Approximationseigenschaften und Strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen

Von Alice Roth, Zollikon (Zürich)

Einleitung

1. Den Ausgangspunkt für die Untersuchungen dieser Arbeit bildet ein Satz von *T. Carleman*[1]), der folgendermaßen formuliert werden kann: *Zu jeder für alle endlichen Werte der reellen Variablen x definierten stetigen (reellen oder komplexen) Funktion $f(x)$ und zu jeder für alle endlichen Werte der nicht negativen reellen Variablen r definierten stetigen positiven Funktion $\varepsilon(r)$ (die gegen 0 streben darf, wenn $r \to \infty$) gibt es eine solche ganze Funktion $G(z)$ der komplexen Variablen z, daß im ganzen Intervalle $-\infty < x < +\infty$*

$$|G(x) - f(x)| < \varepsilon(|x|)$$

gilt. Dieser Satz präzisiert den Approximationssatz von Weierstraß, indem die stetige Funktion $f(x)$ im unendlichen Intervalle $-\infty < x < +\infty$, nicht nur in jedem endlichen Intervalle, gleichmäßig angenähert wird durch die ganze Funktion $G(x)$. Herr Carlemann hat darauf hingewiesen, daß in seinem Satze die reelle Achse $-\infty < x < +\infty$ durch eine sich ins Unendliche erstreckende doppelpunktlose rektifizierbare Kurve oder durch gewisse Kurvensysteme der Ebene ersetzt werden darf[2]). Satz I in § 2 der vorliegenden Arbeit bildet eine Erweiterung dieses Carlemanschen Satzes, und zwar einerseits dadurch, daß als annähernde Funktionen *meromorphe Funktionen* herangezogen werden, andererseits dadurch, daß als Menge, auf der eine dort stetige Funktion $f(z)$ angenähert wird, eine beliebige abgeschlossene Menge vom Flächenmaß 0 zugelassen wird. Die Frage, welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sind, denen eine abgeschlossene (beschränkte oder unbeschränkte) Menge $\mathfrak{M}$

---

[1]) *T. Carleman*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd. 20 B, No. 4 (1927).

[2]) In dieser Arbeit werden folgende Bezeichnungen verwendet: Ebene heißt die Ebene der komplexen Zahlen ohne den unendlich fernen Punkt. Unter Menge wird eine aus Punkten dieser Ebene bestehende Menge verstanden. Eine Menge heißt dann abgeschlossen, wenn sie in bezug auf die (den unendlich fernen Punkt nicht enthaltende!) Ebene abgeschlossen ist. Gebiet heißt eine zusammenhängende offene Teilmenge der Ebene, Bereich die abgeschlossene Hülle eines Gebietes. Ein variabler Punkt der Ebene wird meist mit $z = x + iy = re^{i\varphi}$ bezeichnet, wobei x, y, r, φ reell sind und $r \geqq 0$ ist.

zu genügen hat, damit jede auf ihr stetige Funktion $f(z)$ durch meromorphe Funktionen gleichmäßig approximierbar sei, wird hier nicht beantwortet. Immerhin beweise ich: die notwendige Bedingung, daß die abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$ nirgendsdicht sei in der Ebene, ist nicht hinreichend, und zwar nicht einmal dann, wenn die Menge $\mathfrak{M}$ beschränkt ist (s. § 2, Nr. 3); und andererseits zeige ich an einem einfachen Beispiele (s. den Satz II in § 2, der auch für die Anwendung in § 4 von Bedeutung ist): die hinreichende Bedingung, daß die Menge $\mathfrak{M}$ das Flächemaß 0 habe, ist nicht notwendig, und zwar auch dann nicht, wenn die Menge $\mathfrak{M}$ unbeschränkt ist[3]). Wenn auf einer *beschränkten* Menge $\mathfrak{M}$ jede dort stetige Funktion gleichmäßig durch meromorphe Funktionen angenähert werden kann, können als Annäherungsfunktionen *rationale Funktionen* genommen werden; zu den sich auf diesen Spezialfall beziehenden wichtigen Untersuchungen von F. Hartogs und A. Rosenthal[4]) und von M. Lavrentieff[5]) trägt diese Arbeit außer dem bereits angedeuteten Gegenbeispiel (s. § 2, Nr. 3) lediglich Methodisches bei.

2. Während auf einem beschränkten *Bereiche* die allgemeine stetige Funktion nicht gleichmäßig approximierbar ist durch rationale Funktionen, ist eine solche Annäherung, gemäß dem Approximationssatze von Runge, möglich für jede dort eindeutige und reguläre analytische Funktion. Herr Carleman hat in der oben zitierten Arbeit darauf hingewiesen, daß auf gewissen *unbeschränkten* einfachzusammenhängenden Bereichen jede dort reguläre analytische Funktion gleichmäßig angenähert werden könne durch ganze Funktionen. Satz III in § 3 der vorliegenden Arbeit handelt von der *gleichmäßigen Approximation eindeutiger analy-*

---

[3]) Mit den in dieser Arbeit angewandten Methoden könnten leicht auch allgemeinere Beispiele von Mengen, deren Flächenmaß nicht 0 ist und auf denen jede dort stetige Funktion gleichmäßig durch meromorphe Funktionen angenähert werden kann, konstruiert werden. Ich habe bereits früher, vgl. a. a. O.[12]), darauf hingewiesen, daß auf jeder doppelpunktlosen stetig ins Unendliche führenden Kurve jede dort stetige Funktion gleichmäßig durch ganze Funktionen angenähert werden kann. Etwas allgemeinere Mengen, auf denen eine solche Approximation möglich ist, sind diejenigen abgeschlossenen Mengen, bei denen jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge ein Baum (d. h. ein im kleinen zusammenhängendes Kontinuum, das keinen topologischen Kreis enthält) ist; dies kann in einfacher Weise mit Hilfe des für Bäume gültigen Zerlegungssatzes (s. *K. Menger*, Kurventheorie, Leipzig und Berlin 1932, S. 306) und des Hilfssatzes 1 von § 1 bewiesen werden.

[4]) a) *F. Hartogs*, Math. Annalen 98 (1927), S. 164—178.
b) *F. Hartogs* und *A. Rosenthal*, Math. Annalen 100 (1928), S. 212—263.
c) *F. Hartogs* und *A. Rosenthal*, Math. Annalen 104 (1931), S. 606—610.
Vgl. weiter *J. L. Walsh*, Math. Annalen 96 (1926), S. 437—450.

[5]) *M. Lavrentieff*, a) (russisch) Travaux de l'Institut Phys. Math. Stekloff, section math. vol. V (1934); b) Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynomes, Actualités scient. et industr. 441 (1936).

tischer Funktionen durch meromorphe Funktionen auf abgeschlossenen Mengen, die unbeschränkte Bereiche sein dürfen, und zwar werden (hauptsächlich im Hinblick auf die Anwendung in § 4) gleichzeitig verschiedene analytische Funktionen, die paarweise fremden Mengen zugeordnet sind, durch eine einzige meromorphe Funktion angenähert.

3. Der Wert des Carlemanschen Approximationssatzes besteht nicht allein darin, daß die Annäherung im ganzen Intervalle $-\infty < x < +\infty$ gleichmäßig erfolgt, sondern auch darin, daß die annähernde ganze Funktion $G(x)$ so gewählt werden kann, daß die Differenz zwischen ihr und der gegebenen stetigen Funktion $f(x)$ gegen 0 strebt, wenn $|x| \to \infty$. Auch bei allen in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Approximationen wird die annähernde meromorphe Funktion so konstruiert, daß die Differenz zwischen ihr und der anzunähernden Funktion auf der vorliegenden Menge gleichmäßig gegen 0 strebt, wenn $z \to \infty$, und zwar gilt dies nicht nur bei den Annäherungen stetiger Funktionen (Sätze I und II in § 2), sondern auch bei der Annäherung analytischer Funktionen (Satz III in § 3). Dieses Verhalten im Unendlichen legt es nahe, die gefundenen Approximationen zum Nachweis der Existenz meromorpher Funktionen von besonderem asymptotischen Verhalten heranzuziehen. Eine der mannigfaltigen Anwendungsmöglichkeiten dieser Art wird in § 4 ausführlich dargestellt; sie betrifft diejenigen *meromorphen Funktionen, die auf allen vom Nullpunkte ausgehenden Halbgeraden gegen einen Grenzwert streben, wenn* $|z| \to \infty$. Im Zusammenhang mit Aufgaben, die von ganzen Funktionen dieser Art handeln[6]), findet sich in der Aufgabensammlung von G. Pólya und G. Szegö die folgende interessante Frage[7]): *Man teile die vom Nullpunkt auslaufenden Halbstrahlen irgendwie in zwei Kategorien. Gibt es zu jeder Einteilung eine ganze Funktion, die längs den Halbstrahlen der ersten Kategorie gegen* 0, *längs denen der zweiten Kategorie gegen* ∞ *strebt?* Es wird dort mit einer einfachen Mächtigkeitsüberlegung gezeigt, daß die Antwort negativ ist. Durch diese Fragestellung angeregt, versuchte ich, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für jene Einteilung der Strahlen[8]) zu finden. Nachdem es sich gezeigt hatte, daß diese Bedingungen einfacher Art sind (s. Satz V in § 4), bin ich zur Auf-

[6]) Beispiele transzendenter ganzer Funktionen dieser Art sind $e^z + z$, dann $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ und die berühmten, von *G. Mittag-Leffler* (Verhandlungen des III. Internat. Math. Kongr. Heidelberg 1904, S. 258—264) gefundenen Beispiele von ganzen Funktionen, die auf allen vom Nullpunkte ausgehenden Strahlen gegen 0 streben.

[7]) *G. Pólya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Berlin 1925) Bd. 2, Abschnitt IV, Nr. 187, S. 33 und S. 212.

[8]) Eine Halbgerade wird im folgenden stets Strahl (nicht Halbstrahl) genannt.

stellung und Beantwortung einer allgemeineren Frage geführt worden: Wenn eine meromorphe Funktion $F(z)$ auf jedem vom Nullpunkt ausgehenden Strahle gegen einen endlichen Grenzwert oder gegen den Grenzwert ∞ strebt, bilden diese Grenzwerte eine auf der Peripherie des Einheitskreises definierte Funktion, den *Strahlengrenzwert* der meromorphen Funktion $F(z)$. Dieser Strahlengrenzwert ist offenbar eine Funktion der Klasse 0 oder 1 (im Baireschen Sinne), d. h. Grenzfunktion einer konvergenten Folge stetiger Funktionen. *Welche auf der Kreislinie definierten Funktionen der Klassen* 0 *und* 1 *lassen sich als Strahlengrenzwert einer meromorphen Funktion auffassen?* Solche und nur solche, deren *Konstanzintervalle auf der Kreislinie dicht liegen.* Dieses Ergebnis ist mit etwas weitergehenden Resultaten zusammen in den Sätzen IVa und IVb von § 4 enthalten; sie bestimmen insbesondere noch den Typus der Verteilung der *Juliaschen Richtungen* einer meromorphen Funktion, die auf allen im Nullpunkt entspringenden Strahlen gegen einen Grenzwert strebt: Eine Menge von Richtungen kann dann und nur dann als die Menge der Juliaschen Richtungen einer solchen besonderen meromorphen Funktion aufgefaßt werden, wenn die entsprechenden vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen eine abgeschlossene Menge bilden, die *keinen Winkelraum* enthält[9]).

In § 5 werden weitere Anwendungsmöglichkeiten der Überlegungen der drei ersten Paragraphen skizziert; Satz VI betrifft die Existenz einer ganzen Funktion, die auf einer gewissen Teilmenge der Einheitskreislinie eine vorgelegte beliebige Funktion der Klasse 0 oder 1 als Strahlengrenzwert aufweist. Satz VI′ ist ein entsprechender Satz über die Existenz einer im *Kreisinnern* $|z| < 1$ *regulären Funktion,* die auf einer gewissen Teilmenge der Kreisperipherie eine vorgelegte beliebige Funktion der Klasse 0 oder 1 als *radialen Grenzwert* hat.

Ein Teil der Resultate dieser Untersuchungen ist in einer C. R.-Note angekündigt worden[10]).

§ 1. Hilfssätze

1. Zu irgend zwei beschränkten abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, deren Durchschnitt leer ist, zu zwei beliebigen rationalen Funktionen $R_1(z)$ und $R_2(z)$ und zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε gibt es,

[9]) Die Aussagen über den Strahlengrenzwert und über die Verteilung der Juliaschen Richtungen bleiben richtig, wenn der Ausdruck „meromorphe Funktion" überall durch den Ausdruck „ganze Funktion" ersetzt wird; s. Satz IVb in § 4.

[10]) *A. Roth,* Comptes Rendus Paris 206 (1938), S. 479—481.

wie aus den Untersuchungen von Runge folgt[11]), eine solche rationale Funktion $R(z)$, daß

$$|R(z) - R_1(z)| < \varepsilon \,, \qquad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}_1 \,, \tag{1}$$

$$|R(z) - R_2(z)| < \varepsilon \,, \qquad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}_2 \,. \tag{2}$$

Dieser Paragraph handelt ebenfalls von solcher gleichzeitiger Approximation zweier rationaler Funktionen $R_1(z)$ und $R_2(z)$ durch eine rationale Funktion $R(z)$, jedoch werden Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zugelassen, die einen nicht leeren Durchschnitt $\mathfrak{d} = \mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{M}_2$ haben.

Man könnte zunächst den einfachen Fall behandeln, wo der Durchschnitt $\mathfrak{d}$ aus einem einzigen Punkt, z. B. $z = 0$, besteht und wo die anzunähernden Funktionen Polynome sind. Ich skizziere einige diesbezügliche Überlegungen und Ergebnisse, ohne näher darauf einzutreten, da sie in dieser Arbeit nicht weiter benutzt werden. a) Wenn zu irgend einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine rationale Funktion $R(z)$, welche die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, existieren soll, ist es notwendig, daß $R_1(0) = R_2(0)$ ist. Es genügt, die Approximationsmöglichkeit für den speziellen Fall, daß $R_1(z) = z$ und $R_2(z) = -z$ ist, zu untersuchen; denn sind $R_1(z)$ und $R_2(z)$ irgend zwei Polynome, für die $R_1(0) = R_2(0)$ ist und ist $Q_1(z), Q_2(z), \ldots$ eine Folge von rationalen Funktionen, die in $\mathfrak{M}_1$ gleichmäßig gegen z, in $\mathfrak{M}_2$ gleichmäßig gegen $-z$ streben, so strebt die rationale Funktion

$$\frac{R_1(z) - R_2(z)}{2z} Q_n(z) + \frac{R_1(z) + R_2(z)}{2}$$

in $\mathfrak{M}_1$ gleichmäßig gegen $R_1(z)$, in $\mathfrak{M}_2$ gleichmäßig gegen $R_2(z)$, wenn $n \to \infty$. b) Mit einem von Carleman eingeführten Verfahren[1]) kann bewiesen werden, daß wenn $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zwei von je einem Polygon begrenzte Bereiche sind, die nur den Punkt $z = 0$ gemeinsam haben, zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε ein Polynom $P(z)$ existiert, für das

$$|P(z) - z| < \varepsilon \quad \text{in} \quad \mathfrak{M}_1 \,, \tag{1'}$$

$$|P(z) + z| < \varepsilon \quad \text{in} \quad \mathfrak{M}_2 \,. \tag{2'}$$

c) Ich habe bereits früher darauf hingewiesen, daß in diesem Satze die Polygonbereiche $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ durch allgemeinere Mengen ersetzt werden können und daß der Beweis auf den Carlemanschen Fall zurückgeführt werden könne durch eine elementare konforme Abbildung[12]). Doch scheinen andere, von dieser Methode verschiedene Hilfsmittel zur Behandlung der allgemeinen Fälle geeigneter zu sein, so z. B. die Benutzung gewisser Wurzelfunktionen, wie sie in den Beweisen der nachfolgenden Hilfssätze eine wesentliche Rolle spielen. Mit dem folgenden Hilfssatze 1 kann in verhältnismäßig recht einfacher Weise bewiesen werden: Zu irgend zwei die Ebene nicht zerlegenden beschränkten abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, die nur den Punkt $z = 0$ gemeinsam haben, gibt es ein Polynom $P(z)$, das die Bedingungen (1') und (2') erfüllt.

In allen in den folgenden Hilfssätzen vorkommenden Fällen kann die Durchschnittsmenge $\mathfrak{d}$ aus unendlich vielen Punkten bestehen. Es ist dann nicht möglich, daß die zwei anzunähernden rationalen Funktionen in $\mathfrak{d}$ übereinstimmen, ohne identisch zu sein. Deshalb hängt die Möglichkeit, wie genau zwei verschiedene Funktionen angenähert werden können,

---

[11]) *C. Runge*, Acta mathematica 6 (1885), S. 229—244.

[12]) *A. Roth*, Verhandlungen der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft, Thun 1932, S. 304.

zum mindesten in einer gewissen Umgebung der Durchschnittsmenge $\mathfrak{d}$ davon ab, wie groß die Differenz der anzunähernden Funktionen auf $\mathfrak{d}$ ist, und außerdem kann sie von der Beschaffenheit der Menge $\mathfrak{d}$ abhängen, in gewissen Fällen z. B. von ihrem Maße.

2. *Hilfssatz 1: Sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei von je einem Polygon* (d. h. von einem geschlossenen Streckenzug ohne Doppelpunkt) *begrenzte Bereiche, deren Durchschnitt aus der Verbindungsstrecke $\mathfrak{e}$ der beiden Punkte $z = +\varepsilon$ und $z = -\varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$, besteht, so gilt für einen gewissen Zweig $w(z, \varepsilon)$ der Funktion $\sqrt{z^2 - \varepsilon^2}$*

$$|w(z, \varepsilon) - z| \leqq \varepsilon\,, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{P}_1\,,$$

$$|w(z, \varepsilon) + z| \leqq \varepsilon\,, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{P}_2\,.$$

Die Riemannsche Fläche von $\sqrt{z^2 - \varepsilon^2}$ kann aus zwei Exemplaren $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ der längs der Strecke $\mathfrak{e}$ aufgeschnittenen Ebene aufgebaut werden. Sei $\mathfrak{E}_1$ dasjenige Blatt, in dem $\sqrt{z^2 - \varepsilon^2} - z \to 0$, wenn $z \to \infty$. Im andern Blatte, $\mathfrak{E}_2$, gilt dann $\sqrt{z^2 - \varepsilon^2} + z \to 0$, wenn $z \to \infty$. Diese Festsetzung bewirkt, daß in $\mathfrak{E}_1$ die Funktion $|\sqrt{z^2 - \varepsilon^2} - z|$ beschränkt ist, also das Maximum auf dem Rande, der aus den beiden Ufern der Strecke $\mathfrak{e}$ besteht, annimmt. Für $z = x$, $-\varepsilon \leqq x \leqq +\varepsilon$, ist aber $|\sqrt{z^2 - \varepsilon^2} - z| = |i\sqrt{\varepsilon^2 - x^2} - x| = \varepsilon$ und somit ist in $\mathfrak{E}_1$

$$|\sqrt{z^2 - \varepsilon^2} - z| \leqq \varepsilon\,.$$

Entsprechend ist in $\mathfrak{E}_2$

$$|\sqrt{z^2 - \varepsilon^2} + z| \leqq \varepsilon\,.$$

Jeder der Bereiche $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ liegt mit Ausnahme der Randstrecke $\mathfrak{e}$ ganz im Innern der längs der Strecke $\mathfrak{e}$ aufgeschnittenen Ebene. Deshalb kann festgesetzt werden, daß unter $w(z, \varepsilon)$ derjenige der beiden eindeutigen Zweige, in die $\sqrt{z^2 - \varepsilon^2}$ in $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ zerfällt, sei, der für $\mathfrak{P}_1$ zum Blatte $\mathfrak{E}_1$ gehört. Dann ist in $\mathfrak{P}_1$

$$|w(z, \varepsilon) - z| \leqq \varepsilon\,.$$

Da man bei der analytischen Fortsetzung der Funktion $w(z, \varepsilon)$ vom Bereiche $\mathfrak{P}_1$ in den Bereich $\mathfrak{P}_2$ über die Strecke $\mathfrak{e}$ hinweg vom Blatt $\mathfrak{E}_1$ ins Blatt $\mathfrak{E}_2$ gelangt, ist in $\mathfrak{P}_2$

$$|w(z, \varepsilon) + z| \leqq \varepsilon\,.$$

3. *Hilfssatz 2a: Zu jeder beschränkten abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$, deren Durchschnitt $\mathfrak{d}$ mit der reellen Achse vom linearen Maß 0 ist, und zu zwei beliebig kleinen positiven Zahlen δ und ε gibt es eine rationale Funktion $R(z)$ mit folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} &|R(z)| < 1\,, && \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M}\,, \\ &|R(z)| < \varepsilon\,, && \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M},\ y \leqq -\delta\,, \\ &|R(z) - 1| < \varepsilon\,, && \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M},\ y \geqq +\delta\,. \end{aligned}$$

Da die Durchschnittsmenge $\mathfrak{d}$ beschränkt, abgeschlossen und vom linearen Maß 0 ist, gibt es endlich viele paarweise fremde offene Intervalle $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots, \mathfrak{i}_n$ der reellen Achse, deren Summe $\mathfrak{d}$ enthält und deren Gesamtlänge kleiner als $\frac{1}{4}\varepsilon\delta$ ist. Die Endpunkte des Intervalles $\mathfrak{i}_\nu$ seien $z = x_\nu + \varepsilon_\nu$ und $z = x_\nu - \varepsilon_\nu$, wobei $\varepsilon_\nu > 0$. Es ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu < \frac{1}{8}\,\varepsilon\delta\ . \tag{1}$$

Mit $\mathfrak{H}_1$ sei die obere Halbebene ($y > 0$) mit $\mathfrak{H}_2$ die untere Halbebene ($y < 0$) bezeichnet und mit $\mathfrak{S}$ das Schlitzgebiet $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{i}_\nu$. In diesem Gebiet $\mathfrak{S}$ zerfällt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{arc} \frac{z - (x_\nu + \varepsilon_\nu)}{z - (x_\nu - \varepsilon_\nu)}$$

in eindeutige Zweige. Einer unter ihnen, er sei mit $\sigma(z)$ bezeichnet, ist in $\mathfrak{H}_1$ gleich der Summe aller Winkel, unter denen die Intervalle $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots, \mathfrak{i}_n$ vom Punkte z aus erscheinen, und in $\mathfrak{H}_2$ gleich der Ergänzung dieser Winkelsumme auf 2π. Hieraus folgt, daß

$$0 < \sigma(z) < \pi \qquad \text{in } \mathfrak{H}_1\,, \tag{2}$$

$$\sigma(z) = \pi \qquad \text{in } \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{i}_\nu\,, \tag{3}$$

$$\pi < \sigma(z) < 2\pi \qquad \text{in } \mathfrak{H}_2\,. \tag{4}$$

Unter $w(z)$ sei der entsprechende, im Gebiete $\mathfrak{S}$ eindeutige und reguläre Zweig von

$$\prod_{\nu=1}^{n} \sqrt{\frac{z - (x_\nu + \varepsilon_\nu)}{z - (x_\nu - \varepsilon_\nu)}}$$

verstanden, d. h. es sei

$$w(z) = \left| \prod_{\nu=1}^{n} \sqrt{\frac{z - (x_\nu + \varepsilon_\nu)}{z - (x_\nu - \varepsilon_\nu)}} \right| e^{\frac{i}{2}\sigma(z)}\,.$$

Wegen (2), (3) und (4) hat $w(z)$ im ganzen Gebiete $\mathfrak{S}$ positiven Imaginärteil, in der obern Halbebene $\mathfrak{H}_1$ positiven Realteil und in der untern Halbebene $\mathfrak{H}_2$ negativen Realteil. Es ist also

$$|w(z)+i|>1 \quad \text{in} \quad \mathfrak{S}\,, \tag{5}$$

$$|w(z)+1|>1 \quad \text{in} \quad \mathfrak{H}_1\,, \tag{6}$$

$$|w(z)-1|>1 \quad \text{in} \quad \mathfrak{H}_2\,. \tag{7}$$

Die Bedingung (1) bewirkt, daß für $|y| \geqq \delta$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon_\nu}{|z-(x_\nu-\varepsilon_\nu)|} \leqq \frac{1}{\delta} \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu < \frac{\varepsilon}{8}$$

gilt. Da angenommen werden darf, es sei $\varepsilon < 2$ (und da für irgend welche komplexen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, für die $\sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| < \frac{1}{2}$ ist, $\left|\prod_{\nu=1}^{n}(1+a_\nu)-1\right| \leqq 2\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu|$ gilt), so folgt

$$\left|[w(z)]^2-1\right| = \left|\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{2\varepsilon_\nu}{z-(x_\nu-\varepsilon_\nu)}\right)-1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad |y| \geqq \delta.$$

Daraus ergibt sich in Verbindung mit (6) und (7), daß

$$\left|w(z)-1\right| = \left|\frac{[w(z)]^2-1}{w(z)+1}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad y \geqq +\delta\,, \tag{8}$$

$$\left|w(z)+1\right| = \left|\frac{[w(z)]^2-1}{w(z)-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für} \quad y \leqq -\delta\,. \tag{9}$$

Da, wie bereits bemerkt, der Imaginärteil von $w(z)$ im ganzen Schlitzgebiete $\mathfrak{S}$ positiv ist, so ist

$$f(z) = i\,\frac{w(z)-i}{w(z)+i}$$

eine im Gebiete $\mathfrak{S}$ reguläre, eindeutige Funktion, deren absoluter Betrag dort kleiner als 1 ist. Weil die abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$ ganz im Gebiete $\mathfrak{S}$ enthalten ist, gibt es eine solche positive Zahl η, $\eta < \varepsilon$, daß

$$|f(z)| < 1-\eta \quad \text{in} \quad \mathfrak{M}\,.$$

Aus den Ungleichungen (5), (8) und (9) folgt, daß

$$|f(z) - 1| = \frac{|w(z) - 1| \; |i - 1|}{|w(z) + i|} < 2\,|w(z) - 1| < \varepsilon \text{ für } y \geqq +\delta\,,$$

$$|f(z) + 1| = \frac{|w(z) + 1| \; |1 + i|}{|w(z) + i|} < 2\,|w(z) + 1| < \varepsilon \text{ für } y \leqq -\delta\,.$$

Nach dem Approximationssatze von Runge gibt es eine rationale Funktion $R(z)$, für die auf der Menge $\mathfrak{M}$

$$|R(z) - \tfrac{1}{2}(f(z) + 1)| < \tfrac{1}{2}\eta < \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

gilt. Diese rationale Funktion hat die verlangten Eigenschaften; aus den letzten vier Ungleichungen folgt nämlich, daß

$$|R(z)| < \tfrac{1}{2}|f(z)| + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\eta < 1\,, \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,,$$

$$|R(z)| < \tfrac{1}{2}\,|f(z) + 1| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,, \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M},\ y \leqq -\delta\,,$$

$$|R(z) - 1| \leqq |R(z) - \tfrac{1}{2}(f(z) + 1)| + \tfrac{1}{2}|f(z) - 1| < \varepsilon\,, \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{M},\ y \geqq +\delta.$$

Anmerkung: Die Polverschiebungsmethode von Runge ergibt, daß für die annähernde rationale Funktion $R(z)$ ein *Polynom* genommen werden darf, wenn die Menge $\mathfrak{M}$ die Ebene nicht zerlegt.

4. *Hilfssatz 2b: Zu jeder (beschränkten oder unbeschränkten) abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$, deren Durchschnitt $\mathfrak{d}$ mit einer gegebenen Kreislinie $|z| = \varrho$ vom linearen Maße* 0 *ist und zu zwei beliebig kleinen positiven Zahlen δ und ε gibt es eine rationale Funktion $R(z)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

$$|R(z)| < 1\,, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M}\,,$$

$$|R(z)| < \varepsilon\,, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M}\,,\ |z| \leqq \varrho - \delta\,,$$

$$|R(z) - 1| < \varepsilon\,, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M}\,,\ |z| \geqq \varrho + \delta\,.$$

Weil die Durchschnittsmenge $\mathfrak{d}$ abgeschlossen ist und das lineare Maß 0 hat, gibt es auf der Kreislinie $|z| = \varrho$ einen Punkt $z = a$, der von der Punktmenge $\mathfrak{M}$ positiven Abstand hat. Der Kreis $|z| = \varrho$ wird nun durch eine lineare Funktion, etwa durch

$$\zeta = i\,\frac{z + a}{z - a}$$

so auf die reelle Achse abgebildet, daß dabei der Punkt $z = a$ in den unendlich fernen Punkt und die Kreisscheibe $|z| < \varrho$ in die untere Halbebene übergeht. Die Bildmenge von $\mathfrak{M}$ ist dann abgeschlossen und beschränkt. Ihr Durchschnitt mit der reellen Achse hat das lineare Maß 0. Diejenige Teilmenge von $\mathfrak{M}$, für die $|z| \leqq \varrho - \delta$ ist, wird auf eine Teilmenge der unteren Halbebene, diejenige für die $|z| \geqq \varrho + \delta$ ist, auf eine Teilmenge der oberen Halbebene abgebildet und zwar haben beide Teilmengen von der reellen Achse einen positiven Abstand. Deshalb gibt es nach Hilfssatz 2a eine Funktion, die eine rationale Funktion von ζ, aber damit auch eine rationale Funktion von z ist, welche die an die rationale Funktion $R(z)$ gestellten Forderungen erfüllt.

5. *Hilfssatz 2c: Es seien vorgelegt*

1. *vier positive Zahlen* $\varrho, \delta, \eta, \varepsilon$, *wobei* $\varrho > \delta$, $\eta > \varepsilon$,
2. *eine (beschränkte oder unbeschränkte) abgeschlossene Menge* $\mathfrak{M}$, *deren Durchschnitt* $\mathfrak{d}$ *mit der Kreislinie* $|z| = \varrho$ *das lineare Maß* 0 *hat, und*
3. *eine rationale Funktion* $S(z)$, *für die* $|S(z)| \leqq \eta$ *gilt, wenn* z *in* $\mathfrak{M}$ *enthalten und* $\varrho - \delta \leqq |z| \leqq \varrho + \delta$ *ist.*

Dann existiert eine rationale Funktion $T(z)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

$$|T(z)| < \eta\,, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \leqq \varrho + \delta\,,$$

$$|T(z)| < \varepsilon\,, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \leqq \varrho - \delta\,,$$

$$|T(z) - S(z)| < \varepsilon\,, \quad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \geqq \varrho + \delta\,.$$

Dieser Hilfssatz wird auf den vorangehenden zurückgeführt, der in ihm für $S(z) = 1 - \varepsilon$, $\eta = 1$, enthalten ist.

a) Falls die vorliegende rationale Funktion $S(z)$ auf $\mathfrak{M}$ beschränkt ist, ist der Beweis besonders einfach. Sei m eine so große positive Zahl, daß $|S(z)| < m$, wenn z in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Ist $R(z)$ eine (nach Hilfssatz 2b existierende) rationale Funktion, für die

$$|R(z)| < 1\,, \qquad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,,$$

$$|R(z)| < \frac{\varepsilon}{m}\,, \qquad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \leqq \varrho - \delta\,,$$

$$|R(z) - 1| < \frac{\varepsilon}{m}\,, \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \geqq \varrho + \delta\,,$$

so hat die rationale Funktion

$$T(z) = R(z) \cdot S(z)\,,$$

wie sofort ersichtlich ist, die geforderten Eigenschaften.

b) Beweis für den Fall, daß $S(z)$ auf $\mathfrak{M}$ nicht beschränkt ist: Weil die Menge $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist und ihr Durchschnitt mit der Kreislinie $|z| = \varrho$ das lineare Maß 0 hat (also nicht aus dieser ganzen Kreislinie besteht), enthält $\mathfrak{M}$ weder das ganze Innere, noch das ganze Äußere dieser Kreislinie. Sei $z = a$ ein nicht in $\mathfrak{M}$ enthaltener Punkt des Innern und $z = b$ ein nicht in $\mathfrak{M}$ enthaltener Punkt des Äußern und δ' eine so kleine positive Zahl, daß $|a| < \varrho - \delta'$, $|b| > \varrho + \delta'$ und $\delta' \leqq \delta$ ist.

Nun werden die Pole der Funktion $S(z)$ in drei Kategorien eingeteilt: die erste enthält alle im Kreisgebiet $|z| < \varrho - \delta'$ liegenden Pole, die zweite diejenigen des Ringgebietes $\varrho - \delta' < |z| < \varrho + \delta'$ und die dritte alle übrigen. Es sei δ' so gewählt, daß kein Pol auf den beiden Kreislinien $|z| = \varrho - \delta'$ und $|z| = \varrho + \delta'$ liegt. Dementsprechend wird die rationale Funktion $R(z)$ so in drei rationale Summanden $S_1(z)$, $S_2(z)$ und $S_3(z)$ zerlegt,

$$S(z) = S_1(z) + S_2(z) + S_3(z)\,, \tag{1}$$

daß $S_1(z)$ für $|z| \geqq \varrho - \delta'$ beschränkt ist, $S_2(z)$ für $|z| \leqq \varrho - \delta'$ und für $|z| \geqq \varrho + \delta'$ beschränkt ist und $S_3(z)$ für $|z| \leqq \varrho + \delta'$ beschränkt ist. Da also die rationale Funktion $S_3(z)$ im Kreisbereich $|z| \leqq \varrho + \delta'$ regulär ist und da der Punkt $z = b$ außerhalb dieses Bereiches liegt, gibt es eine rationale Funktion $T_3(z)$, deren einziger Pol $z = b$ ist und für die

$$|T_3(z) - S_3(z)| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \text{wenn } |z| \leqq \varrho + \delta'\,. \tag{2}$$

Entsprechend gibt es eine rationale Funktion $T_1(z)$, deren einziger Pol $z = a$ ist und für die

$$|T_1(z) - S_1(z)| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \text{wenn } |z| \geqq \varrho - \delta'\,. \tag{3}$$

Aus den Eigenschaften der Funktionen $S_1(z)$, $S_2(z)$, $S_3(z)$ und aus der über die Funktion $S(z)$ gemachten Voraussetzung ergibt sich leicht, daß $S_2(z) = S(z) - S_1(z) - S_3(z)$ auf der ganzen Menge $\mathfrak{M}$ beschränkt ist. Da auch die Funktionen $T_1(z)$ und $T_3(z)$, deren einzige Pole $z = a$ und $z = b$ sind, auf $\mathfrak{M}$ beschränkt sind, gibt es eine solche positive Zahl m, daß

$$|T_1(z) + S_2(z) + T_3(z)| < m\,, \qquad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,. \tag{4}$$

Sei $R(z)$ eine (nach Hilfssatz 2b existierende) rationale Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$|R(z)| < 1\,, \qquad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,, \tag{5}$$

$$|R(z)| < \frac{\varepsilon}{2m}\,, \qquad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,,\quad |z| \leqq \varrho - \delta'\,, \tag{6}$$

$$|R(z) - 1| < \frac{\varepsilon}{2m}\,, \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,,\quad |z| \geqq \varrho + \delta'\,. \tag{7}$$

Es soll gezeigt werden, daß die rationale Funktion

$$T(z) = S_3(z) - T_3(z) + R(z)[T_1(z) + S_2(z) + T_3(z)]$$

die verlangten Eigenschaften aufweist. Zunächst folgt aus (2), (4) und (6), daß

$$|T(z)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2m}\, m < \varepsilon \;, \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,,\; |z| \leqq \varrho - \delta'\,, \tag{8}$$

und aus (1), (3), (4) und (7), daß

$$\begin{aligned} |T(z) - S(z)| &= |[T_1(z) - S_1(z)] + (R(z) - 1)[T_1(z) + S_2(z) + T_3(z)]| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2m}\, m < \varepsilon\,, \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \geqq \varrho + \delta'\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Gemäß der über die Funktion $S(z)$ gemachten Voraussetzung ist das Maximum von $S(z)$ auf der Durchschnittsmenge von $\mathfrak{M}$ mit dem Kreisring $\varrho - \delta \leqq |z| \leqq \varrho + \delta$ kleiner als η. Es bedeutet keine Einschränkung, anzunehmen, die vorliegende Zahl ε sei so klein, daß dieses Maximum auch kleiner als $\eta - \varepsilon$ ist, d. h., daß

$$|S(z)| < \eta - \varepsilon \text{ für } z \text{ in } \mathfrak{M},\quad \varrho - \delta \leqq |z| \leqq \varrho + \delta\,. \tag{10}$$

Aus (1), (2), (3), (5), (10) und daraus, daß $\delta' \leqq \delta$ ist, ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} |T(z)| &= |\,[S_3(z) - T_3(z)] + R(z)\,[(T_1(z) - S_1(z)) + (T_3(z) - S_3(z)) + S(z)]\,| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + [2\frac{\varepsilon}{3} + \eta - \varepsilon] = \eta\,, \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{M},\; \varrho - \delta' \leqq |z| \leqq \varrho + \delta'\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Da $\delta' \leqq \delta$ ist, folgt aus (8), daß

$$|T(z)| < \varepsilon\,, \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{M},\; |z| \leqq \varrho - \delta\;;$$

aus (8) und (11) und weil $\varepsilon < \eta$ ist, schließt man, daß

$$|T(z)| < \eta, \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{M},\; |z| \leqq \varrho + \delta'\,,$$

aus (9) und (10), daß

$$|T(z)| \leqq |T(z) - S(z)| + |S(z)| < \eta\;, \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M},\; \varrho + \delta' \leqq |z| \leqq \varrho + \delta\,,$$

und aus (9), daß

$$|T(z) - S(z)| < \varepsilon, \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{M},\; |z| \geqq \varrho + \delta\,.$$

6. *Hilfssatz 3a*[13]: *Zu jeder beschränkten abgeschlossenen Menge* $\mathfrak{M}$, *welche die obere Halbebene* $\mathfrak{H}_1$ *nicht zerlegt (d. h., daß* $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{M}$ *zusammenhängend ist) und deren Durchschnitt* $\mathfrak{d}$ *mit der reellen Achse auf dieser nirgendsdicht ist, und zu zwei beliebig kleinen positiven Zahlen* δ *und* ε *gibt es ein Polynom* $P(z)$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

$$|P(z)|<1, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M},$$

$$|P(z)|<\varepsilon, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M},\ y \leqq -\delta,$$

$$|P(z)-1|<\varepsilon, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M},\ y \geqq +\delta.$$

Die positive Zahl a, $a>\delta$, sei so groß, daß die Menge $\mathfrak{M}$ im Quadrate

$$|x|<a \ , \quad |y|<a \ , \tag{1}$$

enthalten ist. Außer der in Hilfssatz 1 eingeführten Wurzelfunktion $w(z, \varepsilon)$ verwenden wir beim folgenden Beweis ein Hilfspolynom $Q(z)$, das folgenden Bedingungen genügt:

I) im Rechteck

$$|x| \leqq 2a \ , \quad 0 \leqq y \leqq a \ , \tag{2}$$

ist $|zQ(z)|<1$,

II) im kleineren Rechteck

$$|x| \leqq 2a, \ \delta \leqq y \leqq a \ , \tag{3}$$

ist $|z\,Q(z) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ein solches Polynom erhält man z. B., indem man die im Rechteck (2) reguläre Funktion $\frac{1}{z+i\alpha}$, wobei $\alpha = \frac{\delta\varepsilon}{8}$, dort durch ein Polynom genügend annähert. Da das Maximum von $\left|\frac{z}{z+i\alpha}\right|$ im Rechteck (2)

[13]) Der Hilfssatz 3a ist in einem interessanten allgemeineren Hilfssatz von Herrn *Lavrentieff* enthalten, vgl. a. a. O. [5b]) S. 25. Anstelle der Voraussetzung, daß die Menge $\mathfrak{M}$ die obere Halbebene nicht zerlege, tritt dort die Voraussetzung, daß die Menge $\mathfrak{M}$ die Ebene nicht zerlege. Ich führe trotzdem den nachstehenden, unabhängig von Lavrentieff entstandenen Beweis des spezielleren Satzes aus, weil der Lavrentieffsche Beweis des allgemeineren Satzes komplizierter ist und sich zudem auf Sätze stützt, die nur in einer nicht leicht zugänglichen früheren (russischen) Publikation bewiesen wurden (s. a. a. O. [5b]) S. 32, wo auf die Sätze 11 und 12 von S. 17 und 18 Bezug genommen wird; der Beweis dieser Sätze findet sich nicht in dieser Publikation, sondern in der a. a. O. [5a]) zitierten.) Darüber, daß der Lavrentieffsche Hilfssatz in einer gewissen Richtung nicht verallgemeinert werden kann, vgl. [14]).

kleiner als 1 ist, gibt es eine positive Zahl η, $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$, für die im Rechteck (2) $\left|\frac{z}{z+i\alpha}\right| < 1-\eta$ gilt. Ist nun $Q(z)$ ein Polynom, für das im Rechteck (2)

$$\left|Q(z) - \frac{1}{z+i\alpha}\right| < \beta$$

gilt, wobei

$$\beta = \frac{\eta}{12\,a} < \frac{\varepsilon}{24\,a},$$

so hat dieses Polynom die gewünschten Eigenschaften, denn im Rechteck (2) gilt

$$|z\,Q(z)| < \left|\frac{z}{z+i\alpha}\right| + |z|\,\beta < 1-\eta+3a\beta = 1-\frac{3}{4}\eta \tag{4}$$

und im Rechteck (3) gilt

$$|1-z\,Q(z)| = \left|\frac{i\alpha}{z+i\alpha} + z\left(\frac{1}{z+i\alpha} - Q(z)\right)\right| < \frac{\alpha}{\delta+\alpha} + |z|\,\beta < \frac{\varepsilon}{8} + 3a\beta < \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{5}$$

Sei ferner m eine so große positive Zahl, daß

$$|Q(z)| < m \qquad \text{für} \qquad |x| \leqq 2a,\ |y| \leqq a\,. \tag{6}$$

Nachdem so das Polynom $Q(z)$ und die mit ihm zusammenhängenden, in (4) und (6) vorkommenden Zahlen η und m bestimmt sind, stellt man die folgenden geometrischen Überlegungen an:

Da der Durchschnitt $\mathfrak{d}$ von der Menge $\mathfrak{M}$ mit der reellen Achse eine abgeschlossene nirgendsdichte Teilmenge des Intervalles $-a \leqq x \leqq +a$ ist, gibt es in diesem Intervalle endlich viele paarweise getrennte offene Teilintervalle $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{i}_2, \ldots, \mathfrak{i}_n$, deren Summe die Menge $\mathfrak{d}$ enthält und deren einzelne Längen kleiner als die kleinere der beiden Zahlen $\frac{\eta}{m}$ und $\frac{2\eta}{a\,m^2}$ ist. Bezeichnet $2\,\varepsilon_\nu$ die Länge des Intervalles $\mathfrak{i}_\nu$, so ist also

$$\varepsilon_\nu < \frac{\eta}{2m}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu^2 < \operatorname{Max}(\varepsilon_\nu) \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu < \frac{\eta}{a\,m^2}\,a = \frac{\eta}{m^2}\,. \tag{8}$$

Der Mittelpunkt des Intervalles $\mathfrak{i}_\nu$ sei $z = x_\nu$, also $z = x_\nu + \varepsilon_\nu$ und $z = x_\nu - \varepsilon_\nu$ seine Endpunkte. Weil diese Endpunkte außerhalb $\mathfrak{M}$ liegen und weil die Menge $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{M}$ die obere Halbebene $\mathfrak{H}_1$ nicht zerlegt und ganz im Innern des Rechtecks

$$\mathfrak{R}_1: \qquad |x| \leqq a \;, \qquad 0 \leqq y \leqq a \;,$$

liegt, kann jedes Punktepaar $z = x_\nu \pm \varepsilon_\nu$ durch einen diesem Rechteck $\mathfrak{R}_1$ angehörigen doppelpunktlosen Streckenzug $\mathfrak{p}_\nu$ verbunden werden, der die Menge $\mathfrak{M}$ nicht trifft. Diese Streckenzüge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ können zudem so gewählt werden, daß sie paarweise fremd sind und daß sie außer ihren Endpunkten $z = x_\nu \pm \varepsilon_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, keine Punkte mit der reellen Achse gemein haben.

$\mathfrak{i}_\nu + \mathfrak{p}_\nu$ ist ein Polygon; $\mathfrak{P}_\nu$ bezeichne den Bereich, der aus ihm und seinem Innern besteht. Die Vereinigungsmenge $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \mathfrak{P}_\nu$ bildet zusammen mit dem Rechteck

$$\mathfrak{R}_2: \qquad |x| \leqq a \;, \qquad -a \leqq y \leqq 0 \;,$$

einen von einem einzigen Polygon begrenzten Bereich $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}_2 + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \mathfrak{P}_\nu$, der die Menge $\mathfrak{M}$ in seinem Innern enthält.

Da der Durchschnitt von $\mathfrak{P}_\nu$ mit dem ebenfalls von einem einzigen Polygon begrenzten Bereiche

$$\mathfrak{R}_2 + \sum_{\mu \neq \nu} \mathfrak{P}_\mu$$

aus der Verbindungsstrecke der Punkte $z = x_\nu - \varepsilon_\nu$ und $z = x_\nu + \varepsilon_\nu$ besteht, ergibt sich aus Hilfssatz 1, daß für den einen Zweig

$$w(z - x_\nu, \varepsilon_\nu) = w_\nu(z)$$

der Funktion $\sqrt{(z-x_\nu)^2 - \varepsilon_\nu^2}$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$|w_\nu(z) - (z - x_\nu)| \leqq \varepsilon_\nu \quad \text{in} \quad \mathfrak{P}_\nu \;, \tag{9}$$

$$|w_\nu(z) + (z - x_\nu)| \leqq \varepsilon_\nu \quad \text{in} \quad \mathfrak{R}_2 + \sum_{\mu \neq \nu} \mathfrak{P}_\mu \;. \tag{10}$$

Außer diesen Funktionen $w_\nu(z)$ gebrauchen wir Polynome $Q_\nu(z)$, die aus dem bereits konstruierten Polynom $Q(z)$ durch die Festsetzung

$$Q_\nu(z) = Q(z - x_\nu) \;, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n \;,$$

entstehen. Gemäß den Ungleichungen (4), (5) und (6) ist

$$|(z - x_\nu) Q_\nu(z)| < 1 - \tfrac{3}{4}\eta \text{ für } |x - x_\nu| \leqq 2a, 0 \leqq y \leqq a, \text{ insbesondere in } \mathfrak{P}_\nu, \tag{11}$$

$$|(z - x_\nu) Q_\nu(z) - 1| < \tfrac{\varepsilon}{4} \text{ für } |x - x_\nu| \leqq 2a, \delta \leqq y \leqq a, \text{ insbesondere, wenn } z \text{ in } \mathfrak{P}_\nu, y \geqq \delta, \tag{12}$$

$$|Q_\nu(z)| < m \text{ für } |x - x_\nu| \leqq 2a, |y| \leqq a, \quad \text{insbesondere in } \mathfrak{P}. \tag{13}$$

Setzt man

$$f_\nu(z) = \tfrac{1}{2} Q_\nu(z) (w_\nu(z) + (z - x_\nu)), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

so gilt wegen (13), (9), (11) und (7), daß

$$\begin{aligned} | f_\nu(z) | &= \left| \frac{1}{2} Q_\nu(z) (w_\nu(z) - (z - x_\nu)) + (z - x_\nu) Q_\nu(z) \right| \\ &< \frac{1}{2} m \varepsilon_\nu + 1 - \frac{3}{4}\eta < 1 - \frac{\eta}{2} \text{ in } \mathfrak{P}_\nu, \end{aligned} \tag{14}$$

wegen (13), (9), (12), (7) und weil $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, daß

$$\begin{aligned} | f_\nu(z) - 1 | &= \left| \frac{1}{2} Q_\nu(z) (w_\nu(z) - (z - x_\nu)) + ((z - x_\nu) Q_\nu(z) - 1) \right| \\ &< \frac{1}{2} m \varepsilon_\nu + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\eta}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{3\varepsilon}{8}, \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{P}_\nu, y \geqq \delta, \end{aligned} \tag{15}$$

und wegen (13) und (10), daß

$$| f_\nu(z) | = \left| \frac{1}{2} Q_\nu(z) \right| \, | w_\nu(z) + (z - x_\nu) | < \frac{1}{2} m \varepsilon_\nu \text{ in } \mathfrak{R}_2 + \sum_{\mu \neq \nu} \mathfrak{P}_\mu. \tag{16}$$

Die Funktion

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} (f_\nu(z))^2$$

ist eine im Innern des (einfach zusammenhängenden) Bereiches $\mathfrak{P}$ reguläre eindeutige Funktion. Aus (14), (15), (16) und (8) folgt, daß

$$\begin{aligned} | f(z) | \leqq | f_\nu(z) |^2 + \sum_{\mu \neq \nu} | f_\mu(z) |^2 &< \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^2 + \\ &+ \sum_{\mu \neq \nu} \left(\frac{1}{2} m \varepsilon_\mu\right)^2 < 1 - \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} = 1 - \frac{\eta}{4} \text{ in } \mathfrak{P}_\nu, \end{aligned}$$

$$| f(z) | \leqq \sum_{\nu=1}^{n} | f_\nu(z) |^2 < \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{2} m \varepsilon_\nu\right)^2 < \frac{\eta}{4} \text{ in } \mathfrak{R}_2 ,$$

$$| f(z) - 1 | \leqq | f_\nu(z) + 1 | \; | f_\nu(z) - 1 | + \sum_{\mu \neq \nu} | f_\mu(z) |^2 < 2 \cdot \frac{3\varepsilon}{8} +$$

$$+ \sum_{\mu \neq \nu} \left(\frac{1}{2} m \varepsilon_\mu\right)^2 < \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\eta}{4} \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{P}_\nu , \; y \geqq \delta .$$

Da die abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$ im Innern des die Ebene nicht zerlegenden beschränkten Bereiches $\mathfrak{P}$ liegt und $f(z)$ dort regulär ist, gibt es schließlich nach Runge ein Polynom $P(z)$, für welches auf der Menge $\mathfrak{M}$

$$| P(z) - f(z) | < \frac{\eta}{4}$$

gilt. Aus den vorangehenden für die Funktion $f(z)$ geltenden Ungleichungen folgt, daß

$$| P(z) | < 1 \text{ in } \mathfrak{M} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{P}_\nu , \quad \text{d. h., wenn } z \text{ in } \mathfrak{M} , \; y \geqq 0 ,$$

$$| P(z) | < \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} < \frac{\varepsilon}{4} , \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M} , \; y \leqq 0 ,$$

$$| P(z) - 1 | < \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{4} < \varepsilon , \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{M} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{P}_\nu , \; y \geqq \delta ,$$

$$\text{d. h., wenn } z \text{ in } \mathfrak{M} , \; y \geqq \delta .$$

Somit ist $P(z)$ ein Polynom mit den gewünschten Eigenschaften.

Anmerkung: Bei der Bildung der Funktion $f(z)$ war es nötig, die Quadrate der Funktionen $f_\nu(z)$ und nicht bloß diese selbst zu summieren. Die gesamte Intervallänge $2 \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu$ ist nämlich größer als das Maß der Menge $\mathfrak{d}$, das aber positiv sein darf; hingegen wird $\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu^2$ beliebig klein, wenn die einzelnen Intervalle, wie es oben geschah, genügend klein gewählt werden.

7. *Hilfssatz 3b: Zu jeder beschränkten abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$, die das Äußere einer gegebenen Kreislinie $|z| = \varrho$ nicht zerlegt und deren Durchschnitt $\mathfrak{d}$ mit dieser Kreislinie auf ihr nirgendsdicht ist, und zu zwei beliebig kleinen positiven Zahlen δ und ε gibt es ein Polynom $P(z)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

$$|P(z)| < 1 , \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M} ,$$

$$|P(z)| < \varepsilon , \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M} , \quad |z| \leqq \varrho - \delta ,$$

$$|P(z) - 1| < \varepsilon , \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M} , \quad |z| \geqq \varrho + \delta .$$

Dieser Satz wird, ähnlich wie Hilfssatz 2b auf Hilfssatz 2a, auf Hilfssatz 3a zurückgeführt, indem man das Kreisgebiet $|z| < \varrho$ durch eine lineare Funktion auf die untere Halbebene abbildet und zwar so, daß ein Punkt $z = a$ der Kreislinie $|z| = \varrho$, der von $\mathfrak{M}$ positiven Abstand hat (einen solchen Punkt gibt es, da $\mathfrak{d}$ abgeschlossen und auf dieser Kreislinie nirgendsdicht ist), in den unendlichfernen Punkt übergeht. Die Bildmenge von $\mathfrak{M}$ ist beschränkt, hat mit der reellen Achse einen auf ihr nirgendsdichten Durchschnitt und zerlegt die obere Halbebene nicht. Diejenige Teilmenge von $\mathfrak{M}$, für die $|z| \geqq \varrho + \delta$ ist, wird abgebildet auf eine Teilmenge der oberen Halbebene, diejenige, für die $|z| \leqq \varrho - \delta$ ist, auf eine Teilmenge der unteren Halbebene, und zwar haben beide Bildmengen einen positiven Abstand von der reellen Achse. Die Anwendung von Hilfssatz 3a ergibt die Existenz einer rationalen Funktion $Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$, deren einziger Pol $z = a$ ist und die folgende Eigenschaften hat:

$$\left|Q\left(\frac{1}{z-a}\right)\right| < 1, \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M},$$

$$\left|Q\left(\frac{1}{z-a}\right)\right| < \varepsilon, \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}, \ |z| \leqq \varrho - \delta,$$

$$\left|Q\left(\frac{1}{z-a}\right) - 1\right| < \varepsilon, \quad \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}, \ |z| \geqq \varrho + \delta.$$

Da die Menge $\mathfrak{M}$ das Äußere der Kreislinie $|z| = \varrho$ nicht zerlegt und da sie beschränkt ist, liegt eine gewisse Umgebung des unendlich fernen Punktes in demselben Teilgebiet der Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ wie der Punkt $z = a$. Deshalb kann $Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$ auf der Menge $\mathfrak{M}$ gleichmäßig durch Polynome approximiert werden. Ein solches Annäherungspolynom $P(z)$ hat, sobald die Annäherung an $Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$ genügend gut ist, die verlangten Eigenschaften.

8. *Hilfssatz 3c: Es seien vorgelegt*

1. *vier positive Zahlen* ϱ, δ, η, ε, wobei $\varrho > \delta$, $\eta > \varepsilon$,
2. *eine beschränkte abgeschlossene Menge* $\mathfrak{M}$, *die das Äußere der Kreislinie* $|z| = \varrho$ *nicht zerlegt und deren Durchschnitt* $\mathfrak{d}$ *mit dieser Kreislinie auf ihr nirgendsdicht ist, und*
3. *ein Polynom* $S(z)$, *für das* $|S(z)| \leqq \eta$ *gilt, wenn* z *in* $\mathfrak{M}$ *enthalten und* $\varrho - \delta \leqq |z| \leqq \varrho + \delta$ *ist.*

Dann existiert ein Polynom $T(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} |T(z)| &< \eta\,, && \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \leqq \varrho + \delta\,, \\ |T(z)| &< \varepsilon\,, && \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \leqq \varrho - \delta\,, \\ |T(z) - S(z)| &< \varepsilon\,, && \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \geqq \varrho + \delta\,. \end{aligned}$$

Dieser Hilfssatz wird, ebenso wie Hilfssatz 2c auf Hilfssatz 2b, auf den Hilfssatz 3b zurückgeführt, der in ihm für $S(z) = 1 - \varepsilon$, $\eta = 1$, enthalten ist; es kommt nur die Überlegung zur Anwendung, die im leichteren Fall a) des Hilfssatzes 2c angestellt wurde. Da die Menge $\mathfrak{M}$ beschränkt und $S(z)$ ein Polynom ist, gibt es eine solche positive Zahl m, daß $|S(z)| < m$ auf $\mathfrak{M}$ ist. Ist $P(z)$ ein Polynom, für das

$$\begin{aligned} |P(z)| &< 1\,, && \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,, \\ |P(z)| &< \frac{\varepsilon}{m}\,, && \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \leqq \varrho - \delta\,, \\ |P(z) - 1| &< \frac{\varepsilon}{m}\,, && \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}\,, \quad |z| \geqq \varrho + \delta\,, \end{aligned}$$

so ist, wie sofort ersichtlich ist,

$$T(z) = P(z) \cdot S(z)$$

ein Polynom, das die geforderten Eigenschaften aufweist.

9. Ein Vergleich der Hilfssätze 2a, 2b, 2c, mit den Hilfssätzen 3a, 3b, 3c legt die Frage nahe, ob nicht in den Hilfssätzen 2a, 2b, 2c die Voraussetzung, daß die Durchschnittsmenge $\mathfrak{d}$ vom linearen Maß 0 sei, dahin abgeschwächt werden darf, daß diese Menge $\mathfrak{d}$ nirgendsdicht sei auf der betreffenden Linie. Es kommt auf das Gleiche heraus, zu fragen, ob nicht in den Hilfssätzen 3a, 3b, 3c die Voraussetzung, daß die Menge $\mathfrak{M}$ die obere Halbebene bzw. das Äußere der Kreislinie $|z| = \varrho$ nicht zerlege, überflüssig wird, wenn statt Polynomen allgemeine rationale Funktionen als annähernde Funktionen zugelassen werden. Der folgende Hilfssatz 4 zeigt, daß eine solche Änderung nicht vorgenommen werden darf in den Hilfssätzen 2b, 2c und 3b, 3c und damit auch nicht in den mit den Hilfssätzen 2b und 3b äquivalenten Hilfssätzen 2a und 3a[14]).

[14]) Dies bedeutet gleichzeitig, daß der a. a. O. [13]) genannte Hilfssatz von Lavrentieff nicht dadurch verallgemeinert werden kann, daß die dortige Voraussetzung, die Menge $\mathfrak{M}$ zerlege die Ebene nicht, weggelassen wird, wenn dafür nur noch verlangt wird, daß die annähernden Funktionen rational seien.

Hilfssatz 4: Es gibt eine beschränkte abgeschlossene Menge $\mathfrak{N}$, die in der Ebene nirgendsdicht ist und die mit der Kreislinie $|z| = 2$ einen auf dieser Kreislinie nirgendsdichten Durchschnitt hat und die so beschaffen ist, daß für keine rationale Funktion $R(z)$ gleichzeitig

$$|R(z)| < 1\,, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{N}\,,$$

$$|R(z)| < \tfrac{1}{4}\,, \qquad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{N}\,, \quad |z| = 1\,,$$

und

$$|R(z) - 1| < \tfrac{1}{4}\,, \quad \textit{wenn } z \textit{ in } \mathfrak{N}\,, \quad |z| = 3\,,$$

gelten kann[15]).

$\mathfrak{c}_1$ bezeichne die Kreislinie $|z| = 1$, $\mathfrak{c}_3$ die Kreislinie $|z| = 3$. Im Kreisringe $\mathfrak{R}: 1 < |z| < 3$, der von $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_3$ begrenzt wird, wähle man eine Punktfolge $z = z_1, z = z_2, \ldots$, die dort dicht ist und deren auf der Kreislinie $|z| = 2$ liegende Teilfolge auf dieser Kreislinie dicht ist. Weiter werde eine Folge positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ gewählt, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ ist. Dann werden nacheinander Mengen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ gemäß den folgenden Vorschriften bestimmt:

I. $\mathfrak{K}_1$ ist ein im Ringgebiet $\mathfrak{R}$ gelegenes Kreisgebiet mit dem Mittelpunkt $z = z_1$ und einem Radius, der kleiner ist als ε_1. Dieses Kreisgebiet wird außerdem so gewählt, daß seine Begrenzung $\mathfrak{k}_1$ keine Punkte der Folge $z = z_2, z = z_3, \ldots$ enthält; dies ist möglich, da diese Punktmenge abzählbar ist.

II. für $n = 2, 3, \ldots$:

a) Falls $\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} \mathfrak{K}_\nu$ den Punkt $z = z_n$ enthält, ist $\mathfrak{K}_n$ leer.

b) Falls $\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} \mathfrak{K}_\nu$ vom Punkte $z = z_n$ einen positiven Abstand hat, ist $\mathfrak{K}_n$ ein im Ringgebiet $\mathfrak{R}$ liegendes Kreisgebiet, dessen Abstand von $\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} \mathfrak{K}_\nu$ positiv ist, dessen Mittelpunkt $z = z_n$ ist, dessen Radius kleiner als ε_n ist und dessen Begrenzung $\mathfrak{k}_n$ keinen der Punkte $z = z_{n+1}, z = z_{n+2}, \ldots$ enthält.

[15]) Für die vorangehende Diskussion über die Hilfssätze ist nur von Bedeutung, daß der Durchschnitt der Menge $\mathfrak{N}$ mit der Kreislinie $|z| = 2$ auf ihr nirgendsdicht ist, nicht aber, daß $\mathfrak{N}$ auch in der Ebene nirgendsdicht ist; diese zweite Eigenschaft wird jedoch in § 2 verwendet.

(Der Fall, daß der Punkt $z = z_n$ auf der Begrenzung von $\sum_{\nu=1}^{n-1} \mathfrak{K}_\nu$ liegt, kann nicht eintreten. Dies folgt zunächst für $n = 2$ aus der Vorschrift I, dann nacheinander für $n = 3, 4, \ldots$ aus der in Vorschrift IIb an die Begrenzungen gestellten Bedingung.)

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$ ist eine offene Teilmenge der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{R}}$ des Ringgebietes $\mathfrak{R}$. Daher ist

$$\mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{R}} - \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\overline{\mathfrak{R}}$, welche die Kreislinien $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_3$ enthält. Da die Menge $\mathfrak{N}$ die im Ringe $\mathfrak{R}$ und auf der Kreislinie $|z| = 2$ dichte Menge der Punkte $z = z_1, z = z_2, \ldots$ nicht enthält, ist sie nirgendsdicht im Ringe $\mathfrak{R}$ und ihr Durchschnitt mit der Kreislinie $|z| = 2$ ist auf dieser nirgendsdicht. Aus den Vorschriften I und II ergibt sich ferner daß $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{k}_n$ zu $\overline{\mathfrak{R}}$, aber nicht zu $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$ gehört und daß somit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{k}_n$ in $\mathfrak{N}$ enthalten ist. Wegen der Wahl der Radien der Kreisgebiete $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ ist die Gesamtlänge von $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{k}_n$ kleiner als π.

Nehmen wir nun an, es gebe eine solche rationale Funktion $R(z)$, daß

$$|R(z)| < 1, \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{N}, \text{ also insbesondere wenn } z \text{ in } \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{k}_n \text{ liegt,} \tag{1}$$

$$|R(z)| < \tfrac{1}{4} \quad \text{in} \quad \mathfrak{c}_1 \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{c}_1 \,, \tag{2}$$

$$|R(z) - 1| < \tfrac{1}{4} \quad \text{in} \quad \mathfrak{c}_3 \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{c}_3 \,. \tag{3}$$

Wegen (1) müssen die Pole von $R(z)$ außerhalb $\mathfrak{N}$ liegen. Ein Teil kann außerhalb des Ringes $\mathfrak{R}$ liegen; der andere Teil liegt in endlich vielen unter den Kreisgebieten $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots$ Nach dem Integralsatze von Cauchy ist also, alle Integrale in positivem Sinn erstreckt,

$$\int_{\mathfrak{c}_1} \frac{R(t)}{t}\, dt - \int_{\mathfrak{c}_3} \frac{R(t)}{t}\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{k}_n} \frac{R(t)}{t}\, dt = 0 \;.$$

Da

$$\int_{\mathfrak{c}_3} \frac{dt}{t} = 2\pi i$$

ist, so ist somit

$$\int_{\mathfrak{c}_1} \frac{R(t)}{t}\, dt - \int_{\mathfrak{c}_3} \frac{R(t) - 1}{t}\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{k}_n} \frac{R(t)}{t} = 2\pi i \;. \tag{4}$$

Nun folgt aber aus (2), daß

$$\left|\int_{\mathfrak{c}_1} \frac{R(t)}{t}\,dt\right| < \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} \tag{5}$$

und aus (3), daß

$$\left|\int_{\mathfrak{c}_3} \frac{R(t)-1}{t}\,dt\right| < \frac{\frac{1}{4}}{3}\cdot 6\pi = \frac{\pi}{2}\,. \tag{6}$$

Indem man die Ungleichung (1) benutzt und berücksichtigt, daß die Gesamtlänge von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{k}_n$ kleiner als π ist, ferner, daß jede der Kreislinien $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots$ vom Nullpunkte einen Abstand hat, der 1 übersteigt, erhält man weiter

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_{\mathfrak{k}_n} \frac{R(t)}{t}\,dt\right| < \pi\,. \tag{7}$$

Die Ungleichungen (5), (6) und (7) ergeben zusammen einen Widerspruch zur Gleichung (4), und damit ist die Existenz der rationalen Funktion $R(z)$ widerlegt.

§ 2. Gleichmäßige Annäherung stetiger Funktionen durch meromorphe Funktionen auf (beschränkten oder unbeschränkten) nirgendsdichten abgeschlossenen Mengen.

1. Wenn eine Funktion auf einer *beschränkten* Menge gleichmäßig angenähert werden kann durch meromorphe Funktionen, so können, wie leicht ersichtlich ist, als annähernde Funktionen *rationale* Funktionen genommen werden. Auf diesen Fall bezieht sich

Satz Ia: Auf jeder beschränkten abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$ vom Flächenmaß 0 kann jede dort stetige Funktion $f(z)$ gleichmäßig angenähert werden durch rationale Funktionen.

Dieser Satz wurde von *Hartogs* und *Rosenthal* aufgestellt und in einfacher, schöner Weise bewiesen[16]). Mit dem Hilfssatz 2a kann ein neuer Beweis gegeben werden; er wird nur deshalb nachfolgend dargestellt, weil die Anwendung des Hilfssatzes 2c zu einem allgemeineren Resultat führen wird, nämlich zum Satze I, aus dem der Hartogs-Rosenthalsche Satz durch Spezialisierung hervorgeht.

Man kann sich darauf beschränken, zu zeigen, daß die Funktion x auf der Menge $\mathfrak{M}$ durch rationale Funktionen gleichmäßig angenähert werden

[16]) Vgl. a. a. O. [4]c), S. 610.

kann, denn dann gilt dies auch für $y = i(x - z)$ und damit für jede stetige (reelle oder komplexe) Funktion von x und y, da eine solche nach dem Weierstraßschen Approximationssatze gleichmäßig durch Polynome von x und y angenähert werden kann[17]). Wir suchen also zu einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine rationale Funktion $R(z)$, für die auf $\mathfrak{M}$ $|R(z) - x| < \varepsilon$ gilt.

Es bedeutet keine Einschränkung, anzunehmen, die Menge $\mathfrak{M}$ sei im Quadrate $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ enthalten[18]). Mit n sei diejenige positive ganze Zahl bezeichnet, für welche $(n-1)\frac{\varepsilon}{3} < 1 \leqq n\frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Da die Menge $\mathfrak{M}$ vom Flächenmaß 0 ist, bilden diejenigen Parallelen zur imaginären Achse, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{M}$ das lineare Maß 0 hat, eine in der Ebene dichte Menge[19]). Deshalb gibt es für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ eine positive Zahl x_ν, für welche $(\nu - 1)\frac{\varepsilon}{3} < x_\nu < \nu\frac{\varepsilon}{3}$ gilt und welcher eine Gerade $x = x_\nu$ entspricht, deren Durchschnitt mit der Menge $\mathfrak{M}$ das lineare Maß 0 hat. Indem man die Gerade $x = x_\nu$ durch die Funktion $\zeta = i(z - x_\nu)$ auf die reelle Achse abbildet und dann auf die Bildmenge von $\mathfrak{M}$ den Hilfssatz 2a anwendet, ergibt sich die Existenz einer rationalen Funktion $R_\nu(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
|R_\nu(z)| &< 1, && \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}, \\
|R_\nu(z)| &< \frac{\varepsilon}{3}, && \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}, \quad x \leqq (\nu-1)\frac{\varepsilon}{3}, \\
|R_\nu(z) - 1| &< \frac{\varepsilon}{3}, && \text{wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}, \quad x \geqq \nu\frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Die gesuchte rationale Funktion ist

$$R(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varepsilon}{3} R_\nu(z) .$$

Wenn nämlich z in $\mathfrak{M}$ enthalten ist und $(k-1)\frac{\varepsilon}{3} \leqq x \leqq k\frac{\varepsilon}{3}$ ist, wobei k irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist, so gilt

---

[17]) Vgl. a. a. O. [4b]), S. 232.

[18]) Die folgende Beweisanordnung wurde bereits von Herrn Lavrentieff angewandt, um auf Grund seines schon unter [13]) genannten Hilfssatzes die sehr bemerkenswerte Tatsache zu beweisen, daß auf einer beschränkten Menge, welche die Ebene nicht zerlegt und die in ihr nirgendsdicht und abgeschlossen ist, jede dort stetige Funktion gleichmäßig angenähert werden kann durch Polynome.

[19]) Vgl. Enzyklopädie der math. Wissenschaften, II, C 9a (Zoretti-Rosenthal), S. 986. Entsprechendes gilt auch für eine Schar konzentrischer Kreise.

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} R_\nu(z)-(k-1)\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{k-1}|R_\nu(z)-1| + |R_k(z)| + \sum_{\nu=k+1}^{n}|R_\nu(z)|$$

$$< (k-1)\frac{\varepsilon}{3}+1+(n-k)\frac{\varepsilon}{3}=(n-1)\frac{\varepsilon}{3}+1<2$$

und somit

$$|R(z)-x| = \left|\frac{\varepsilon}{3}\sum_{\nu=1}^{n} R_\nu(z)-x\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3}\left|\sum_{\nu=1}^{n} R_\nu(z)-(k-1)\right| +$$

$$\left|(k-1)\frac{\varepsilon}{3}-x\right| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot 2+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\ . \quad {}^{20)}$$

2. *Satz I: Zu jeder (beschränkten oder unbeschränkten) abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$ vom Flächenmaß 0, zu jeder auf der Menge $\mathfrak{M}$ stetigen Funktion $f(z)$ und zu irgend einer für $0 \leqq r < \infty$ stetigen positiven Funktion $\varepsilon(r)$, für die $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$ sein darf, gibt es eine solche meromorphe Funktion $F(z)$, daß auf der Menge $\mathfrak{M}$*

$$|F(z)-f(z)| < \varepsilon(|z|)$$

gilt.

Es seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ positive Zahlen, für die $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$ und

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon(r) \text{ für } r \leqq n\ , \quad n = 1, 2, \ldots\ , \\ \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

gilt. Setzt man $\eta_{n-1} = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$, so sind $\eta_0, \eta_1, \ldots$ ebenfalls positive Zahlen und es ist

$$\sum_{\nu=n-1}^{\infty} \eta_\nu = \varepsilon_n\ , \quad n = 1\ , 2\ , \ldots\ . \tag{2}$$

Nach Satz Ia gibt es zu jeder positiven ganzen Zahl n eine rationale Funktion $R_n(z)$, für welche

$$|R_n(z) - f(z)| < \eta_n \tag{3}$$

[20]) Man kann mit Hilfssatz 2a die Funktion $f(z)$ auch direkt, ohne Benutzung des Satzes von Weierstraß, approximieren. Dazu teilt man ein Quadrat, das die Menge $\mathfrak{M}$ enthält, durch Parallelen zu den Seiten in so kleine Teilrechtecke ein, daß in jedem dieser Rechtecke die Funktion $f(z)$ durch eine Konstante angenähert werden kann. Die Parallelen werden außerdem so gewählt, daß ihre Durchschnitte mit der Menge $\mathfrak{M}$ das lineare Maß 0 haben. Durch Anwendung von Hilfssatz 2a nähert man die Funktion $f(z)$ zuerst auf jeder der Teilmengen, in welche $\mathfrak{M}$ durch die eine Parallelenschar zerschnitten wird, durch eine rationale Funktion an. Nachher werden, wieder auf Grund von Hilfssatz 2a, die zu diesen Teilmengen gehörigen rationalen Funktionen durch eine einzige rationale Funktion angenähert.

ist auf derjenigen Teilmenge $\mathfrak{M}_n$ von $\mathfrak{M}$, für die $(n-1) \leqq |z| \leqq n$ gilt. Es soll nun durch vollständige Induktion gezeigt werden, daß nacheinander rationale Funktionen $T_0(z), T_1(z), T_2(z), \ldots$ gefunden werden können, die folgenden Bedingungen genügen:

$$|T_n(z)| < \eta_{n-1} + \eta_n + \eta_{n+1} \quad \text{in} \quad \mathfrak{M}_n, \quad n = 1, 2, \ldots ; \tag{4}$$

$$|T_n(z)| < \eta_n \quad \text{für} \quad |z| \leqq n - 1 , \qquad n = 1, 2, \ldots ; \tag{5}$$

$$|\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu(z) - R_{n+1}(z)| = |T_n(z) - (R_{n+1}(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} T_\nu(z))| < \eta_n \quad \text{in} \quad \mathfrak{M}_{n+1} , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Angenommen, es gebe rationale Funktionen $T_0(z), T_1(z), \ldots, T_n(z)$, deren Summe $\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu(z)$ die Bedingung (6) erfüllt, so folgt zusammen mit Ungleichung (3), daß in der Durchschnittsmenge $\mathfrak{M}_{n+1} \cdot \mathfrak{M}_{n+2}$

$$|\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu(z) - R_{n+2}(z)| \leqq |\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu(z) - R_{n+1}(z)| + |R_{n+1}(z) - f(z)| + |f(z) - R_{n+2}(z)| < \eta_n + \eta_{n+1} + \eta_{n+2} \tag{7}$$

gilt. Da diese Ungleichung nicht nur für den Durchschnitt $\mathfrak{M}_{n+1} \cdot \mathfrak{M}_{n+2}$ der Menge $\mathfrak{M}$ mit der Kreislinie $|z| = n + 1$, sondern auch noch für eine gewisse Umgebung gilt, gibt es eine positive Zahl Δ derart, daß die Ungleichung (7) für alle im Kreisringe

$$(n + 1) - \Delta \leqq |z| \leqq n + 1 \tag{8}$$

liegenden Punkte von $\mathfrak{M}$ besteht. Weil die Menge $\mathfrak{M}$ das Flächenmaß 0 hat, liegen diejenigen unter den Kreislinien um den Punkt $z = 0$, deren Durchschnitt mit der Menge $\mathfrak{M}$ das lineare Maß 0 hat, in der Ebene dicht[19]). Insbesondere gibt es somit eine positive Zahl δ, die kleiner als $\frac{1}{2}\Delta$ und kleiner als $\frac{1}{2}$ ist und der eine Kreislinie $|z| = (n + 1) - \delta$ entspricht, deren Durchschnitt mit der Menge $\mathfrak{M}$ das lineare Maß 0 hat. Da der Kreisring

$$(n + 1) - 2\,\delta \leqq |z| \leqq n + 1 \tag{9}$$

im Kreisringe (8) enthalten ist, gilt auf der Durchschnittsmenge der Menge $\mathfrak{M}$ mit dem Kreisringe (9) die Ungleichung (7). Wendet man den Hilfssatz 2c an, indem man für die dort vorkommende rationale Funktion $S(z)$ die Funktion $R_{n+2}(z) - \sum_{\nu=0}^{n} T(z)$ nimmt und indem man den dortigen

Note [19]) siehe S. 99.

Radius ϱ durch $(n+1)-\delta$ ersetzt, so ergibt sich die Existenz einer rationalen Funktion $T_{n+1}(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$|T_{n+1}(z)| < \eta_n + \eta_{n+1} + \eta_{n+2}, \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{M},\ |z| \leqq n+1, \text{ also insbesondere in } \mathfrak{M}_{n+1},$$

$$|T_{n+1}(z)| < \eta_{n+1} \quad \text{für} \quad |z| \leqq (n+1) - 2\,\delta, \quad \text{insbesondere für } |z| \leqq n,$$

$$|T_{n+1}(z) - (R_{n+2}(z) - \sum_{\nu=0}^{n} T_\nu(z))| < \eta_{n+1} \quad \text{in} \quad \mathfrak{M}_{n+2}.$$

Wenn also rationale Funktionen $T_0(z), T_1(z), \ldots, T_n(z)$ existieren, deren Summe die Bedingung (6) erfüllt, so gibt es eine weitere rationale Funktion $T_{n+1}(z)$, welche die Bedingungen, die aus (4), (5) und (6) durch die Ersetzung von n durch $n+1$ entstehen, erfüllen. Setzen wir nun

$$T_0(z) = R_1(z),$$

so ist

$$|T_0(z) - R_1(z)| = 0 < \eta_0,$$

d. h., die Bedingung (6) ist für $n = 0$ erfüllt, und somit folgt nacheinander die Existenz der rationalen Funktionen $T_1(z), T_2(z), \ldots$, welche den Bedingungen (4), (5) und (6) genügen.

Ist k irgend eine positive ganze Zahl, so konvergiert $\sum_{\nu=k}^{\infty} T_{\nu+1}(z)$ gleichmäßig im Kreisbereich $|z| \leqq k$, denn wegen (5) und (2) ist

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} |T_{\nu+1}(z)| < \sum_{\nu=k}^{\infty} \eta_{\nu+1} = \varepsilon_{k+2} \quad \text{für} \quad |z| \leqq k,$$

und gemäß (1) ist $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_{k+2} = 0$. Somit ist

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu(z)$$

eine meromorphe Funktion. Aus (6), (4) und (5) folgt, daß in $\mathfrak{M}_k$

$$|F(z) - R_k(z)| \leqq |\sum_{\nu=0}^{k-1} T_\nu(z) - R_k(z)| + |T_k(z)| + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} |T_\nu(z)|$$
$$< \eta_{k-1} + (\eta_{k-1} + \eta_k + \eta_{k+1}) + \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \eta_\nu.$$

Indem man damit (3), (2) und (1) verbindet, ergibt sich weiter, daß in $\mathfrak{M}_k$

$$|F(z) - f(z)| \leqq |F(z) - R_k(z)| + |R_k(z) - f(z)| < 2 \sum_{\nu=k-1}^{\infty} \eta_\nu = 2\,\varepsilon_k < \varepsilon(|z|).$$

Da k eine beliebige positive Zahl ist, so gilt somit auf der ganzen Menge $\mathfrak{M} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k$

$$|F(z) - f(z)| < \varepsilon(|z|).$$

3. Würde man in Satz I a und in Satz I die Voraussetzung, daß die Menge $\mathfrak{M}$ abgeschlossen sei und das Flächenmaß 0 habe, durch die schwächere Voraussetzung, daß $\mathfrak{M}$ eine in der Ebene nirgendsdichte abgeschlossene Menge sei, ersetzen, so würden zwei falsche Sätze entstehen; denn: *Auf der beschränkten in der Ebene nirgendsdichten abgeschlossenen Menge $\mathfrak{N}$ von Hilfssatz 4 kann nicht jede dort stetige Funktion gleichmäßig durch rationale Funktionen (und somit, da $\mathfrak{N}$ beschränkt ist, auch nicht durch meromorphe Funktionen) angenähert werden.* Eine solche stetige Funktion ist z. B. $\frac{4}{9}(|z| - 1)$, wie Hilfssatz 4 zeigt.

4. Doch braucht andererseits eine abgeschlossene Menge, auf der jede dort stetige Funktion gleichmäßig durch meromorphe Funktionen angenähert werden kann, nicht notwendigerweise vom Flächenmaße 0 zu sein. Für den Fall beschränkter Mengen zeigen dies Sätze von Hartogs[21]) und Lavrentieff[22]). Daß es unbeschränkte Mengen mit positivem Flächenmaß gibt, auf denen jede dort stetige Funktion gleichmäßig durch meromorphe Funktionen angenähert werden kann, wird durch den folgenden Satz II belegt.

Satz II: Zu jeder in der Ebene nirgendsdichten abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$, welche als Summe von Strahlen, die entweder vom Nullpunkte ausgehen oder Teile solcher vom Nullpunkte ausgehender Strahlen sind, aufgefaßt werden kann, zu jeder auf $\mathfrak{M}$ stetigen Funktion $f(z)$ und zu irgend einer für $0 \leqq r < \infty$ stetigen positiven Funktion $\varepsilon(r)$, für die $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$ sein darf, gibt es eine solche ganze Funktion $G(z)$, daß auf der Menge $\mathfrak{M}$

$$|G(z) - f(z)| < \varepsilon(|z|)$$

gilt.

Der Beweis ist demjenigen von Satz I ähnlich, jedoch wird jetzt der Hilfssatz 3c benutzt. Die positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ und $\eta_1, \eta_2, \ldots$ seien wie im Abschnitt 2 dieses Paragraphen gewählt, sollen also den Bedingungen (1) und (2) genügen. Aus den über die Menge $\mathfrak{M}$ gemachten Voraussetzungen folgt leicht, daß der Durchschnitt $\mathfrak{M}_n$ der Menge $\mathfrak{M}$ mit dem Kreisringe $n - 1 \leqq |z| \leqq n$ abgeschlossen ist und daß jede Komponente[23]) von $\mathfrak{M}_n$ entweder ein Punkt oder eine Strecke ist. Nach dem Approximationssatze von Weierstraß kann die Funktion $f(z)$ auf jeder dieser Komponenten durch Polynome von z gleichmäßig angenähert werden. Daraus folgt, daß die Funktion $f(z)$ auch auf der ganzen Menge

---

[21]) Vgl. a. a. O. [4a]), § 1.

[22]) Vgl. a. a. O. [5b]), S. 25.

[23]) Komponente: zusammenhängende Teilmenge, die in keiner größeren zusammenhängenden Teilmenge enthalten ist.

$\mathfrak{M}_n$ gleichmäßig angenähert werden kann durch Polynome[24]). Es gibt also ein Polynom $R_n(z)$, welches auf der Menge $\mathfrak{M}_n$ die Bedingung (3) erfüllt. Angenommen, es gebe Polynome $T_0(z), T_1(z), \ldots, T_n(z)$, für deren Summe $\sum\limits_{\nu=0}^{n} T_\nu(z)$ die Bedingung (6) erfüllt ist, so besteht wiederum für den Durchschnitt $\mathfrak{M}_{n+1} \cdot \mathfrak{M}_{n+2}$ der Menge $\mathfrak{M}$ mit der Kreislinie $|z| = n + 1$ die Ungleichung (7). Sei δ, $\delta < \frac{1}{2}$, eine so kleine positive Zahl, daß diese Ungleichung auch noch für den Durchschnitt der Menge $\mathfrak{M}$ mit dem Kreisring (9) gilt. Es ist leicht einzusehen, daß die Menge $\sum\limits_{\nu=1}^{n+2} \mathfrak{M}_\nu$ das Äußere der Kreislinie $|z| = (n+1) - \delta$ nicht zerlegt und daß sie mit dieser Kreislinie einen auf ihr nirgendsdichten Durchschnitt hat. Nach Hilfssatz 3c gibt es ein Polynom $T_{n+1}(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$|T_{n+1}(z)| < \eta_n + \eta_{n+1} + \eta_{n+2}, \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{M},\ |z| \leqq n+1, \text{ also insbesondere in } \mathfrak{M}_{n+1},$$

$$|T_{n+1}(z)| < \eta_{n+1} \text{ für } |z| \leqq (n+1) - 2\delta, \text{ erst recht für } |z| \leqq n,$$

$$\left|T_{n+1}(z) - \left(R_{n+2}(z) - \sum_{\nu=0}^{n} T_\nu(z)\right)\right| < \eta_{n+1}, \text{ wenn } z \text{ in } \mathfrak{M}_{n+2}.$$

Wenn also Polynome $T_0(z), T_1(z), \ldots, T_n(z)$ existieren, deren Summe die Bedingung (6) erfüllt, so gibt es ein weiteres Polynom $T_{n+1}(z)$, welches die Bedingungen, die aus (4), (5) und (6) durch die Ersetzung von n durch $n+1$ entstehen, erfüllt. Setzt man wiederum $T_0(z) = R_1(z)$, so erfüllt dieses Polynom die Bedingung (6) für $n = 0$, und so folgt nacheinander die Existenz von Polynomen $T_1(z), T_2(z), \ldots$, die den Bedingungen (4), (5) und (6) genügen. Ganz gleich wie beim Beweise von Satz I zeigt man, daß

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} |T_{\nu+1}(z)| < \varepsilon_{k+2} \qquad \text{für} \qquad |z| \leqq k$$

und daß in $\mathfrak{M}$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu(z) - f(z)\right| < \varepsilon(|z|)$$

gilt. Da die Funktionen $T_\nu(z)$ jetzt Polynome sind, ist

$$G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu(z)$$

eine ganze Funktion.

[24]) *F. Hartogs* und *A. Rosenthal* (a. a. O. [4b]), S. 233—234) haben nämlich mit einem einfachen Überdeckungsverfahren bewiesen, daß wenn eine Funktion auf jeder Komponente einer beschränkten abgeschlossenen Menge gleichmäßig durch Polynome angenähert werden kann, dies auch auf der ganzen Menge möglich ist.

Anmerkung: Dieser Beweis kann übernommen werden zum Beweise eines Satzes, der etwas allgemeiner ist als Satz II. Man darf nämlich in Satz II die Menge $\mathfrak{M}$ ersetzen durch irgend eine in der Ebene nirgendsdichte abgeschlossene Menge, bei der jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge, welche mehr als einen Punkt enthält und zusammenhängend ist, eine Strecke ist; denn nur diese Eigenschaft der Menge $\mathfrak{M}$ spielte beim Beweise eine Rolle.

§ 3. Gleichmäßige Annäherung analytischer Funktionen durch meromorphe Funktionen auf abgeschlossenen Punktmengen, die unbeschränkt sein und innere Punkte enthalten dürfen.

1. *Satz III: Es sei vorgelegt*

1. *eine Folge von paarweise fremden (beschränkten oder unbeschränkten) Gebieten $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$, die sich nicht im Endlichen häufen*[25]*), und eine Folge von abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$, wobei jede Menge $\mathfrak{M}_n$ im entsprechenden Gebiete $\mathfrak{G}_n$ enthalten ist;*
2. *eine Folge von analytischen Funktionen $f_1(z), f_2(z), \ldots$ derart, daß jede Funktion $f_n(z)$ im entsprechenden Gebiete $\mathfrak{G}_n$ regulär und eindeutig ist;*
3. *eine positive Zahl ε.*

Dann gibt es eine meromorphe Funktion $F(z)$, für welche

$$|F(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

auf $\mathfrak{M}_n$ und

$$\lim_{z \to \infty} [F(z) - f_n(z)] = 0$$

gleichmäßig auf $\mathfrak{M}_n$ gilt, $n = 1, 2, \ldots$.

Mit bekannten Methoden kann eine solche Folge von paarweise fremden Bereichen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$, die sich nicht im Endlichen häufen, gewählt werden, daß a) der Bereich $\mathfrak{B}_n$ im Gebiete $\mathfrak{G}_n$ enthalten ist, b) die Menge $\mathfrak{M}_n$ im Innern von $\mathfrak{B}_n$ enthalten ist und c) jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge des Randes $\mathfrak{b}_n$ von $\mathfrak{B}_n$ aus endlich vielen Strecken besteht. Der Durchschnitt von $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{b}_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$ ist leer, denn wegen Bedingung b) ist $\mathfrak{b}_n \cdot \mathfrak{M}_n = 0$ und für $k \neq n$ sind die Bereiche $\mathfrak{B}_k$ und $\mathfrak{B}_n$ und also auch die in ihnen enthaltenen Mengen $\mathfrak{b}_k$ und $\mathfrak{M}_n$ fremd.

[25]) Die Aussage: eine Folge von Mengen häuft sich nicht im Endlichen, soll bedeuten, daß irgend ein Kreisbereich nur mit endlich vielen unter diesen Mengen einen nicht leeren Durchschnitt hat.

Zudem sind die Summen $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{b}_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$ abgeschlossene Mengen, denn die Summanden sind abgeschlossen und häufen sich nicht im Endlichen. Somit hat jede beschränkte Teilmenge von $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{b}_n$ einen positiven Abstand von $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$. Bezeichnen wir diejenige Teilmenge der Rändersumme $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{b}_n$, für welche $\nu - 1 \leqq |z| \leqq \nu$ ist, mit $\mathfrak{p}_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so hat also $\mathfrak{p}_\nu$ einen positiven Abstand δ_ν von $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$. Da nur endlich viele unter den Bereichen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots$ mit dem Ringe $\nu - 1 \leqq |z| \leqq \nu$ einen nicht leeren Durchschnitt haben und da der in diesem Ringe enthaltene Teil irgend eines Randes $\mathfrak{b}_n$ aus endlich vielen Strecken besteht, setzt sich $\mathfrak{p}_\nu$ aus endlich vielen Strecken zusammen. $\mathfrak{p}_\nu$ hat also eine endliche Länge l_ν.

Zu den positiven Zahlen δ_ν und den nicht negativen reellen Zahlen l_ν bestimmen wir eine Folge von so kleinen positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu \cdot l_\nu}{\delta_\nu} < 2\pi\varepsilon \tag{1}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu l_\nu < 1 \quad . \tag{2}$$

Weil der Rand $\mathfrak{b}_n$ im Gebiete $\mathfrak{G}_n$ liegt, ist die Funktion $f_n(z)$ auf $\mathfrak{b}_n$ regulär und eindeutig. Da außerdem die Ränder $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots$ paarweise fremd sind und da sie sich nicht im Endlichen häufen, wird durch die Festsetzung

$$f(z) = f_n(z) \quad \text{auf} \quad \mathfrak{b}_n\,, \quad n = 1, 2, \ldots \quad ,$$

eine auf $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{b}_n$ stetige Funktion $f(z)$ definiert. Da $\mathfrak{p}_\nu$ aus endlich vielen Strecken besteht, hat $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{b}_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{p}_\nu$ das Flächenmaß 0. Nach Satz I gibt es eine meromorphe Funktion $F_1(z)$, für welche

$$|F_1(z) - f(z)| < \varepsilon_\nu \quad \text{auf} \quad \mathfrak{p}_\nu\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots\,. \tag{3}$$

Diese meromorphe Funktion $F_1(z)$ nähert also auf dem Rande $\mathfrak{b}_n$ des Bereiches $\mathfrak{B}_n$ die Funktion $f_n(z)$ an; hingegen ist es nicht gesagt, daß dies auch im Innern von $\mathfrak{B}_n$ gilt. Doch gelingt es durch Bildung gewisser Integrale, aus dieser Funktion $F_1(z)$ die gesuchte Funktion $F(z)$ zu gewinnen[26]). Bei den folgenden Integralen soll jeder vorkommende Teil

[26]) Die Anregung zur Verwendung dieses Kunstgriffes verdanke ich Herrn Prof. Pólya. Vgl. a. a. O. [7]), Bd. 1, Abschnitt III, Nr. 158, S. 115 und S. 288, wo die Konstruktion der Mittag-Lefflerschen $E(z)$-Funktion dargestellt ist.

eines Randes $\mathfrak{b}_n$ in solchem Sinne durchlaufen werden, daß dabei der Bereich $\mathfrak{B}_n$ zur Linken liegt.

Ist $\mathfrak{A}$ irgend ein Bereich, der von der Rändersumme $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\mathfrak{p}_\nu$ einen positiven Abstand Δ hat, so stellt, gemäß einem bekannten Zusatz zur Integralformel von Cauchy, das Integral

$$I_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{p}_\nu}\frac{F_1(t) - f(t)}{t - z}\,dt$$

eine in $\mathfrak{A}$ reguläre analytische Funktion dar. Wegen (3) ist

$$|\, I_\nu(z)\,| < \frac{\varepsilon_\nu l_\nu}{2\pi\Delta}$$

im Bereiche $\mathfrak{A}$. Hieraus folgt zusammen mit (2), daß $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|I_\nu(z)|$ im Bereiche $\mathfrak{A}$ gleichmäßig konvergiert. Das über den gesamten Rand $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\mathfrak{p}_\nu = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{b}_n$ erstreckte Integral

$$I(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} I_\nu(z)$$

stellt also im Bereiche $\mathfrak{A}$ eine dort reguläre analytische Funktion dar.

Da $|t - z| > \delta_\nu$, wenn z in $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n$ und t in $\mathfrak{p}_\nu$ enthalten ist, so haben die Festsetzungen (3) und (1) zur Folge, daß

$$|\, I(z)\,| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty}|\, I_\nu(z)\,| < \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu l_\nu}{2\pi\delta_\nu} < \varepsilon \text{ in } \sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n\ . \tag{4}$$

Außerdem strebt $I(z)$ in $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}_n$ gleichmäßig gegen 0, wenn $z \to \infty$. Zu einer beliebig kleinen positiven Zahl η kann nämlich eine so große positive Zahl N gewählt werden, daß

$$\sum_{\nu=N}^{\infty}\frac{\varepsilon_\nu l_\nu}{2\pi\delta_\nu} < \frac{1}{2}\eta$$

ist, und außerdem kann ein so großer Radius R gewählt werden, daß für $|z| > R$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{N-1} I_\nu(z)\right| < \frac{1}{2}\eta$$

gilt, denn jeder der endlich vielen Summanden strebt in der ganzen

Ebene gleichmäßig gegen 0, wenn $z \to \infty$. Für diejenige Teilmenge von $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$, für die $|z| > R$ ist, gilt also

$$|I(z)| \leqq \left| \sum_{\nu=1}^{N-1} I_\nu(z) \right| + \left| \sum_{\nu=N}^{\infty} I_\nu(z) \right| < \frac{1}{2}\eta + \sum_{\nu=N}^{\infty} \frac{\varepsilon_\nu l_\nu}{2\pi\delta_\nu} < \eta \ .$$

Da zu einer beliebig kleinen positiven Zahl η ein solcher Radius R existiert, ist somit

$$\lim_{z \to \infty} I(z) = 0 \quad \text{gleichmäßig auf} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n \ . \tag{5}$$

Das Integral $I(z)$ stellt insbesondere in jedem der Gebiete, aus denen sich das Komplement von $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ zusammensetzt, eine dort reguläre analytische Funktion dar. Es soll gezeigt werden, daß durch analytische Fortsetzung dieser Funktionen eine einzige meromorphe Funktion $F_2(z)$ entsteht. Dazu wählt man einen Punkt $z = z_0$ auf dem Rande $\mathfrak{b}_n$ des Bereiches $\mathfrak{B}_n$ und ein so kleines Kreisgebiet $\mathfrak{K}$ um diesen Punkt, daß sein Durchschnitt mit $\mathfrak{b}_n$ aus einem einzigen Streckenzug $\mathfrak{r}$ besteht. Das Kreisgebiet $\mathfrak{K}$ wird durch $\mathfrak{r}$ in zwei Teilgebiete zerschnitten; das eine, $\mathfrak{K}_1$, gehört zur Komplementärmenge von $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$; das andere, $\mathfrak{K}_2$, ist eine Teilmenge vom Bereich $\mathfrak{B}_n$. Die Begrenzung von $\mathfrak{K}_2$ besteht aus dem Streckenzug $\mathfrak{r}$ und aus einem Bogen $\mathfrak{k}$ der Peripherie von $\mathfrak{K}$. Da $\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{b}_n$ gehört, ist $f(z) = f_n(z)$ auf $\mathfrak{r}$. Für $z = z_0$ ist sowohl die Funktion $f_n(z)$, wie die annähernde Funktion $F_1(z)$ regulär und deshalb darf angenommen werden, daß das Kreisgebiet $\mathfrak{K}$ so klein sei, daß beide Funktionen auch noch in ihm und auf seinem Rande regulär und eindeutig sind. Nach dem Integralsatze von Cauchy ist in $\mathfrak{K}_1$

$$\int_{\mathfrak{r}} \frac{F_1(t) - f_n(t)}{t - z}\, dt = -\int_{\mathfrak{k}} \frac{F_1(t) - f_n(t)}{t - z}\, dt \ ,$$

wenn bei der Bildung dieser Integrale die Kurven $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{k}$ so durchlaufen werden, daß das Gebiet $\mathfrak{K}_2$ links liegt. Ist also $F_2(z)$ die analytische Funktion, die im Gebiete $\mathfrak{K}_1$ durch das Integral $I(z)$ dargestellt wird, so ist in $\mathfrak{K}_1$

$$F_2(z) = \left[I(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{r}} \frac{F_1(t) - f_n(t)}{t - z}\, dt \right] - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{k}} \frac{F_1(t) - f_n(t)}{t - z}\, dt. \tag{6}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt aber nicht nur im Gebiete $\mathfrak{K}_1$, sondern im ganzen Kreisgebiet $\mathfrak{K}$ eine dort reguläre analytische Funktion dar. Also kann die Funktion $F_2(z)$ durch die Gleichung (6) auf den Randteil $\mathfrak{r}$ und die innere Teilmenge $\mathfrak{K}_2$ des Bereiches $\mathfrak{B}_n$ fortgesetzt werden. Im Gebiete $\mathfrak{K}_2$ ist jedoch nach der Integralformel von Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{r}+\mathfrak{k}} \frac{F_1(t)-f_n(t)}{t-z}\,dt = F_1(z)-f_n(z)$$

und somit

$$F_2(z) = I(z) - F_1(z) + f_n(z)\ . \tag{7}$$

Da im ganzen Innern des Bereiches $\mathfrak{B}_n$ durch $I(z)$ dieselbe analytische Funktion dargestellt wird und da dort die Funktionen $F_1(z)$ und $f_n(z)$ bis auf Pole regulär sind, wird die Funktion $F_2(z)$ durch die Gleichung (7) auf das ganze Innere von $\mathfrak{B}_n$ fortgesetzt und ist dort bis auf Pole regulär.

Im Vorangehenden spielte es keine Rolle, um welchen Randpunkt $z = z_0$ das Kreisgebiet $\mathfrak{K}$ gelegt wurde, also auch nicht, von welchem Gebiet der Komplementärmenge von $\mathfrak{B}_n$ man ausging und über welchen Teil des Randes $\mathfrak{b}_n$ die analytische Fortsetzung der in jenem Gebiete durch $I(z)$ dargestellten Funktion erfolgte. Da diese Überlegungen für $n = 1, 2, \ldots$ gelten, kann also die Funktion $F_2(z)$, die in irgend einem Teilgebiet des Komplementes von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$ durch das Integral $I(z)$ dargestellt wird, auf die ganze Ebene fortgesetzt werden, ist dort bis auf Pole regulär und genügt im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}_n$, also insbesondere auf der Menge $\mathfrak{M}_n$, der Gleichung (7). Die meromorphe Funktion

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z)$$

hat die geforderten Eigenschaften, denn da auf $\mathfrak{M}_n$

$$F(z) = I(z) + f_n(z)$$

ist, so folgt aus Ungleichung (4), daß auf $\mathfrak{M}_n$

$$|F(z) - f_n(z)| < \varepsilon \tag{8}$$

ist und aus (5), daß

$$\lim_{z\to\infty} [F(z) - f_n(z)] = 0$$

gleichmäßig auf $\mathfrak{M}_n$ gilt, $n = 1, 2, \ldots$[27]).

---

[27]) Dieser Beweis muß nur wenig geändert werden, um zu zeigen, daß in Satz III für jede Funktion $f_n(z)$ eine im Gebiete $\mathfrak{G}_n$ eindeutige und bis auf Pole reguläre Funktion genommen werden darf.

2. Abkürzungshalber möge von einer offenen Menge $\mathfrak{O}$ gesagt werden, sie habe die *Eigenschaft E*, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt: 1. alle Komponenten[23]) von $\mathfrak{O}$ sind unbeschränkt; 2. zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}$ des unendlich fernen Punktes gibt es eine solche in $\mathfrak{U}$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{V}$ des unendlich fernen Punktes, daß von jedem Punkt von $\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{V}$ ein in $\mathfrak{O} \cdot \mathfrak{U}$ liegender, stetig ins Unendliche führender Streckenzug ausgeht.

Zusatz zu Satz III: Wenn die in Satz III vorkommenden Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ *speziell noch so beschaffen sind, daß die Komplementärmenge von* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$ *die Eigenschaft E hat, so kann für die Annäherungsfunktion* $F(z)$ *eine ganze Funktion genommen werden*[28]) [29]).

Um diesen Zusatz zu beweisen, könnte man zeigen, daß bei diesen speziellen Voraussetzungen bereits für die beim Beweis von Satz III benutzte Hilfsfunktion $F_1(z)$ eine ganze Funktion eintreten kann. Jedoch kann auch so vorgegangen werden, daß man zunächst die meromorphe Funktion $F(z)$, wie es beim Beweise von Satz III geschildert wurde, konstruiert und dann nachträglich ihre Pole wegräumt. Die Pole von $F(z)$ befinden sich, da auf $\mathfrak{M}_n$ die Ungleichung (8) gilt und da $f_n(z)$ dort regulär ist, außerhalb der abgeschlossenen Menge $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n$. So kann der Zusatz offenbar zurückgeführt werden auf den folgenden

Hilfssatz 5: Ist $\mathfrak{M}$ *eine (beschränkte oder unbeschränkte) abgeschlossene Menge, deren Komplement die Eigenschaft E hat, so gibt es zu jeder meromorphen Funktion* $F(z)$, *deren Pole außerhalb* $\mathfrak{M}$ *liegen und zu einer beliebig kleinen positiven Zahl* ε *eine ganze Funktion* $G(z)$, *für welche*

$$|G(z) - F(z)| < \varepsilon \quad \text{auf} \quad \mathfrak{M},$$
$$\lim_{z \to \infty} [G(z) - F(z)] = 0 \quad \text{gleichmäßig auf} \quad \mathfrak{M}.$$

Note [23]) s. S. 103.

[28]) Irrtümlicherweise fehlt in der a. a. O. [10]) zitierten C. R.-Note im Théorème IV, das von einer solchen Approximation durch ganze Funktionen handelt, die notwendige Voraussetzung, daß die dortigen Bereiche $D_1, D_2, \ldots$ sich nicht im Endlichen häufen.

[29]) Es gilt auch der folgende Zusatz zu Satz III: F a l l s j e d e s d e r i n S a t z III v o r k o m m e n d e n G e b i e t e $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots$ e i n f a c h z u s a m m e n h ä n g e n d i s t u n d k e i n e s e i n e U m g e b u n g d e s u n e n d l i c h f e r n e n P u n k t e s e n t h ä l t, k a n n f ü r d i e A n n ä h e r u n g s f u n k t i o n $F(z)$ e i n e g a n z e F u n k t i o n g e n o m m e n w e r d e n. Man kann diesen Zusatz auf den obenstehenden zurückführen, indem man zeigt, daß unter diesen Voraussetzungen in jedem Gebiete $\mathfrak{G}_n$ eine solche die Menge $\mathfrak{M}_n$ enthaltende abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{N}_n$ gewählt werden kann, daß die Komplementärmenge von $\Sigma\,\mathfrak{N}_n$ die Eigenschaft E hat. (Man nehme für $\mathfrak{N}_n$ z. B. einen einfachzusammenhängenden Bereich, dessen Rand sich aus Strecken zusammensetzt, die sich nicht im Endlichen häufen.)

Diese Möglichkeit, eine meromorphe Funktion auf einer gewissen Menge durch eine ganze Funktion anzunähern, ist von *H. Bohr* an einem speziellen Beispiel dargestellt worden[30]). Die dort verwendete allgemeine Konstruktionsmethode enthält alles Wesentliche des nachfolgend skizzierten Beweises von Hilfssatz 5. Zunächst einige vorbereitende Bemerkungen:

a) Da die Pole $z = p_1, z = p_2, \ldots$ von $F(z)$ im Komplement von $\mathfrak{M}$ liegen und da sie sich nicht im Endlichen häufen, folgt aus der Eigenschaft E des Komplementes von $\mathfrak{M}$: von jedem Pole $z = p_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ aus gibt es einen außerhalb der Menge $\mathfrak{M}$ stetig ins Unendliche führenden Streckenzug $\mathfrak{f}_\nu$, und zwar können die Streckenzüge $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots$ so gewählt werden, daß sie sich nicht im Endlichen häufen.

b) Auf jedem Streckenzug $\mathfrak{f}_\nu$ kann eine Folge von Punkten $z = p_{\nu 1}$, $z = p_{\nu 2}, \ldots$ so gewählt werden, daß das zwischen dem Punkte $z = p_{\nu n}$ und dem unendlich fernen Punkte liegende Teilstück von $\mathfrak{f}_\nu$ außerhalb der durch $|z| \leqq n$ definierten Kreisscheibe $\mathfrak{K}_n$ liegt, $n = 1, 2, \ldots$.

c) Sei $H_1(z)$ eine meromorphe Funktion, $z = z_1$ ein außerhalb $\mathfrak{M}$ liegender Pol von $H_1(z)$,

$$H_1(z) = P_1\left(\frac{1}{z - z_1}\right) + K(z) \quad ,$$

wo $P_1(\zeta)$ ein Polynom von ζ ohne konstantes Glied und $K(z)$ eine meromorphe Funktion ist, die für $z = z_1$ regulär ist. Ist $z = z_2$ ein ebenfalls außerhalb $\mathfrak{M}$ liegender Punkt, der mit dem Punkte $z = z_1$ durch einen $\mathfrak{M}$ nicht treffenden Streckenzug verbunden werden kann, so gibt es nach Runge zu einer beliebig positiven Zahl η ein solches Polynom $P_2(\zeta)$ von ζ ohne konstantes Glied, daß

$$\left| P_2\left(\frac{1}{z - z_2}\right) - P_1\left(\frac{1}{z - z_1}\right) \right| < \eta$$

gilt, wenn z in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Die meromorphe Funktion

$$H_2(z) = P_2\left(\frac{1}{z - z_2}\right) + K(z)$$

hat für $z = z_1$ keinen Pol, dafür aber für $z = z_2$; alle übrigen Pole liegen an denselben Stellen wie die Pole von $H_1(z)$. In $\mathfrak{M}$ ist

$$|H_2(z) - H_1(z)| < \eta \quad ,$$

und für die ganze Ebene gilt gleichmäßig

$$\lim_{z \to \infty} [H_2(z) - H_1(z)] = 0 \quad .$$

---

[30]) *H. Bohr*, Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften, phys. math. Klasse, 1929, XXVI.

Sei nun $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Folge positiver Zahlen, für die $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$ ist; $\mathfrak{K}_n$ sei die Kreisscheibe $|z| \leqq n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $\mathfrak{K}_0$ sei die leere Menge; ferner sei $F_0(z) = F(z)$ gesetzt. Durch wiederholte Anwendung der vorangehenden Überlegungen a), b) und c) gelingt es leicht, nacheinander die Existenz meromorpher Funktionen $F_1(z), F_2(z), \ldots$ mit folgenden Eigenschaften einzusehen:

1. $|F_n(z) - F_{n-1}(z)| < \varepsilon_n$ auf $\mathfrak{M} + \mathfrak{K}_{n-1}$;
2. $\lim\limits_{z=\infty} [F_n(z) - F_{n-1}(z)] = 0$ gleichmäßig für die ganze Ebene;
3. die Pole von $F_n(z)$ liegen außerhalb $\mathfrak{M} + \mathfrak{K}_n$ und zwar so, daß von jedem dieser Pole aus ein stetig ins Unendliche führender Streckenzug ausgeht, der außerhalb $\mathfrak{M} + \mathfrak{K}_n$ liegt; $n = 1, 2, \ldots$.

Die Folge der meromorphen Funktionen $F_1(z), F_2(z), \ldots$ konvergiert in jedem beschränkten Bereiche gleichmäßig, denn für irgend zwei positive ganze Zahlen n und k gilt im Kreisbereich $\mathfrak{K}_n$

$$|F_{n+k}(z) - F_n(z)| = \left| \sum_{\nu=n+1}^{n+k} (F_\nu(z) - F_{\nu-1}(z)) \right| < \sum_{\nu=n+1}^{n+k} \varepsilon_\nu < \varepsilon .$$

Die Grenzfunktion

$$G(z) = \lim_{k \to \infty} F_{n+k}(z) = F_n(z) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (F_\nu(z) - F_{\nu-1}(z))$$

ist in $\mathfrak{K}_n$ regulär, da die Funktionen $F_n(z), F_{n+1}(z), \ldots$ in $\mathfrak{K}_n$ regulär sind. Weil dies für beliebig große Werte von n gilt, ist $G(z)$ eine ganze Funktion. Auf der Menge $\mathfrak{M}$ ist

$$|G(z) - F(z)| = |G(z) - F_0(z)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (F_n(z) - F_{n-1}(z)) \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon .$$

Zudem strebt $G(z) - F(z)$ auf der Menge $\mathfrak{M}$ gleichmäßig gegen 0, wenn $z \to \infty$. Zu einer beliebig kleinen positiven Zahl η gibt es nämlich eine so große positive Zahl N, daß $\sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n < \frac{1}{2}\eta$ ist; ferner gibt es einen so großen Radius R, daß für $|z| > R$

$$\sum_{n=1}^{N-1} |F_n(z) - F_{n-1}(z)| < \tfrac{1}{2}\eta$$

ist, denn jeder der endlich vielen Summanden strebt in der ganzen Ebene gleichmäßig gegen 0, wenn $z \to \infty$. Also ist

$$|G(z) - F(z)| \leqq \sum_{n=1}^{N-1} |F_n(z) - F_{n-1}(z)| + \sum_{n=N}^{\infty} |F_n(z) - F_{n-1}(z)| < \tfrac{1}{2}\eta + \sum_{n=N}^{\infty} \varepsilon_n < \eta ,$$

wenn z in $\mathfrak{M}$ liegt und $|z| > R$ ist. Die ganze Funktion $G(z)$ hat also die im Hilfssatz 5 angegebenen Eigenschaften.

§ 4. Meromorphe Funktionen mit Strahlengrenzwerten.

1. $F(z) = F(re^{i\varphi})$ sei eine meromorphe Funktion, die auf jedem vom Nullpunkte ausgehenden Strahl gegen einen endlichen Grenzwert oder gegen den Grenzwert ∞ strebt, wenn $r = |z|$ gegen ∞ strebt. Für eine solche Funktion ist also der *Strahlengrenzwert*

$$f(\varphi) = \lim_{r \to \infty} F(re^{i\varphi})$$

eine für jeden Punkt $z = e^{i\varphi}$ der Einheitskreislinie $\mathfrak{e}$ existierende Funktion. Sie ist von der Klasse 0 oder 1 (d. h. stetig oder unstetig, aber Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen), denn ist $r_1, r_2, \ldots$ eine Folge von Radien, die gegen ∞ streben und die so gewählt werden, daß auf den entsprechenden Kreislinien $|z| = r_1$, $|z| = r_2, \ldots$ keine Pole der Funktion $F(z)$ liegen, so ist $f(\varphi)$ Grenzfunktion der für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ stetigen Funktionen $F(r_1 e^{i\varphi})$, $F(r_2 e^{i\varphi})$, ...

Die Analytizität der Funktion $F(z)$ bewirkt jedoch, daß die Funktion $f(\varphi)$ speziellere Eigenschaften hat. Sie hängen mit der Verteilung derjenigen Winkelräume, in denen $F(z)$ für $z \to \infty$ gleichmäßig gegen eine Konstante strebt, zusammen. Ein abgeschlossener Winkelraum mit dem Nullpunkt als Scheitel

$$\alpha \leqq \operatorname{arc} z \leqq \beta \qquad (\alpha \text{ und } \beta \text{ reell, } \alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi)$$

möge dann als ein *Konvergenzwinkelraum* der Funktion $F(z)$ bezeichnet werden, wenn entweder eine solche endliche Konstante c existiert, daß

$$\lim_{r \to \infty} (F(re^{i\varphi}) - c) = 0$$

gleichmäßig für $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$ gilt, oder wenn

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{F(re^{i\varphi})} = 0$$

gleichmäßig für $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$ gilt. Ich werde zeigen, daß in jedem beliebigen Winkelraum

$$\alpha_0 \leqq \operatorname{arc} z \leqq \beta_0 \qquad (\alpha_0 \text{ und } \beta_0 \text{ reell, } \alpha_0 < \beta_0 \leqq \alpha_0 + 2\pi) \tag{I}$$

ein Konvergenzwinkelraum der Funktion $F(z)$ enthalten ist.

Dies soll vorerst für den Fall, daß $F(z)$ eine *ganze* Funktion ist und daß der Strahlengrenzwert in jedem Punkt der Einheitskreislinie *endlich* ist, nachgewiesen werden. Dann gehört $F(z)$ einer von H. Bohr[31]) unter-

[31]) *H. Bohr*, Opuscula mathematica A. Wiman dedicata (Upsala 1930), S. 39—46, s. S. 40.

suchten Funktionenfamilie an, nämlich der Familie derjenigen ganzen Funktionen, die auf jedem vom Nullpunkte ausgehenden Strahl beschränkt sind. H. Bohr hat unter Anwendung eines bekannten Satzes von Osgood bewiesen, daß bei einer solchen Funktion in jedem Winkelraum (I) ein abgeschlossener Winkelraum

$$\alpha \leqq \operatorname{arc} z \leqq \beta \ , \tag{II}$$

$\alpha_0 \leqq \alpha < \beta \leqq \beta_0$, enthalten ist, indem sie beschränkt ist. Da für die hier betrachtete Funktion $F(z)$ vorausgesetzt wird, daß sie auf jedem vom Nullpunkt ausgehenden Strahl (insbesondere also auf den Randstrahlen des Winkelraumes (II)) gegen einen Grenzwert strebt, folgt aus dem Lindelöfschen Konvergenzsatze[32]), daß sie im Winkelraum (II) gleichmäßig gegen eine Konstante strebt.

Um die Existenz eines solchen abgeschlossenen Konvergenzwinkelraumes (II) auch im allgemeinen Falle (d. h., wenn die meromorphe Funktion $F(z)$ nicht ganz ist und wenn auch der Wert ∞ als Strahlengrenzwert vorkommt) nachzuweisen, müssen die Bohrschen Überlegungen etwas verallgemeinert werden[33]). Ich zeige, daß in jedem Winkelraum (I) ein Winkelraum (II) enthalten ist, indem entweder $|F(z)| \leqq 2$ oder $|F(z)| \geqq 1$ ist für genügend große Werte von $|z|$. Die Annahme, ein solcher Winkelraum existiere nicht, würde nacheinander für $n = 1, 2, \ldots$ folgende Schlüsse ermöglichen:

a) Da nicht für jeden Wert von z, für den $|z| > 2n - 1$ und $\alpha_{2n-2} < \operatorname{arc} z < \beta_{2n-2}$ ist, $|F(z)| \geqq 1$ gilt, gibt es einen Wert z_{2n-1}, für den $r_{2n-1} = |z_{2n-1}| > 2n-1$, $\alpha_{2n-2} < \operatorname{arc} z_{2n-1} < \beta_{2n-2}$, und für den $|F(z_{2n-1})| < 1$ ist. Wegen der Stetigkeit von $F(z)$ im Punkte $z = z_{2n-1}$ gibt es auch noch einen diesen Punkt enthaltenden Bogen: $|z| = r_{2n-1}$, $\alpha_{2n-1} < \operatorname{arc} z < \beta_{2n-1}$, wobei $\alpha_{2n-2} < \alpha_{2n-1} < \beta_{2n-1} < \beta_{2n-2}$, auf dem $|F(z)| < 1$ ist.

b) Da nicht für jeden Wert von z, für den $|z| > 2n$ und $\alpha_{2n-1} < \operatorname{arc} z < \beta_{2n-1}$ ist, $|F(z)| \leqq 2$ gilt, gibt es einen Wert z_{2n}, für den $r_{2n} = |z_{2n}| > 2n$, $\alpha_{2n-1} < \operatorname{arc} z_{2n} < \beta_{2n-1}$, und für den $|F(z_{2n})| > 2$ ist. Wegen der Stetigkeit von $\frac{1}{F(z)}$ im Punkte $z = z_{2n}$ gibt es auch noch einen diesen Punkt enthaltenden Bogen: $|z| = r_{2n}$, $\alpha_{2n} < \operatorname{arc} z < \beta_{2n}$, wobei $\alpha_{2n-1} < \alpha_{2n} < \beta_{2n} < \beta_{2n-1}$, auf dem $|F(z)| > 2$ ist.

---

[32]) *E. Lindelöf*, Acta Soc. Fennicae, 35 (1909), Nr. 7, s. S. 28.

[33]) Anregung zur folgenden Überlegung gab außer [31]) ein von Herrn *P. Montel* (Leçons sur les Familles Normales, Paris 1927, s. S. 209) und von Herrn *C. Carathéodory* (Bull. Amer. Math. Soc. 1928, S. 721—725) bewiesener Satz über konvergente Folgen meromorpher Funktionen.

Ist γ ein Wert des Durchschnittes aller ineinander geschachtelten Intervalle (α_1, β_1), (α_2, β_2), ..., so ist

$$|F(r_{2n-1}e^{i\gamma})| < 1 \quad \text{und} \quad |F(r_{2n}e^{i\gamma})| > 2 .$$

Da sowohl $\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n-1} = \infty$ wie $\lim\limits_{n\to\infty} r_{2n} = \infty$ ist, würde dies bedeuten, daß die Funktion $F(z)$ auf dem Strahle $\operatorname{arc} z = \gamma$ nicht konvergiert, wenn $|z| \to \infty$. Also gibt es im Winkelraum (I) einen abgeschlossenen Teilwinkelraum

$$\alpha \leqq \operatorname{arc} z \leqq \beta \qquad (\alpha_0 \leqq \alpha < \beta \leqq \beta_0) \tag{II}$$

und dazu einen so großen Radius R, daß in derjenigen Teilmenge des Winkelraumes (II), für die $|z| > R$ ist, entweder $|F(z)| \leqq 2$ oder $\left|\frac{1}{F(z)}\right| \leqq 1$ ist[34]). Nach Lindelöf muß also im Winkelraum (II) entweder $F(z)$ oder $\frac{1}{F(z)}$ gleichmäßig gegen eine endliche Konstante streben, wenn $z \to \infty$. Der Winkelraum (II) ist somit ein Konvergenzwinkelraum.

Da in einem beliebigen Winkelraum (I) ein solcher Konvergenzwinkelraum (II) enthalten ist, liegen diejenigen abgeschlossenen Winkelräume mit dem Nullpunkt als Scheitel, die Konvergenzwinkelräume sind, dicht in der Ebene. Daraus folgt insbesondere, daß die Konstanzintervalle des Strahlengrenzwertes $f(\varphi)$ auf der Kreislinie $\mathfrak{e}$ dicht liegen, denn auf dem Durchschnittsbogen eines jeden dieser Konvergenzwinkelräume mit der Kreislinie $\mathfrak{e}$ ist $f(\varphi)$ konstant.

Zur Herleitung einer weiteren Eigenschaft der Funktion $F(z)$ beachte man, daß der Lindelöfsche Konvergenzsatz bereits unter der Voraussetzung, daß eine Funktion in einem Winkelraum bis auf Pole regulär ist und daß sie dort mindestens drei Ausnahmewerte hat, anwendbar ist[35]); d. h., wenn unsere Funktion $F(z)$ in einem abgeschlossenen Winkelraum mit dem Nullpunkt als Scheitel drei verschiedene Werte (von denen einer ∞ sein darf) höchstens endlich oft annimmt, so ist dieser Winkelraum ein Konvergenzwinkelraum. Falls also ein vom Nullpunkt auslaufender Strahl $\mathfrak{f}$ keinen Konvergenzwinkelraum der Funktion $F(z)$ halbiert, nimmt die Funktion $F(z)$ in jedem Winkelraum, der durch $\mathfrak{f}$ halbiert

[34]) Die bisherigen Überlegungen gelten nicht nur für eine meromorphe Funktion $F(z)$, sondern für jede Funktion $F(z)$, bei der für jeden endlichen Wert von z entweder $F(z)$ oder $1 : F(z)$ stetig ist.

[35]) Vgl. a. a. O. [32]), S. 32 und *P. Montel*, Annales de l'Ecole Normale, 3, 29 (1912), S. 487—535, s. S. 519; für das folgende genügt bereits das von Lindelöf Bewiesene.

wird, alle Werte (einschließlich ∞) mit Ausnahme von höchstens zweien unendlich oft an; die Richtung des Strahles $\mathfrak{f}$ ist demnach eine *Juliasche Richtung* der Funktion $F(z)$ Andererseits ist die Richtung des Halbierungsstrahles eines Konvergenzwinkelraumes selbstverständlich keine Juliasche Richtung. Somit ist die Menge der Juliaschen Richtungen der Funktion $F(z)$ identisch mit der Menge der Richtungen derjenigen im Nullpunkt entspringenden Strahlen, die keinen Konvergenzwinkelraum halbieren. Die Gesamtheit dieser Strahlen kann durch die Menge $\mathfrak{d}$ ihrer Schnittpunkte mit der Kreislinie $\mathfrak{e}$ gekennzeichnet werden. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß die Menge $\mathfrak{d}$ abgeschlossen ist. Da in jedem beliebigen Winkelraum (I) ein Konvergenzwinkelraum (II) enthalten ist, ist die Menge $\mathfrak{d}$ nirgendsdicht auf der Kreislinie $\mathfrak{e}$[36]).

Sei $\alpha \leqq \operatorname{arc} z \leqq \beta$ ein Winkelraum, der keinen Punkt der Menge $\mathfrak{d}$ enthält. Jeder Strahl $\operatorname{arc} z = \varphi, \alpha \leqq \varphi \leqq \beta$, halbiert also einen Konvergenzwinkelraum der Funktion $F(z)$. Dann ist auch der ganze Winkelraum $\alpha \leqq \operatorname{arc} z \leqq \beta$ ein Konvergenzwinkelraum. Ist nämlich γ die obere Grenze aller reellen Zahlen $\psi, \psi > \alpha$, für die der Winkelraum $\alpha \leqq \operatorname{arc} z \leqq \psi$ Konvergenzwinkelraum ist, so muß $\gamma > \beta$ sein; sonst gäbe es eine positive Zahl ε, der ein Konvergenzwinkelraum $\gamma - \varepsilon \leqq \operatorname{arc} z \leqq \gamma + \varepsilon$ entspricht; offenbar wäre dann auch der Winkelraum $\alpha \leqq \operatorname{arc} z \leqq \gamma + \varepsilon$ ein Konvergenzwinkelraum. Setzt man insbesondere $\beta = \alpha + 2\pi$, so ergibt sich: wenn die meromorphe Funktion $F(z)$ keine Juliasche Richtung besitzt, so strebt sie in der ganzen Ebene gleichmäßig gegen eine endliche Konstante oder gegen ∞, wenn $z \to \infty$; dann ist $F(z)$ eine rationale Funktion.

Diese Ergebnisse können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

Satz IVa: Ist $F(z)$ eine meromorphe Funktion, die auf jedem vom Nullpunkt ausgehenden Strahl gegen einen endlichen Grenzwert oder gegen ∞ strebt, wenn $|z| \to \infty$, so schneiden diejenigen im Nullpunkt entspringenden Strahlen, die Juliasche Richtungen aufweisen, die Einheitskreislinie $\mathfrak{e}$ in einer auf ihr nirgendsdichten abgeschlossenen Menge $\mathfrak{d}$. Der Strahlengrenzwert $f(\varphi) = \lim\limits_{r \to \infty} F(re^{i\varphi})$ ist eine Funktion der Klasse 0 *oder* 1, *deren Konstanzintervalle auf der Kreislinie $\mathfrak{e}$ dicht liegen; $f(\varphi)$ ist nämlich mindestens auf jedem zu $\mathfrak{d}$ fremden Einheitskreisbogen konstant. In jedem*

---

[36]) Es ist interessant, daß andererseits zu jeder abgeschlossenen Menge von Richtungen eine ganze Funktion existiert, welche diese Richtungen als Juliasche Richtungen besitzt; vgl. *G. Pólya*, Math. Zeitschrift 29 (1929) S. 549—640, s. S. 617. Aus den obenstehenden Überlegungen folgt, daß aber diejenigen vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen, die zugleich Juliasche Richtungen aufweisen und Konvergenzwege sind, in der Ebene nirgendsdicht liegen, d. h., keine Winkelräume bilden.

abgeschlossenen Winkelraum, der den Nullpunkt als Scheitel besitzt und der keinen Punkt der Menge $\mathfrak{d}$ enthält, strebt $F(z)$ sogar gleichmäßig gegen den entsprechenden konstanten Strahlengrenzwert.

2. Durch den Satz IVa ist sowohl die Strahlengrenzwertfunktion der meromorphen Funktion $F(z)$, wie die Verteilung ihrer Juliaschen Richtungen vollständig charakterisiert; dies zeigt

Satz IV b: Zu jeder abgeschlossenen Teilmenge $\mathfrak{d}$ der Einheitskreislinie $\mathfrak{e}$, die auf $\mathfrak{e}$ nirgendsdicht ist, und zu jeder auf $\mathfrak{e}$ definierten Funktion $f(\varphi)$, die von der Klasse 0 *oder* 1 *ist (die auch den Wert ∞ annehmen darf) und die mindestens auf jedem zu $\mathfrak{d}$ fremden Einheitskreisbogen konstant ist, gibt es eine ganze Funktion $G(z)$, welche 1. $f(\varphi)$ als Strahlengrenzwertfunktion besitzt, welche 2. in jedem abgeschlossenen Winkelraum mit dem Nullpunkt als Scheitel, der keinen Punkt von $\mathfrak{d}$ enthält, gleichmäßig gegen den entsprechenden konstanten Strahlengrenzwert strebt und bei welcher 3. die Richtungen der vom Nullpunkt durch die Punkte der Menge $\mathfrak{d}$ gelegten Strahlen die Juliaschen Richtungen sind.*

Da die Funktion $f(\varphi)$ von der Klasse 0 oder 1 ist, gibt es eine Folge von Funktionen $f_1(\varphi), f_2(\varphi), \ldots,$ die auf der Kreislinie $\mathfrak{e}$ stetig sind und die gegen $f(\varphi)$ konvergieren. Setzt man

$$h(0) = 0 = f_0(\varphi)$$

und für $n = 1, 2, \ldots$:

$$h(re^{i\varphi}) = f_n(\varphi) + (n - r)\,(f_{n-1}(\varphi) - f_n(\varphi))\,, \qquad \text{wenn} \qquad n - 1 < r \leqq n\,,$$

so ist $h(z) = h(re^{i\varphi})$ eine in der ganzen Ebene stetige Funktion. Weil für $n - 1 < r \leqq n$

$$|h(re^{i\varphi}) - f_n(\varphi)| \leqq |f_{n-1}(\varphi) - f_n(\varphi)|$$

ist und die rechts stehende Differenz für irgend einen festen Wert von φ beliebig klein wird, wenn n genügend groß ist, so ist

$$\lim_{r\to\infty} h(re^{i\varphi}) = \lim_{n\to\infty} f_n(\varphi) = f(\varphi)\ ,$$

d. h., die stetige Funktion $h(z)$ hat den Strahlengrenzwert $f(\varphi)$.

Die Menge $\mathfrak{S}$, die aus allen vom Nullpunkt durch die Punkte der Menge $\mathfrak{d}$ führenden Strahlen besteht, ist abgeschlossen und in der Ebene nirgendsdicht. Nach Satz II gibt es eine ganze Funktion $G_{\mathfrak{S}}(z)$, für welche auf $\mathfrak{S}$ gleichmäßig

$$\lim_{z \to \infty} |G_{\mathfrak{S}}(z) - h(z)| = 0$$

gilt und daher

$$\lim_{r \to \infty} G_{\mathfrak{S}}(re^{i\varphi}) = \lim_{r \to \infty} h(re^{i\varphi}) = f(\varphi)$$

ist, wenn $e^{i\varphi}$ in $\mathfrak{d}$ enthalten ist.

Als offene Teilmenge der Kreislinie $\mathfrak{e}$ besteht die Komplementärmenge $\mathfrak{g} = \mathfrak{e} - \mathfrak{d}$ aus abzählbar vielen paarweise fremden offenen Bogen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$. $\mathfrak{W}_n$ sei derjenige offene Winkelraum, der den Nullpunkt als Scheitel besitzt und für den $\mathfrak{W}_n \cdot \mathfrak{e} = \mathfrak{g}_n$ ist. Ferner $\mathfrak{s}_n$ die abgeschlossene Menge, die aus allen denjenigen Punkten des Winkelraumes $\mathfrak{W}_n$ besteht, deren Abstand von seiner Begrenzung gleich 1 ist, und $\mathfrak{B}_n$ diejenige abgeschlossene Teilmenge des Winkelraumes $\mathfrak{W}_n$, deren Punkte von der Begrenzung von $\mathfrak{W}_n$ mindestens den Abstand 2 haben. Einfache Überlegungen zeigen:

a) $\mathfrak{s}_n$ ist eine Kurve, die entweder aus zwei (nicht vom Nullpunkt ausgehenden) Strahlen oder (falls $\mathfrak{g}_n$ größer als der Halbkreis ist) aus einem Kreisbogen und zwei von seinen Endpunkten ausgehenden Strahlen besteht.

b) $\mathfrak{B}_n$ ist ein Bereich, dessen Rand von derselben Art wie die eben geschilderte Kurve $\mathfrak{s}_n$ ist.

c) Jeder abgeschlossene Winkelraum, der den Nullpunkt als Scheitel hat und dessen Durchschnitt mit der Kreislinie $\mathfrak{e}$ ganz im Bogen $\mathfrak{g}_n$ enthalten ist, ist mit Ausnahme einer beschränkten Teilmenge ganz im Bereiche $\mathfrak{B}_n$ enthalten.

d) Umgibt man jede der Mengen $\mathfrak{S}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots$ mit demjenigen Gebiet, das aus allen Punkten besteht, deren Abstand von der Menge kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, so sind diese Gebiete paarweise fremd und häufen sich nicht im Endlichen[25]).

e) Die Komplementärmenge von $\mathfrak{S} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{B}_n + \mathfrak{s}_n)$ hat die Eigenschaft, die in § 3, 2. Abschnitt, als Eigenschaft E bezeichnet wurde.

Die Funktion $f(\varphi)$ hat nach Voraussetzung auf dem Bogen $\mathfrak{g}_n$ einen konstanten Wert c_n, $n = 1, 2, \ldots$. Wir ordnen nun dem Bereiche $\mathfrak{B}_n$ diese Konstante c_n zu, falls sie endlich ist; hingegen ordnen wir ihm die Funktion z zu, falls $c_n = \infty$ ist. Ferner wird der Kurve $\mathfrak{s}_n$ eine von c_n verschiedene endliche Konstante k_n zugeordnet. Schließlich ordnet man noch der Strahlenmenge $\mathfrak{S}$ die bereits konstruierte ganze Funktion

Note [25]) s. S. 105.

$G_{\mathfrak{S}}(z)$ zu. Wendet man auf die abgeschlossenen Mengen $\mathfrak{S}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots,$ $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots$ und die ihnen solchermaßen zugeordneten Funktionen und Konstanten den Satz III und seinen Zusatz an, so ergibt sich (unter Beachtung der Bemerkungen d) und e)) die Existenz einer ganzen Funktion $G(z)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\lim_{z\to\infty}(G(z) - G_{\mathfrak{S}}(z)) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{S}\;; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{falls } c_n \text{ endlich:} \lim_{z\to\infty}(G(z) - c_n) = 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \mathfrak{B}_n\,, \\ &\text{falls } c_n = \infty: \lim_{z\to\infty}(G(z) - z) = 0 \quad \text{gleichmäßig auf } \mathfrak{B}_n,\; n=1,2,\ldots; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\lim_{z\to\infty}(G(z) - k_n) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{f}_n, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{3}$$

Da $\lim\limits_{r\to\infty} G_{\mathfrak{S}}(re^{i\varphi}) = f(\varphi)$ ist, wenn $e^{i\varphi}$ in $\mathfrak{d}$ enthalten ist, so folgt aus (1), daß $\lim\limits_{r\to\infty} G(re^{i\varphi}) = f(\varphi)$ ist, wenn $e^{i\varphi}$ in $\mathfrak{d}$ enthalten ist. Weil jeder vom Nullpunkt durch einen Punkt des Bogens $\mathfrak{g}_n$ führende Strahl mit Ausnahme einer beschränkten Teilstrecke im Bereiche $\mathfrak{B}_n$ verläuft, so folgt aus (2), daß $\lim\limits_{r\to\infty} G(re^{i\varphi}) = c_n = f(\varphi)$ ist, wenn $e^{i\varphi}$ in $\mathfrak{g}_n$ enthalten ist, $n = 1, 2, \ldots$. Da jeder Punkt der Kreislinie $\mathfrak{e}$ entweder zur Menge $\mathfrak{d}$ oder zu einem der Bogen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ gehört, hat somit die ganze Funktion $G(z)$ die vorgelegte Funktion $f(\varphi)$ zur Strahlengrenzwertfunktion.

Außerdem folgt aus (2), daß die Funktion $G(z)$ in jedem abgeschlossenen Winkelraum, der den Nullpunkt als Scheitel hat und dessen Durchschnitt mit der Kreislinie $\mathfrak{e}$ ganz im Bogen $\mathfrak{g}_n$ enthalten ist, gleichmäßig gegen die Konstante c_n strebt, wenn $z \to \infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Es soll gezeigt werden, daß die Funktion $G(z)$ andererseits in jedem abgeschlossenen Winkelraum $\mathfrak{W}^*$, der den Nullpunkt als Scheitel besitzt und dessen Durchschnitt $\mathfrak{W}^* \cdot \mathfrak{e}$ mit der Kreislinie $\mathfrak{e}$ nicht ganz in einem der Bogen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ enthalten ist, nicht gleichmäßig konvergiert, wenn $z \to \infty$. (Jedoch ist es möglich, daß $f(\varphi)$ auf dem Durchschnittsbogen $\mathfrak{W}^* \cdot \mathfrak{e}$ konstant ist, da zwar vorausgesetzt wurde, daß $f(\varphi)$ auf jedem Teilbogen $\mathfrak{g}_n$ konstant sei, aber nicht umgekehrt, daß jeder Bogen, auf dem $f(\varphi)$ konstant ist, in einem der Bogen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ enthalten sei.) Da die Bogen $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ auf $\mathfrak{e}$ dicht liegen, enthält der Bogen $\mathfrak{W}^* \cdot \mathfrak{e}$ mindestens einen Teil eines gewissen Bogens $\mathfrak{g}_n$. Eine einfache Überlegung zeigt, daß der Winkelraum $\mathfrak{W}^*$ entweder die ganze Kurve $\mathfrak{f}_n$ oder mindestens einen Teilstrahl dieser Kurve enthält. Somit hat $G(z)$ im Winkelraum $\mathfrak{W}^*$ einerseits den Wert c_n, andererseits, wegen (3), den davon verschiedenen Wert k_n als asymptotischen Wert und konvergiert also nicht gleichmäßig in $\mathfrak{W}^*$, wenn $z \to \infty$. Insbesondere ist also keiner der Winkelräume, die durch einen vom Nullpunkt durch einen Punkt der Menge $\mathfrak{d}$ gelegten Strahl halbiert werden, ein Konvergenzwinkelraum der Funktion $G(z)$. Nach dem bei der Herleitung von Satz IVa Gesagten ist jeder solche Strahl eine Juliasche Richtung der Funktion $G(z)$[37]).

3. Eine auf der Kreislinie $\mathfrak{e}$ definierte Funktion $f(\varphi)$ kann also dann und nur dann als Strahlengrenzwert einer meromorphen Funktion aufgefaßt werden, wenn $f(\varphi)$ von der Klasse 0 oder 1 ist und wenn die Bogen, auf denen $f(\varphi)$ konstant ist, auf $\mathfrak{e}$ dicht liegen. Dasselbe gilt für den Strahlengrenzwert einer ganzen Funktion. So reduziert sich jede weitere Untersuchung des Strahlengrenzwertes $f(\varphi)$ auf die Frage nach den Eigenschaften dieser besonderen Funktionen der Klassen 0 und 1[38]). Die folgenden Hilfssätze 6 und 7 dienen dazu, eine solche vervollständigende Untersuchung für einen speziellen Fall durchzuführen, nämlich für den Fall, daß die Funktion $f(\varphi)$ nur endlich viele verschiedene Werte annimmt. Eine derartige Funktion ist offenbar in einem Punkt der Kreislinie nur dann stetig, wenn dieser Punkt im Innern eines Konstanzintervalles liegt. Wenn $f(\varphi)$ nur endlich viele, aber mindestens zwei verschiedene Werte annimmt, ist demnach $f(\varphi)$ nicht stetig, sondern von der Klasse 1.

Hilfssatz 6: Nimmt eine auf der Kreislinie $\mathfrak{e}$ definierte Funktion $f(\varphi)$ der Klasse 1 nur endlich viele verschiedene Werte $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (wobei der Wert ∞ vorkommen darf) an, so liegen die Konstanzintervalle von $f(\varphi)$ dicht auf der

---

[37]) Während bei der hier konstruierten Funktion $G(z)$ kein abgeschlossener Konvergenzwinkelraum vorkommt, der einen Strahl mit Juliascher Richtung (wenn auch bloß als Randstrahl) enthält, gibt es ganze Funktionen, bei denen alle vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen Konvergenzwege sind und bei denen abgeschlossene Konvergenzwinkelräume vorkommen, deren Randstrahlen Juliasche Richtungen aufweisen. Beispiele solcher Funktionen können mit den hier angewandten Methoden leicht gewonnen werden.

[38]) Aus dem Beweis von Satz IVb geht hervor, daß außer der Voraussetzung, daß $f(\varphi)$ auf jedem zu $\mathfrak{d}$ fremden Kreisbogen konstant ist, nur die Voraussetzung nötig ist, daß $f(\varphi)$ auf der Menge $\mathfrak{d}$ von der Klasse 0 oder 1 ist; die Funktion $f(\varphi)$ wird dann von selbst auf der ganzen Kreislinie von der Klasse 0 oder 1. Diese zweite Voraussetzung braucht sogar bloß für den perfekten Kern der Menge $\mathfrak{d}$ gemacht zu werden. — Die Funktion $f(\varphi)$ kann von der Klasse 0, d. h. stetig sein; eine nicht konstante stetige Funktion kann sie jedoch nur dann sein, wenn die Menge $\mathfrak{d}$ die Mächtigkeit des Kontinuums hat. — Daraus, daß eine perfekte nirgendsdichte Teilmenge der Kreislinie stetig auf einen Kreisbereich abgebildet werden kann, folgt: 1. $f(\varphi)$ kann eine stetige Funktion sein, die alle Werte eines Kreisbereiches annimmt; 2. $f(\varphi)$ kann eine Funktion sein, die alle Werte (einschließlich den Wert ∞) annimmt; vgl. hiezu das Beispiel von W. Groß, Math. Annalen 79 (1918), S. 201—211.

Kreislinie $\mathfrak{e}$. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem bekannten Baireschen Satze über Funktionen der Klasse 1. Es genügt, den Fall zu betrachten, wo die von $f(\varphi)$ angenommenen Werte reell und beschränkt sind. Ist nämlich a ein Wert, der von $f(\varphi)$ nicht angenommen wird und der außerdem so gewählt wird, daß die absoluten Beträge $|c_1 - a|, |c_2 - a|, \ldots, |c_n - a|$ alle voneinander verschieden sind, so ist $\frac{1}{|f(\varphi) - a|}$ eine beschränkte reelle Funktion der Klasse 1, die nur endlich viele verschiedene Werte annimmt und deren Konstanzintervalle mit denen der Funktion $f(\varphi)$ zusammenfallen. Nach Baire liegen bei einer reellen endlichen Funktion, die auf $\mathfrak{e}$ definiert und von der Klasse 1 ist, die Stetigkeitspunkte dicht auf $\mathfrak{e}$[39]. Da im Falle, wo eine Funktion nur endlich viele Werte annimmt auf $\mathfrak{e}$, jeder Stetigkeitspunkt im Innern eines Konstanzintervalles enthalten sein muß, liegen somit auch die Konstanzintervalle von $f(\varphi)$ dicht auf $\mathfrak{e}$.

Hilfssatz 7: Eine Funktion $f(\varphi)$, die auf der Kreislinie $\mathfrak{e}$ definiert ist und die dort nur endlich viele, mindestens aber zwei verschiedene Werte (unter denen der Wert ∞ vorkommen darf) annimmt, ist dann und nur dann von der Klasse 1, wenn jeder dieser Werte auf einer Teilmenge von $\mathfrak{e}$ angenommen wird, die Summe von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen ist. Dieser Satz ist aus der Theorie der reellen Funktionen bekannt[40]; man sieht leicht ein, daß er auch für komplexe Funktionen gültig ist.

Die Verbindung der Sätze IVa und IVb mit diesen Hilfssätzen ergibt:

Satz V: Damit eine auf der Kreislinie $\mathfrak{e}$ definierte Funktion $f(\varphi)$, die nur endlich viele, jedoch mindestens zwei verschiedene Werte (unter denen der Wert ∞ vorkommen darf) annimmt, als Strahlengrenzwert einer meromorphen Funktion aufgefaßt werden kann, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, daß $f(\varphi)$ von der Klasse 1 ist; es ist also notwendig und hinreichend, daß jeder Wert in einer Teilmenge von $\mathfrak{e}$, die Summe abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist, angenommen wird. Die Bedingung ist sogar hinreichend dafür, daß $f(\varphi)$ als Strahlengrenzwert einer *ganzen* Funktion aufgefaßt werden kann. Insbesondere ist damit die Antwort auf die Frage, welche durch die in der Einleitung zitierte Pólya-Szegösche Aufgabe geweckt wurde, gegeben: *Dafür, daß eine ganze Funktion existiere, die auf einer vorgelegten Menge von Strahlen, die vom Nullpunkt*

---

[39]) Vgl. z. B. *C. de la Vallée Poussin*, Intégrales de Lebesgue, Fonction d'ensemble, Classe de Baire (Paris 1934), S. 136.

[40]) Vgl. a. a. O. [39]), S. 128.

ausgehen, gegen 0, *auf der Menge aller andern vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen hingegen gegen* ∞ *strebt, wenn* $|z| \to \infty$, *ist notwendig und hinreichend, daß jede der beiden Strahlenmengen Summe abzählbar vieler abgeschlossener Mengen von Strahlen ist.*

§ 5. Weitere Anwendungsmöglichkeiten

1. *Anmerkungen zu den Sätzen IVa und IVb:* Aus dem Beweis von Satz IVa geht unmittelbar hervor, daß bei einer meromorphen Funktion, die zwar nicht auf allen vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen, aber wenigstens auf allen vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen eines *Winkelraumes* gegen einen Grenzwert strebt, ein entsprechender Satz über das Verhalten der Funktion in diesem Winkelraum besteht. Ferner war es unnötig, vorauszusetzen, daß die Funktion $F(z)$ in der ganzen Ebene bis auf Pole regulär sei, vielmehr hätte es genügt, vorauszusetzen, daß die Funktion $F(z)$ *in einer Umgebung der wesentlichen Singularität* $z = \infty$ *eindeutig und bis auf Pole regulär sei.*

Auch könnten die Sätze IVa und IVb dadurch verallgemeinert werden, daß an Stelle der Schar aller im Nullpunkt entspringenden Strahlen eine gewisse *allgemeinere Schar von kongruenten Kurven* genommen wird. Eine dieser Kurven wird dargestellt durch $z = f(t)$, wo $f(t)$ eine für $0 \leqq t < \infty$ stetige Funktion ist, bei der $f(0) = 0$ ist und $|f(t_1)| < |f(t_2)|$ gilt, wenn $t_1 < t_2$ ist; die ganze Kurvenschar besteht aus allen zu dieser Kurve kongruenten Kurven, welche ebenfalls vom Nullpunkt ausgehen. (Diese Ersetzung der Strahlen durch allgemeinere Kurven ist wohlbekannt bei der Juliaschen Verschärfung des Picardschen Satzes.) Die Hilfsmittel, die in dieser Arbeit benutzt wurden, genügen auch zum Beweis dieser allgemeineren Sätze. Man hätte vorgängig zu zeigen, daß im Satze II die dort vorkommende Strahlenmenge ersetzt werden dürfe durch eine in der Ebene nirgendsdichte abgeschlossene Menge, die sich aus Kurven der eben geschilderten Art zusammensetzt. Dies gelingt durch eine geringfügige Modifikation des Beweises von Satz II, denn der dort benutzte Hilfssatz 3c ist auch für diesen allgemeineren Fall brauchbar.

2. *Ganze Funktionen mit teilweise vorgegebenen Strahlengrenzwerten:* Beim Beweise von Satz IVb wurde der Satz II herangezogen, um eine ganze Funktion $G_{\mathfrak{S}}(z)$ zu gewinnen, die auf der nirgendsdichten abgeschlossenen Teilmenge $\mathfrak{d}$ der Kreislinie $\mathfrak{e}$ eine (dort beliebige) Funktion der Klasse 0 oder 1 als Strahlengrenzwert aufweist. Der Satz II erlaubt eine etwas allgemeinere Anwendung, nämlich

Satz VI: Zu jeder Teilmenge $\mathfrak{m}$ *der Kreislinie* $\mathfrak{e}$, *welche Summe ist von abzählbar vielen auf* $\mathfrak{e}$ *nirgendsdichten abgeschlossenen Mengen, und zu jeder Funktion* $f(\varphi)$, *die auf* $\mathfrak{m}$ *definiert und von der Klasse* 0 *oder* 1 *ist (und die auch den Wert* ∞ *annehmen darf), gibt es eine ganze Funktion* $G(z)$, *welche auf der Menge* $\mathfrak{m}$ *die Funktion* $f(\varphi)$ *zur Strahlengrenzwertfunktion* $\lim\limits_{r\to\infty} G(re^{i\varphi})$ *hat.*

Sei nämlich $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \cdots$, wobei jede Menge $\mathfrak{m}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine nirgendsdichte abgeschlossene Teilmenge der Kreislinie $\mathfrak{e}$ ist, und sei $f(\varphi) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\varphi)$, wobei jede Funktion $f_n(\varphi)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ auf der Menge $\mathfrak{m}$ definiert und stetig ist. Ist $\mathfrak{S}_n$ die Streckenmenge, für welche $(n - 1) \leqq r = |z| < n$ gilt und für welche $e^{i\varphi} = \frac{z}{|z|}$ in der nirgendsdichten abgeschlossenen Teilmenge $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \mathfrak{m}_\nu$ der Kreislinie $\mathfrak{e}$ enthalten ist, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}$ eine Strahlenmenge, für welche die Voraussetzungen von Satz II erfüllt sind. Setzt man

$$h(0) = 0 = f_0(\varphi)$$

und für jeden in der Menge $\mathfrak{S}_n$ enthaltenen Wert z

$$h(z) = h(re^{i\varphi}) = f_n(\varphi) + (n - r)\,(f_{n-1}(\varphi) - f_n(\varphi)) \ , \quad n = 1, 2, \ldots \ ,$$

so ist $h(z)$ eine auf der Menge $\mathfrak{S}$ stetige Funktion. Wenn $(n - 1) \leqq r < n$ ist und $e^{i\varphi}$ in $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \mathfrak{m}_\nu$ enthalten ist, so gilt

$$|h(re^{i\varphi}) - f(\varphi)| \leqq |f_n(\varphi) - f(\varphi)| + |f_{n-1}(\varphi) - f_n(\varphi)| \ .$$

Ist $e^{i\varphi}$ in $\mathfrak{m} = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{m}_\nu$ enthalten, so ist also

$$\lim_{r\to\infty} (h(re^{i\varphi}) - f(\varphi)) = 0 \ .$$

Nach Satz II existiert eine solche ganze Funktion $G(z)$, daß auf der Strahlenmenge $\mathfrak{S}$

$$\lim_{z\to\infty} (G(z) - h(z)) = 0$$

ist. Wenn $e^{i\varphi}$ in $\mathfrak{m}$ enthalten ist, so gilt somit

$$\lim_{r\to\infty} (G(re^{i\varphi}) - h(re^{i\varphi})) = 0$$

und daher

$$\lim_{r\to\infty} (G(re^{i\varphi}) - f(\varphi)) = 0 \ .$$

Da auf einer abzählbaren Punktmenge jede Funktion von der Klasse 0 oder 1 ist, so folgt aus Satz VI insbesondere, daß *zu jeder abzählbaren Menge* $\mathfrak{m}$ *von Punkten der Kreislinie* $\mathfrak{e}$ *und zu irgend einer auf* $\mathfrak{m}$ *definierten Funktion* $f(\varphi)$ *(die auch den Wert* ∞ *annehmen darf) eine ganze Funktion existiert, die auf der Menge* $\mathfrak{m}$ *die Funktion* $f(\varphi)$ *zur Strahlengrenzwertfunktion hat.* Durch nochmalige Spezialisierung ergibt sich z. B. die Existenz einer ganzen Funktion, die auf einer in der Kreislinie $\mathfrak{e}$ dicht liegenden Punktfolge $\mathfrak{m}_1$ den Strahlengrenzwert 0, auf einer zu $\mathfrak{m}_1$ fremden, in der Kreislinie $\mathfrak{e}$ dicht liegenden Punktfolge $\mathfrak{m}_2$ hingegen den Strahlengrenzwert ∞ hat und bei der somit (gemäß den beim Beweise von Satz IVa ausgeführten Überlegungen) auf einer ebenfalls dichten Teilmenge der Kreislinie $\mathfrak{e}$ kein Strahlengrenzwert existieren kann.

3. *Sätze über Funktionen, die in einem Kreisgebiet bis auf Pole regulär sind:* Wenn man in den Beweisen der Sätze I und II die dort vorkommende Radienfolge $1, 2, \ldots n, \ldots$ ersetzt durch eine wachsende Radienfolge $r_1, r_2, \ldots r_n, \ldots$, für die $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 1$ ist, so gehen aus jenen Beweisen die Beweise der folgenden Sätze I′ und II′ hervor.

Satz I′: Zu jeder Teilmenge $\mathfrak{M}$ *des Einheitskreisgebietes* $|z| < 1$, *welche in diesem Gebiet abgeschlossen ist und welche das Flächenmaß* 0 *hat, zu jeder auf* $\mathfrak{M}$ *stetigen Funktion* $f(z)$ *und zu irgend einer für* $0 \leqq r < 1$ *stetigen positiven Funktion* $\varepsilon(r)$, *für welche* $\lim\limits_{r \to 1} \varepsilon(r) = 0$ *sein darf, gibt es eine derartige im Einheitskreisgebiet bis auf Pole reguläre Funktion* $F(z)$, *daß auf der Menge* $\mathfrak{M}$

$$F(z) - f(z)| < \varepsilon(|z|)$$

gilt.

Satz II′: Zu jeder Teilmenge $\mathfrak{M}$ *des Einheitskreisgebietes, welche in diesem Gebiete abgeschlossen und nirgendsdicht ist und welche als Summe von lauter Radienteilstrecken, von welchen ein Endpunkt auf der Kreislinie* $|z| = 1$ *liegt, aufgefaßt werden kann, zu jeder auf* $\mathfrak{M}$ *stetigen Funktion* $f(z)$ *und zu irgend einer für* $0 \leqq r < 1$ *stetigen positiven Funktion* $\varepsilon(r)$, *für welche* $\lim\limits_{r \to 1} \varepsilon(r) = 0$ *sein darf, gibt es eine derartige im Einheitskreisgebiet reguläre Funktion* $F(z)$, *daß auf der Menge* $\mathfrak{M}$

$$|F(z) - f(z)| < \varepsilon(|z|)$$

gilt.

Bei beiden Sätzen ist zu beachten, daß die Funktion $f(z)$ nicht auf der abgeschlossenen Hülle der Menge $\mathfrak{M}$ stetig zu sein braucht, sondern nur auf der im Gebiete $|z| < 1$ enthaltenen (und in ihm abgeschlossenen) Menge $\mathfrak{M}$ selbst. Diese Sätze können benutzt werden, um die Existenz von Funktionen, die im Innern einer Kreislinie bis auf Pole regulär sind und die gewisse Randbedingungen erfüllen, nachzuweisen. Zum Beispiel folgt aus dem Satz II′ (ganz entsprechend wie aus dem Satz II der Satz VI hergeleitet wurde)

Satz VI′: Zu jeder Teilmenge $\mathfrak{m}$ *der Kreislinie* $|z| = 1$, *welche Summe ist von abzählbar vielen auf der Kreislinie nirgendsdichten abgeschlossenen Mengen und zu jeder Funktion* $f(\varphi)$, *die auf* $\mathfrak{m}$ *definiert und von der Klasse* 0 *oder* 1 *ist (und die auch den Wert* ∞ *annehmen darf), gibt es eine für* $|z| < 1$ *reguläre Funktion* $F(z)$, *welche auf der Menge* $\mathfrak{m}$ *den radialen Grenzwert* $f(\varphi)$ *hat, d. h., für welche* $\lim_{r \to 1} F(re^{i\varphi}) = f(\varphi)$ *gilt, wenn* $e^{i\varphi}$ *in* $\mathfrak{m}$ *enthalten ist.*

Ist $\mathfrak{m}$ eine abzählbare Menge von Punkten, so kann für $f(\varphi)$ irgend eine dort definierte Funktion genommen werden, da $f(\varphi)$ dann von selbst von der Klasse 0 oder 1 ist. [40])

(Eingegangen den 14. September 1938.)

[40]) Von anderen Anwendungsmöglichkeiten hebe ich einen Satz von *G. D. Birkhoff* (Comptes Rendus Paris 189 (1929), S. 473—475) und einen Satz von *A. Haar* (Göttinger Nachrichten 1914, S. 115—123, vergl. auch *G. Pólya,* Annals of Mathematics, Bd. 34 (1933), S. 731—777, insbesondere S. 738—741) hervor, die beide leicht aus den Überlegungen von § 3 folgen. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Haar, betreffend die Zerlegung einer singulären Linie, befindet sich bei *N. Aronszajn,* Sur les décompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications (Thèse, Paris 1935). Satz III von § 3 weist Berührungspunkte auf mit dem Théorème B der interessanten Abhandlung des Herrn Aronszajn, die mir erst während der Korrektur der vorliegenden Arbeit bekannt wurde.