part, les inégalités (1) entraînent que l'excentricité est bornée. D'où le théorème.

Le théorème 3 peut être généralisé en tenant compte du théorème 2:

Théorème 4: Si, pour $0 < |r_1| < \varepsilon$, $r_2 = h(r_1)$ *a une dérivée continue positive, et s'il existe un nombre* m *avec, pour* $0 < |r_1| < \varepsilon$,

$$0 < \frac{1}{K} < \left| \frac{h'(r_1)}{r_1^m} \right| < K .$$

alors le couple correspond à un point de la surface de Riemann.

En résumé, le type est parabolique si la dérivée $h'(r_1)$ existe et est continue positive pour tout r_1, excepté pour un ensemble fini de valeurs r_1^0 de r_1, pour chacune desquelles il existe deux nombres positifs m et K avec, pour
$$|r_1 - r_1^0| < \varepsilon$$
$$0 < \frac{1}{k} < \left| \frac{h'(r_1)}{(r_1 - r_1^0)^m} \right| < k .$$

Nous verrons plus loin quelques cas où le type est hyperbolique, c'est-à-dire où la singularité de $r_2 = h(r_1)$ est telle qu'on ne peut faire correspondre au couple aucun point de la surface de Riemann.

§ 4. Le problème C'.

Ce problème peut être traité ainsi:

Soit une bande $0 \leqslant \mathfrak{J}z \leqslant 1$ du plan z, et soit une correspondance biunivoque entre les points des deux droites

$$\mathfrak{J}z = 0 \qquad \mathfrak{J}z = 1$$

donnée par la relation $v = v(u)$, u étant l'abscisse d'un point de $\mathfrak{J}z = 0$, v l'abscisse du point correspondant de $\mathfrak{J}z = 1$. Représentons conformément cette bande sur une couronne

$$R_1 < |Z| < R_2$$

pourvue d'une coupure reliant les deux cercles $|Z| = R_1$ et $|Z| = R_2$ de manière qu'à un point de $\mathfrak{J}z = 0$ et à son correspondant sur $\mathfrak{J}z = 1$ corresponde un seul et même point de cette coupure. Suivant le type de $v = v(u)$, on devra prendre $R_1 = 0$ ou $R_1 > 0$, $R_2 < \infty$ ou $R_2 = \infty$ (il y a quatre cas possibles); il est clair que l'on peut décomposer la discrimination: R_1 dépendant par exemple de $v(u)$ pour $u < 0$, et R_2 dépendant de $v(u)$ pour $u > 0$. Nous nous occuperons uniquement de $u > 0$; le type de la relation $v = v(u)$ sera hyperbolique lorsque $R_2 < \infty$, parabolique lorsque $R_2 = \infty$.

Nous avons démontré dans notre thèse les théorèmes suivants[7]):

Théorème 5: Si $v = ku$, $k \neq 1$, *alors* $R_2 < \infty$.

Théorème 6: Si $v'(u) > K > 2$, *et si* $v''(u) \geqslant 0$ *pour* $u > 0$, $R_2 < \infty$.

L'application des représentations q. c. permet d'étendre ces résultats.

Théorème 7: Soient deux relations $v = v_1(u)$ *et* $v = v_2(u)$; *s'il existe deux constantes positives* K_1 *et* K_2 *avec*

$$\left| \frac{v_1'(u)}{v_2'(u)} - 1 \right| < \frac{K_1}{u + v_1(u)} \tag{1}$$

$$| v_1(u) - v_2(u) | < K_2 \tag{2}$$

pour $u > 0$, *alors* v_1 *et* v_2 *ont, pour* $u > 0$, *le même type.*

Soient les deux bandes

$$(B_1) \qquad 0 \leqslant \mathfrak{J}z_1 \leqslant 1 \qquad z_1 = x_1 + iy_1$$
$$(B_2) \qquad 0 \leqslant \mathfrak{J}z_2 \leqslant 1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

[7]) Comm. Math. Helv., 9 (1937), 362.

et une représentation de B_1 sur B_2 donnée par les relations suivantes

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + [v_2(u) - v_1(u)]\, y_1 \\ y_2 &= y_1 \end{aligned}$$

u étant l'abscisse du point situé sur l'axe réel de la droite reliant $(u, 0)$ à $(v_1(u), 1)$ et passant par le point (x_1, y_1). On montre aisément qu'en vertu de la continuité de $v_1(u)$, cette droite existe et est unique.

Nous allons montrer que pour les points tels que $u > 0$ cette représentation est q. c. (ce sont les seuls points qui nous intéressent). On a, sur une droite u = constante

$$x_1 = u + y(v_1 - u)$$

d'où

$$du = \frac{dx_1 - (v_1 - u)\, dy_1}{1 + y_1(v_1' - 1)} \,.$$

Puis

$$dx_2 = \frac{1 + y_1(v_2' - 1)}{1 + y_1(v_1' - 1)} dx_1 + \frac{v_2 - v_1 + y_1[v_1'(v_2 - u) - v_2'(v_1 - u) - (v_2 - v_1)]}{1 + y_1(v_1' - 1)} dy_1$$

$$dy_2 = dy_1 \,.$$

Si nous écrivons

$$dx_2^2 + dy_2^2 = g_{11} dx_1^2 + 2 g_{12}\, dx_1 dy_1 + g_{22} dy_1^2$$

nous avons

$$g_{11} = \left[\frac{1 + y_1(v_2' - 1)}{1 + y_1(v_1' - 1)}\right]^2$$

$$g_{12} = \frac{1 + y_1(v_2' - 1)}{[1 + y_1(v_1' - 1)]^2} \Big\{ v_2 - v_1 + y_1[v_1'(v_2 - u) - v_2'(v_1 - u) - (v_2 - v_1)] \Big\}$$

$$g_{22} = \frac{1}{[1 + y_1(v_1' - 1)]^2} \Big\{ [v_2 - v_1 + y_1(v_1'(v_2 - u) - v_2'(v_1 - u) - (v_2 - v_1))]^2 + [1 + y_1(v_1' - 1)]^2 \Big\}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{g_{11} + g_{22}}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} = {} & \frac{1 + y_1(v_2' - 1)}{1 + y_1(v_1' - 1)} + \frac{1 + y_1(v_1' - 1)}{1 + y_1(v_2' - 1)} + \\ & + \frac{\{v_2 - v_1 + y_1[(v_2 - u) v_1' - (v_1 - u) v_2' - (v_2 - v_1)]\}^2}{[1 + y_1(v_1' - 1)]\,[1 + y_1(v_2' - 1)]} \,. \end{aligned} \tag{3}$$

D'après l'inégalité (1), on a, pour $0 \leqslant y_1 \leqslant 1$,

$$\frac{1 + y_1(v_2' - 1)}{1 + y_1(v_1' - 1)} \leqslant \mathrm{Max}\left(\frac{v_2'}{v_1'}, \frac{v_1'}{v_2'}\right) \leqslant K_1$$

puis la même inégalité pour le second terme de l'expression (3) ; en outre l'expression

$$\left| \frac{v_2 - v_1 + y_1 [(v_2 - u) v_1' - (v_1 - u) v_2' - (v_2 - v_1)]}{1 + y_1 (v_1' - 1)} \right|$$

atteint son maximum soit pour $y_1 = 0$, soit pour $y_1 = 1$; ce maximum est donc

$$\text{Max} \left\{ | v_2 - v_1 | , \left| v_2 - u - \frac{v_2'}{v_1'} (v_1 - u) \right| \right\}$$

qui est inférieur, en valeur absolue, à

$$\text{Max} \{ K_2, 2K_2 + 2K_1 \} = 2K_2 + 2K_1 .$$

Un même calcul montre ensuite que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{v_2 - v_1 + y_1 [(v_2 - u) v_1' - (v_1 - u) v_2' - (v_2 - v_1)]}{1 + y_1 (v_2' - 1)} \right| \\ & < \text{Max} \left\{ | v_2 - v_1 | , \left| (v_2 - u) \frac{v_1'}{v_2'} - (v_1 - u) \right| \right\} \\ & < \text{Max} \{ K_2 , \quad 2K_2 + K_1 \} \\ & = 2K_2 + K_1 . \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\frac{g_{11} + g_{22}}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} < 2K_1 + 2(K_2 + K_1)(2K_2 + K_1) \; ;$$

la représentation est donc q. c., et les deux relations sont bien du même type.

On remarquera que ce théorème ne fait pas intervenir la dérivée seconde de $v(u)$, il constitue bien une généralisation des théorèmes 5 et 6.

Il est clair que la relation $v = u$ est parabolique. On a donc le

Théorème 8: Si une relation $v = v(u)$ *vérifie, pour* $u > 0$, *les deux conditions*

$$| v'(u) - 1 | < \frac{K_1}{u}$$

$$| v(u) - u | < K_2 ,$$

alors elle est parabolique.

D'autre part, puisque $v = ku$ est hyperbolique pour $k \neq 1$:

Théorème 9: Si une relation $v = v(u)$ *vérifie, pour* $u > 0$, *les deux conditions*

$$\left| \frac{v'(u)}{k} - 1 \right| < \frac{K_1}{u}$$

$$| v(u) - ku | < K_2 \qquad k \neq 1$$

elle est hyperbolique.

Et enfin:

Théorème 10: Soit une relation $v = v(u)$; *s'il existe une fonction* $p(u)$ *telle que, pour* $u > 0$,

$$p'(u) > K > 2$$

$$p''(u) \geqslant 0$$

$$\left| \frac{p'}{v'} - 1 \right| < \frac{K_1}{u}$$

$$| p - v | < K_2$$

alors $v(u)$ *est hyperbolique.*

Ce théorème est plus général que le théorème 6, qui affirme que cette fonction $p(u)$ est hyperbolique. On le voit en prenant par exemple

$$v(u) = \tfrac{1}{4} u^2 + \sin u$$

et

$$p(u) = \tfrac{1}{4} u^2 \; ;$$

$v''(u)$ n'est pas toujours positif, et le théorème 6 ne permet par d'affirmer, comme le théorème 10, que $v(u)$ est hyperbolique.

On peut encore mettre le théorème 8 sous une forme plus précise. Posons, dans le théorème 7,

$$v_1(u) = u$$

$$v_2(u) = u + p(u) \; .$$

Il vient

$$\frac{g_{11} + g_{22}}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} = 1 + y_1 p' + \frac{1 + p^2}{1 + y_1 p'}$$

qui est borné dès que p, p' et $\dfrac{1}{1 + p'}$ le sont. D'où

Théorème 11: Soit une relation $v = v(u) = u + p(u)$. *Elle est du type parabolique si l'on a*

$$-1 + K_1 < p'(u) < K_2 \qquad K_1 > 0$$

$$|p(u)| < K_3 \; .$$

§ 5. Les relations H = 0 à symétrie centrale.

Les théorèmes du § 4 s'appliquent facilement aux relations $H(r_1, r_2) = 0$ qui possèdent la symétrie centrale:

$$H(r_1, r_2) = 0 \qquad \text{entraîne} \qquad H(-r_2, -r_1) = 0 .$$

Soit une valeur $r_1^0 > 0$ de r_1 et r_2^0 la valeur correspondante de r_2 par la relation $H = 0$; on prendra pour voisinage de $r_1 = r_2 = 0$ les deux demi-disques de diamètres $(r_1^0, -r_2^0)$ et $(r_2^0, -r_1^0)$ situés respectivement dans les deux demi-plans supérieur et inférieur. On peut représenter ces voisinages conformément sur une couronne

$$1 \leqslant |Z| < R \qquad Z = f(z)$$

R étant infini ou non suivant que le type cherché est parabolique ou hyperbolique. Le voisinage du point (0,0) est symétrie par rapport à ce point[8]): il existe donc une transformation biunivoque et conforme de la couronne en elle-même, qui, répétée, donne la transformation identique; d'autre part, le cercle $|Z| = 1$ est conservé dans cette transformation: c'est donc une rotation de π autour de $Z = 0$; l'image de l'axe réel est donc formée de deux arcs symétriques de la couronne, décomposant cette couronne en deux parties égales. Posons

$$u = Z^2$$

donc

$$u = (f(z))^2 = g(z) \;;$$

$g(z)$ représente le demi-disque de diamètre $(-r_2^0, r_1^0)$ du demi-plan $\mathfrak{J} z \geqslant 0$ sur une couronne

$$1 \leqslant |u| \leqslant R^2$$

cette représentation étant telle que deux points de $\mathfrak{J} z = 0$ d'abscisses x_1 et x_2 donnent un même point de cette couronne dès que

$$J(x_1, x_2) \equiv H(x_1, -x_2) = 0 \qquad x_1 > 0$$

relation qui est de même nature que celles qui ont été étudiées au § 4. Le type de cette relation est celui de la relation donnée $H = 0$.

On peut montrer ainsi que la relation

$$H(r_1, r_2) \equiv e^{r_1} - e^{-r_2} - r_1 - r_2 = 0$$

est du type hyperbolique[9]).

---

[8]) Ce qui justifie l'expression de symétrie centrale.

[9]) Voir le deuxième mémoire cité à la note 1.

§ 6. Les problèmes E′ et E″.

Considérons une relation $H(r_1, r_2) = 0$ autour du couple $(r_1 = 0, r_2 = 0)$. Supposons que r_2 admet une dérivée continue par rapport à r_1 dans le voisinage de $r_1 = 0$, excepté pour $r_1 = 0$. Supposons de plus que cette dérivée tend vers une limite finie a si r_1 tend vers zéro par valeurs négatives. On peut, sans restreindre la généralité supposer que $a = 1$.

Considérons un voisinage de $(r_1 = 0, r_2 = 0)$ et opérons sur ce voisinage la transformation q. c. suivante:

$$\begin{array}{llll} \text{si} & \Re\zeta \geqslant 0\,, & & \zeta_1 = \zeta\ ; \\ \text{si} & \Im\zeta \geqslant 0\,, & & \zeta_1 = \zeta\ ; \\ \text{si} & \Re\zeta < 0\,,\quad \Im\zeta < 0\,, & H(\xi, \xi_1) = 0 & \eta_1 = \eta. \end{array}$$

La transformation est bien q. c.; grâce à elle, on obtient une relation

$$\overline{H}(r_1^*\ ,\ r_2^*) = 0$$

qui se réduit à l'identité pour $r_1^* < 0$. C'est une relation $J = 0$ du problème C'. On a donc le théorème

Théorème 12: Soit une relation $H = 0$ telle que pour $-\varepsilon < r_1 < 0$, r_2 possède par rapport à r_1 une dérivée continue positive, tendant vers l'unité pour $r_1 \to 0$. Alors

1° *la singularité est décomposable;*

2° *la relation $J = 0$ qui en résulte a le même type que la relation*

$$J^*(r_1, r_2) \equiv H(r_1, r_2) = 0 \qquad\qquad r_1 > 0$$

Considérons par exemple la relation

$$H(r_1\ ,\ r_2) \equiv e^{\frac{1}{r_2}} - e^{e^{\frac{1}{r_1}}} + 1 = 0\ .$$

Si $r_1 \to -0$, $r_2 \to -0$ avec $r_2' \to 1$. Le type de cette relation est donc le même que celui de

$$J(r_1\ ,\ r_2) \equiv e^{\frac{1}{r_2}} - e^{e^{\frac{1}{r_1}}} + 1 = 0 \qquad\quad r_1 > 0\ .$$

Pour appliquer un des théorèmes du § 4, nous posons

$$r_1 = e^{-u}\quad ,\quad r_2 = e^{-v}$$

ce qui donne

$$e^{e^v} - e^{e^{e^u}} + 1 = 0\ .$$

En vertu du théorème 7, cette relation a le même type que la relation

$$v = e^u \ ;$$

elle est donc hyperbolique.

La décomposition d'une singularité peut se faire dans des cas plus étendus:

Théorème 13 : Soit une relation $H(r_1, r_2) = 0$ *telle que, pour* $-\varepsilon < r_1 < 0$, $\dfrac{dr_2}{dr_1}$ *existe, avec* $0 < \dfrac{1}{K} < \left|\dfrac{dr_2}{dr_1}\right| < K$.

Alors

1⁰ *La singularité est décomposable ;*

2⁰ *La relation* $J = 0$ *qui en résulte a le même type que la relation*

$$J(r_1, r_2) \equiv H(r_1, r_2) = 0 \qquad\qquad r_1 > 0 \ .$$

Pour le démontrer, on opère la même représentation que dans le théorème 12; en vertu des hypothèses sur $H = 0$, cette représentation est bien q. c.

Ces deux derniers théorèmes peuvent s'étendre au cas où la dérivée de r_2 s'annule.

Théorème 14 : Soit une relation $H = 0$, *avec* $H(0, 0) = 0$. *Supposons que pour* $-\varepsilon < r_1 < 0$, $\dfrac{dr_2}{dr_1}$ *existe,* $\dfrac{dr_2}{r_1^m\, dr_1}$ *tendant vers une limite finie non nulle lorsque* r_1 *tend vers zéro par valeurs négatives* (m est un nombre positif quelconque). *Alors*

1⁰ *La singularité est décomposable ;*

2⁰ *Le type est celui de la relation* $J(s_1, s_2) = 0$ *obtenue en posant*

$$s_1 = r_1^{2\frac{m+1}{m+2}} \qquad\qquad r_1 > 0$$

$$s_2 = r_2^{\frac{2}{m+2}} \qquad\qquad r_2 > 0$$

dans $H(r_1, r_2) = 0$.

Posons $r_2 = h(r_1)$ et, comme dans la démonstration du théorème 2,

$$Z_1 = \zeta_1^{2\frac{m+1}{m+2}}$$

$$Z_2 = \zeta_2^{\frac{2}{m+2}}$$

en choisissant les déterminations réelles pour ζ_1 et ζ_2 réels. Le voisinage V_ϱ^* de $(Z_1 = 0, Z_2 = 0)$ est formé

1° du secteur $|Z| < \varrho^{2\frac{m+1}{m+2}}$ $\quad 0 \leqslant \arg Z \leqslant 2\frac{m+1}{m+2}\pi$;

2° d'un secteur de l'angle

$$2\frac{m+1}{m+2}\pi \leqslant \arg Z \leqslant 2\pi$$

limité par la courbe image du demi-cercle de diamètre $h(-\varrho)$, $h(\varrho)$ du demi-plan $\mathfrak{J}\zeta \leqslant 0$ par $Z = \zeta^{\frac{2}{m+2}}$.

Ces deux parties sont soudées le long de la demi-droite $\arg Z = 0$ par une relation

$$Z_2 = h^*(Z_1)$$

et le long de la demi-droite $\arg Z = 2\frac{m+1}{m+2}\pi$ par

$$|Z_2| = h^{**}(|Z_1|) .$$

La relation $J(s_1, s_2) = 0$ est équivalente à $s_2 = h^{**}(s_1)$; d'autre part, $|Z_2| = h^{**}(|Z_1|)$ possède une dérivée continue pour toutes les valeurs de Z_1 que nous considérons. On représente V^*_ϱ sur un disque D du plan $z = ue^{i\theta}$, coupé le long de l'axe réel positif: on pose

1° pour

$$0 \leqslant \arg Z \leqslant 2\frac{m+1}{m+2}\pi$$

$$\theta = \arg Z$$

$$u = \frac{\arg Z \cdot h^{**}(|Z|) + \left(2\frac{m+1}{m+2}\pi - \arg Z\right)|Z|}{2\frac{m+1}{m+2}\pi}$$

2° pour

$$2\frac{m+1}{m+2}\pi \leqslant \arg Z \leqslant 2\pi$$

$$\theta = \arg Z$$

$$u = |Z| .$$

Cette représentation est bien q. c.; elle représente V^*_ϱ sur le disque entaillé D et le long de cette entaille la relation est $s_2 = h^*(s_1)$; le théorème est démontré.

Comme le théorème 12, le théorème 14 se généralise immédiatement:

Théorème 15: On peut dans l'énoncé du théorème 14, remplacer la condition que $\frac{dr_2}{r_1^m\, dr_1}$ *tend vers une limite finie non nulle par la condition*

$$0 < \frac{1}{K} < \left| \frac{dr_2}{r_1^m\, dr_1} \right| < K$$

pour $-\varepsilon < r_1 < 0$.

La démonstration est la même.

§ 7. Remarque sur la méthode utilisée.

Il est clair que la méthode que nous avons utilisée peut donner des résultats beaucoup plus étendus. Par exemple, les théorèmes 1 et 12 peuvent encore être généralisés de diverses façons. On aurait ainsi comme généralisation du théorème 1:

Théorème 16: Si, pour $0 < |r_1| < \varepsilon$, r_2 *est une fonction de* r_1 *pourvue d'une dérivée continue toujours positive, et si, de plus, on a*

$$0 < \frac{1}{K} < | \, r_1 (\log r_1)^2 \cdot r_2 \cdot r_2' \, | < K \tag{1}$$

on peut faire correspondre au couple ($r_1 = 0$, $r_2 = 0$) *un point de la surface de Riemann.*

La démonstration est en principe la même que celle du théorème 2. On fait une substitution

$$Z_1 = f_1(\zeta_1) \qquad Z_2 = f_2(\zeta_2) \ .$$

On pose

$$Z_1 = \frac{-1}{\log \, \zeta_1}$$

ce qui représente le demi-plan $\mathfrak{J}\zeta \geqslant 0$ sur un domaine D_1; la fonction $Z_2 = f_2(\zeta_2)$ représente le demi-plan $\mathfrak{J}\zeta \leqslant 0$ sur le domaine complémentaire D_2. On trouve que les relations $Z_2 = h^*(Z_1)$ et $|Z_2| = h^{**}(|Z_1|)$ qui en résultent possèdent des dérivées continues et positives pour les valeurs de Z_1 que nous considérons; la double inégalité (1) permet de faire une représentation q. c. du voisinage de ($Z_1 = 0, Z_2 = 0$) sur un cercle, $Z_1 = Z_2 = 0$ venant au centre du cercle.

Il est clair qu'on établirait sans peine un grand nombre de propositions analogues.

(Reçu le 29 septembre 1938.)