Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Über Freisysteme (lineare Freigebilde).

Autor: Finsler, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11880

Über Freisysteme (lineare Freigebilde)

Von Paul Finsler, Zürich

In einer früheren Arbeit[1]) wurden die Freigebilde durch folgende Eigenschaft festgelegt:

Ein algebraisches Gebilde heißt Freigebilde, wenn es von keinem linearen Raum in einem System von endlich vielen, linear abhängigen Punkten getroffen wird.

Als „lineare Freigebilde" oder kürzer als „*Freisysteme*" seien solche Freigebilde bezeichnet, die nur aus endlich vielen linearen Räumen zusammengesetzt sind.

Es sollen jetzt diese Freisysteme im n-dimensionalen Raum näher untersucht und in ihrer Gesamtheit bestimmt werden. Dabei kann der zugrunde gelegte Raum als ein komplexer oder auch als ein reeller projektiver Raum L_n vorausgesetzt werden. Man erkennt leicht, daß die Sätze von § 1 der oben genannten Arbeit auch gültig bleiben, wenn man sich auf das Reelle beschränkt. Nur die Definition der nichtlinearen Gebilde ist an den komplexen Raum gebunden.

1. Definition

Man kann die Freisysteme direkt definieren:

Ein System $\sum_{i=0}^{r} L_{\alpha_i}$ *von* $r+1$ *linearen Räumen* ($r \geqq 0$) *heißt Freisystem, wenn es von keinem linearen Raum in endlich vielen, linear abhängigen Punkten getroffen wird.*

Der Schnitt eines Freisystems mit einem beliebigen linearen Raum darf also nur aus linear unabhängigen Punkten bestehen, sofern er nicht wenigstens eine ganze Gerade enthält. So ist z. B. jeder einzelne Raum L_ν ein Freisystem, insbesondere auch das Nullgebilde L_{-1} und der Gesamtraum L_n.

Eine Mehrfachzählung von Punkten oder Räumen wird nicht eingeführt. Man könnte deshalb voraussetzen, daß in dem System ΣL_{α_i} keiner der Räume L_{α_i} vollständig in einem andern L_{α_j} enthalten ist; die Räume L_{α_i} wären dann irreduzible Teile[2]) des Freisystems. Jedoch ist diese Annahme zunächst nicht notwendig.

---

[1]) *P. Finsler*, Über eine Klasse algebraischer Gebilde (Freigebilde). Comm. Math. Helv. 9 (1937), S. 172; zitiert als „Frg.". Vgl. auch *P. Finsler*, Über algebraische Gebilde. Math. Annalen 101 (1929), S. 284; zitiert als „A. G.".

[2]) A. G. § 1, S. 286.

Zwei verschiedene Punkte sind stets linear unabhängig; wenn zwei Punkte zusammenfallen, so ist es nur ein einziger Punkt, und ein solcher ist ebenfalls unabhängig. Es ergibt sich also:

Satz 1. *Jeder einzelne lineare Raum und jede Vereinigung von zwei linearen Räumen ist ein Freisystem.*

So ergeben z. B. eine Ebene und eine Gerade, die sich treffen, ein Freisystem im L_3.

2. Freie Räume

Der Verbindungsraum der Räume $L_{\alpha_0}, L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_p}$ werde mit $L_\varrho = [L_{\alpha_0}, L_{\alpha_1}, \ldots, L_{\alpha_p}]$ bezeichnet. Da sich jeder Raum L_{α_i} als Verbindungsraum von $\alpha_i + 1$ Punkten darstellen läßt, so gilt

$$\varrho \leqq p + \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \; .$$

Wenn ϱ den größtmöglichen Wert annimmt: $\varrho = p + \sum_{i=0}^{p} \alpha_i$, so sagen wir, die Räume $L_{\alpha_0}, \ldots, L_{\alpha_p}$ befinden sich *in freier Lage*, oder kurz, es sind *freie Räume*[3]). Es können sich in diesem Fall weder zwei der Räume L_{α_i}, noch auch die Verbindungsräume von beliebig vielen verschiedenen gegenseitig treffen. Umgekehrt ist durch diese Eigenschaft die freie Lage gesichert, da sich $\varrho + 1 = \sum_{i=0}^{p} (\alpha_i + 1)$ ergibt. Wird $\alpha + 1$ als *Punktwert*[4]) des Raums L_α bezeichnet, so gilt:

Satz 2. *Die Summe der Punktwerte von linearen Räumen ist bei freien Räumen und nur bei solchen gleich dem Punktwert des Verbindungsraums.*

Satz 3. *Lineare Räume befinden sich dann und nur dann in freier Lage, wenn keiner den Verbindungsraum der übrigen trifft.*

Ein „Teil" eines Systems besteht aus irreduziblen Teilen des gegebenen Systems. Es folgt:

Satz 4. *Jeder Teil eines Systems von freien Räumen besteht aus freien Räumen.*

---

[3]) Bei *Bertini*, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume, Wien 1924, S. 13 heißen sie „unabhängig". Da aber z. B. bei *Bôcher*, Einführung in die höhere Algebra, Leipzig 1910, S. 46 drei Ebenen des L_3 nur dann als linear abhängig gelten, wenn sie eine Gerade gemeinsam haben, so empfiehlt sich vielleicht eine andere Bezeichnung. Allerdings ist zu beachten, daß ein Freisystem nicht aus freien Räumen zu bestehen braucht.

[4]) Vgl. *Bertini*, S. 71.

Umgekehrt gilt:

Satz 5. *Beliebige Systeme von freien Räumen ohne gemeinsame Punkte ergeben zusammen dann und nur dann wieder freie Räume, wenn sich ihre Verbindungsräume in freier Lage befinden.*

Sind die Räume L_{α_i} in freier Lage und gibt man in jedem derselben entweder höchstens einen, oder beliebig viele linear unabhängige Punkte, so sind diese stets auch zusammengenommen linear unabhängig, da man sie zu $\Sigma(\alpha_i + 1) = \varrho + 1$ Punkten ergänzen kann, die den L_ϱ bestimmen. Daraus folgt:

Satz 6. *Freie Räume bilden stets ein Freisystem, und der Schnitt eines Systems von freien Räumen mit einem beliebigen linearen Raum ergibt wieder freie Räume.*

Die Räume $L_{\alpha_0}, \ldots, L_{\alpha_p}$ seien jetzt zwar getrennt, aber nicht in freier Lage, d. h. es sei $\varrho < p + \Sigma\alpha_i$. Sind alle $\alpha_i = 0$, so liegt ein System von linear abhängigen Punkten vor, die also kein Freisystem bilden. Ist aber z. B. $\alpha_0 > 0$, so seien in jedem der Räume L_{α_i} $\alpha_i + 1$ linear unabhängige Punkte ausgewählt, darunter die Punkte P und Q im Raum L_{α_0}. Durch ϱ der übrigen Punkte kann man im L_ϱ einen $L_{\varrho-1}$ legen, der die Gerade PQ in einem Punkt R trifft. Dieser Punkt ist von den $\alpha_0 - 1$ außer P und Q im L_{α_0} ausgewählten Punkten linear unabhängig, er bildet aber mit den ϱ im $L_{\varrho-1}$ gewählten Punkten ein abhängiges System. Es folgt also, daß der Schnitt der gegebenen Räume mit dem Raum $L_{\varrho-1}$ ebenfalls nicht aus freien Räumen besteht. Nach höchstens $(\varrho - 2)$maliger Wiederholung gelangt man so zu einem Raum, der die gegebenen Räume nur noch in Punkten trifft, die dann aber linear abhängig sind. Es folgt, daß die gegebenen Räume kein Freisystem darstellen, und es gilt:

Satz 7. *Getrennte lineare Räume ergeben dann und nur dann ein Freisystem, wenn sie sich in freier Lage befinden.*

3. Getrennte Freisysteme

In ähnlicher Weise wie der letzte Satz ergibt sich der folgende:

Satz 8. *Ist in einem System G von linearen Räumen eine Gerade g enthalten, so läßt sich durch jeden Punkt X des zu G gehörigen Raums L_ϱ ein $L_{\varrho-1}$ legen, dessen Schnitt mit G zum $L_{\varrho-1}$ gehört, und ebenso ein L_ν, dessen Schnitt mit G nur aus Punkten besteht und zum L_ν gehört.*

Zum Beweis nehme man in G $\varrho + 1$ linear unabhängige Punkte an, darunter die Punkte P und Q auf der Geraden g. Durch die $\varrho - 1$ andern und den Punkt X lege man im L_ϱ einen $L_{\varrho-1}$, der die Gerade g im Punkt R trifft. Da auch der Punkt R in G enthalten und von den $\varrho - 1$ andern Punkten unabhängig ist, muß der Schnitt des $L_{\varrho-1}$ mit G zum $L_{\varrho-1}$ gehören. Wenn dieser Schnitt noch eine Gerade enthält, so kann man das Verfahren wiederholen, bis sich ein Raum L_ν ergibt, der G nur in einem Punktsystem trifft.

Ist G ein Freisystem, so sind diese Punkte linear unabhängig und es folgt:

Satz 9. *Bei einem Freisystem kann man durch jeden Punkt des zugehörigen Raums einen L_ν legen, bei passend gewähltem ν, der das System in $\nu + 1$ linear unabhängigen Punkten trifft.*

Daraus ergibt sich weiter:

Satz 10. *Fügt man zu einem Freisystem im zugehörigen Raum einen neuen Punkt hinzu, oder auch mehrere, so ist das entstehende System nicht mehr Freisystem.*

Umgekehrt kann man also von einem Freisystem keine einzelnen Punkte weglassen, ohne die Dimension des zugehörigen Raums zu vermindern.

Allgemeiner gilt noch:

Satz 11. *Ist $G = A + B$ ein Freisystem und $AB = 0$, so kann der zu A gehörige lineare Raum das Gebilde B nicht treffen.*

Wenn nämlich der zu A gehörige Raum mit B einen Punkt X gemeinsam hätte, so könnte man nach Satz 9 durch X einen L_ν legen, der A in $\nu + 1$ Punkten trifft; der Schnitt von G mit dem L_ν wäre dann kein Freisystem. Weiter folgt:

Satz 12. *Ist $G = A + B$ ein Freisystem und $AB = 0$, so können die zu A und zu B gehörigen Räume sich nicht in genau einem Punkt X treffen.*

Man könnte sonst durch X einen L_μ legen, der A in $\mu + 1$, und einen L_ν, der B in $\nu + 1$ Punkten treffen würde. Dann würde aber der Verbindungsraum $[L_\mu, L_\nu] = L_{\mu+\nu}$ das Gebilde G in $\mu + \nu + 2$ einzelnen Punkten treffen, was unmöglich ist.

Es werde jetzt angenommen, daß die zu den Freisystemen A und B gehörenden Räume $[A] = L_\alpha$ und $[B] = L_\beta$ mindestens eine Gerade gemeinsam haben, d. h. es sei $L_\alpha L_\beta = L_\sigma$ und $\sigma \geqq 1$; aber in Übereinstimmung mit Satz 11 sei $AL_\sigma = 0$ und $BL_\sigma = 0$. Ferner sei $[L_\alpha, L_\beta] = L_\varrho$, also $\varrho = \alpha + \beta - \sigma$, und in A sei eine Gerade g enthalten. Man wähle nun in A $\alpha + 1$ linear unabhängige Punkte, darunter die Punkte P und Q auf der Geraden g. Durch $\alpha - \sigma - 1$ der andern Punkte und den L_σ kann man im L_α einen $L_{\alpha-1}$ legen, welcher die Gerade g in einem Punkt R trifft, wobei R von den $\alpha - \sigma - 1$ Punkten linear unabhängig ist. Der zum Schnitt von A mit dem $L_{\alpha-1}$ gehörige Raum hat also mindestens die Dimension $(\alpha - 1) - \sigma$ und muß deshalb den L_σ treffen. Es gibt daher im L_ϱ einen $L_{\varrho-1} = [L_{\alpha-1}, L_\beta]$, welcher die Gebilde A und B in $AL_{\alpha-1}$ und B so schneidet, daß die zugehörigen Räume sich immer noch treffen.

Dieses Verfahren kann man für A und entsprechend für B so lange fortsetzen, bis entweder die zugehörigen Räume nur noch einen Punkt gemeinsam haben, oder der Schnitt selbst nur ein Punktsystem darstellt. In beiden Fällen ist aber der Schnitt nach Satz 12 bzw. Satz 5 und 7 kein Freisystem, und daraus folgt, daß auch das Gebilde $A + B$ kein Freisystem ist.

Wegen Frg. Satz 7 ergibt sich somit:

Satz 13. *Zwei Freisysteme ohne gemeinsamen Punkt ergeben zusammen dann und nur dann wieder ein Freisystem, wenn sich die zugehörigen Räume nicht treffen.*

Daraus folgt weiter:

Satz 14. *Beliebige Freisysteme ohne gemeinsame Punkte ergeben zusammen dann und nur dann wieder ein Freisystem, wenn sich die zugehörigen Räume in freier Lage befinden.*

4. Systeme von Geraden

Es sei jetzt ein eindimensionales, zusammenhängendes System G vorgelegt. Es bestehe aus den r Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_r$, wobei die Bezeichnung so gewählt werden kann, daß das System $(g_1, g_2, \ldots, g_i)$ von der Geraden g_{i+1} getroffen wird $(i = 1, 2, \ldots, r - 1)$, so daß also auch die Systeme $(g_1, \ldots, g_i)$ stets zusammenhängend sind. Nimmt man dann, unter Vermeidung der gegenseitigen Schnittpunkte der Geraden, auf g_1 zwei Punkte P_0 und P_1 an, auf g_2 einen weiteren P_2 usw., schließlich auf g_r den Punkt P_r, so muß der Verbindungsraum $[P_0, P_1, \ldots, P_r]$ dieser Punkte alle Geraden enthalten. Daraus folgt, daß der zu G gehörige Raum L_ϱ höchstens die Dimension r besitzt.

Schneidet man nun das System G im L_ϱ durch einen $L_{\varrho-1}$, der die Schnittpunkte $g_i g_k$ vermeidet, so wird jede Gerade g_i in genau einem Punkt Q_i getroffen $(i = 1, 2, \ldots, r)$, und wenn G ein Freisystem ist, so sind diese Punkte linear unabhängig. Daraus folgt aber, daß in diesem Fall $\varrho \geqq r$ und daher $\varrho = r$ sein muß.

Ist umgekehrt $\varrho = r$, und setzt man die Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_r$ der Reihe nach zusammen, so muß die Dimension des zugehörigen Raums bei jedem Schritt um 1 zunehmen, und es kann jedesmal höchstens ein neuer Schnittpunkt auftreten; im ganzen treffen sich also die Geraden in höchstens $r - 1$ Punkten. Zudem erhält man auf diese Weise nur Freisysteme (vgl. Frg. Satz 8).

Zusammenfassend ergibt sich also, wenn r durch $r + 1$ ersetzt wird:

Satz 15. *Ein eindimensionales, zusammenhängendes Freisystem besteht aus $r + 1$ Geraden ($r \geqq 0$), die sich in höchstens r Punkten treffen und so liegen, daß der zugehörige Raum die Dimension $r + 1$ besitzt; umgekehrt ergeben $r + 1$ zusammenhängende Geraden in dieser Lage stets ein Freisystem.*

Mehrere Geraden *treffen sich zyklisch*, wenn bei bestimmter Reihenfolge jede die folgende und die letzte wieder die erste trifft. Für solche Geraden gilt:

Satz 16. *Wenn sich $r + 1$ Geraden zyklisch treffen, so liegen sie entweder in einem höchstens r-dimensionalen Raum, oder sie gehen alle durch einen Punkt.*

Wenn man die Geraden der Reihe nach zusammensetzt, so nimmt die Dimension des Verbindungsraums jedesmal um höchstens 1 zu. Die Geraden $g_1, \ldots, g_{r-1}$ liegen daher in einem Raum von höchstens r Dimensionen. Wenn dann g_r die Geraden g_{r-1} und g_0 in zwei verschiedenen Punkten trifft, so liegt auch g_r in diesem Raum. Wenn also umgekehrt die Geraden nicht in einem höchstens r-dimensionalen Raum liegen, so müssen je drei aufeinanderfolgende und folglich alle Geraden durch denselben Punkt gehen. Nur in diesem Falle, wo sie zu einem L_{r+1} gehören, bilden sie ein Freisystem.

Ein System von Geraden, die sich zyklisch treffen, ohne daß alle durch denselben Punkt gehen, werde als *Zykel* bezeichnet, die gegenseitigen Schnittpunkte der Geraden als seine *Ecken*. Aus dem Bisherigen folgt:

Satz 17. *Ein Zykel wird von einem linearen Raum, der alle Geraden trifft, aber keine der Ecken enthält, stets in linear abhängigen Punkten getroffen. Er ist nie ein Freisystem.*

5. Beliebige Systeme

G sei jetzt ein zusammenhängendes Gebilde, das aus den Räumen $L_{\alpha_0}, \ldots, L_{\alpha_r}$ besteht. Dabei kann wieder die Bezeichnung so gewählt werden, daß das System $(L_{\alpha_0}, \ldots, L_{\alpha_{i-1}})$ vom Raum L_{α_i} getroffen wird, und zwar soll der Schnitt mindestens einen L_{σ_i} enthalten ($\sigma_i \geqq 0$,

$i = 1, 2, \ldots, r$). Man kann nun im L_{α_0} $\alpha_0 + 1$ linear unabhängige Punkte annehmen, weiter im L_{α_1} $\alpha_1 - \sigma_1$, allgemein im L_{α_i} $\alpha_i - \sigma_i$ Punkte derart, daß sie je mit dem L_{σ_i} zusammen den L_{α_i} bestimmen. Der Verbindungsraum aller dieser $1 + \sum_{i=0}^{r} \alpha_i - \sum_{i=1}^{r} \sigma_i$ Punkte enthält dann das ganze Gebilde G; die Dimension des zugehörigen Raums L_ϱ ist daher höchstens gleich $\sum_{i=0}^{r} \alpha_i - \sum_{i=1}^{r} \sigma_i$.

Ist genau $\varrho = \Sigma\alpha_i - \Sigma\sigma_i$, so ist G ein Freisystem, denn wenn man die Räume L_{α_i} der Reihe nach zusammenfügt, so muß die Dimension des Verbindungsraums jeweils um genau $\alpha_i - \sigma_i$ zunehmen, was nach Frg. Satz 8, Zusatz, stets Freisysteme ergibt. Es können in diesem Fall auch keine weiteren Schnitträume zwischen den L_{α_i} auftreten, die nicht in den L_{σ_i} enthalten wären. Es folgt also:

Satz 18. *Es sei $G = \sum_{i=0}^{r} L_{\alpha_i}$, $[G] = L_\varrho$, und im Schnitt $L_{\alpha_i} \sum_{j=0}^{i-1} L_{\alpha_j}$ sei L_{σ_i} enthalten. Ist dann $\varrho = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i - \sum_{i=1}^{r} \sigma_i$, so ist G ein Freisystem, und alle Schnitträume zwischen den Räumen L_{α_i} sind in den L_{σ_i} enthalten.*

Wegen Satz 14 gilt dies auch für nichtzusammenhängende Systeme, d. h. auch dann, wenn gewisse $\sigma_i = -1$ sind.

Man kann stets voraussetzen, daß die L_{α_i} irreduzible Teile von G sind, also kein L_{α_i} in einem andern L_{α_j} enthalten ist; ihre Anzahl sei $r+1$. Es gilt dann:

Satz 19. *Ist $G = \sum_{i=0}^{r} L_{\alpha_i}$ ein Freisystem und stets $L_{\alpha_i} L_{\alpha_j} \neq L_{\alpha_i}$ für $i \neq j$, so gibt es einen L_r, der G in $r+1$ linear unabhängigen Punkten trifft. Die Ordnung[5]) eines Freisystems ist also gleich der Anzahl seiner irreduziblen Teile.*

Da nämlich die Schnitträume $L_{\alpha_i} L_{\alpha_j}$ stets kleinere Dimension haben wie L_{α_i}, so kann man in jedem Raum L_{α_i} einen Punkt P_i finden, der keinem andern L_{α_j} angehört. Da dann P_0 nur in L_{α_0} und P_1 nur in L_{α_1} liegt, kann die Gerade $[P_0, P_1]$ keinem der Räume L_{α_i} ganz angehören; sie trifft daher G nur in Punkten, und da diese linear unabhängig sein müssen, nur in P_0 und P_1. Ebenso kann auch die Ebene $[P_0, P_1, P_2]$ mit G keine Gerade gemeinsam haben, da diese mindestens eine der Seiten des Dreiecks $P_0 P_1 P_2$ in einem weiteren Punkt von G treffen müßte; sie trifft also G nur in den Punkten P_0, P_1, P_2. Analog schließt man für

[5]) Die Ordnung eines algebraischen Gebildes (A. G. § 5, S. 288) ist als die Maximalzahl der Schnittpunkte mit linearen Räumen definiert, die nicht in unendlich vielen Punkten treffen. Die Ordnung eines Systems von linearen Räumen kann nicht größer, wohl aber kleiner sein als die Anzahl seiner irreduziblen Teile.

$[P_0, P_1, P_2, P_3]$ usw. bis zu $[P_0, P_1, \ldots, P_r] = L_r$. Dieser Raum trifft also G nur in den $r + 1$ Punkten P_i.

Man kann jedoch Satz 19 nicht direkt umkehren, da z. B. drei windschiefe Gerade im L_3 kein Freisystem ergeben.

Aus dem eben Bewiesenen folgt aber noch:

Satz 20. *Liegen die Punkte $P_0, \ldots, P_s$ nur in je einem Raum L_{α_i} des Freisystems $G = \sum L_{\alpha}{}^i$, aber nicht zwei in demselben, so trifft der Verbindungsraum $[P_0, \ldots, P_s]$ das Gebilde G nur in den linear unabhängigen Punkten $P_0, \ldots, P_s$.*

6. Sich schließende und gebundene Räume

Es werde jetzt ein System $G = \sum_{i=0}^{r} L_{\alpha_i}$ $(r > 1)$ von linearen Räumen betrachtet, die sich zyklisch treffen, und zwar sei der Schnitt $L_{\alpha_{i-1}} L_{\alpha_i} = L_{\sigma_i}$, $L_{\alpha_r} L_{\alpha_0} = L_{\sigma_0}$. Wir sagen, die Räume L_{α_i} *schließen sich,* wenn es einen Zykel gibt, dessen Ecken Q_i je im L_{σ_i} liegen, während die Geraden $g_i = [Q_i, Q_{i+1}]$ (mit $Q_{r+1} = Q_0$) je dem L_{α_i}, aber keinem andern $L_{\alpha_j} (i \neq j)$ vollständig angehören.

Es ist dann möglich, in jeder Geraden g_i einen Punkt P_i anzunehmen, der nur im Raum L_{α_i} enthalten ist. Wäre nun G ein Freisystem, so würde der Verbindungsraum $L_r = [P_0, \ldots, P_r]$ das Gebilde G und damit auch den Zykel nach Satz 20 nur in den unabhängigen Punkten P_i treffen, was mit Satz 17 in Widerspruch steht. Es folgt also:

Satz 21. *Die Räume L_{α_i} eines Freisystems $\sum L_{\alpha_i}$ können sich nicht schließen.*

Es wäre jedoch unrichtig, anzunehmen, daß sich auch beliebige Teilräume eines Freisystems nicht schließen könnten. Man lege durch die Seiten a, b, c eines in der Ebene E gelegenen Dreiecks die Ebenen A, B, Γ so, daß sie zusammen einen L_5 bestimmen. Dann bilden die vier Ebenen zusammen ein Freisystem, aber die Ebenen des Teilsystems (A, B, Γ) schließen sich.

Nun sei $G = \sum L_{\alpha_i}$ ein beliebiges System von linearen Räumen, wobei nur angenommen sei, daß kein L_{α_i} ganz in einem andern L_{α_j} enthalten sei. Die von L_{α_i} verschiedenen Räume[6]) L_{α_j} ergeben dann zusammen den *Rest* von G in bezug auf L_{α_i}. Weiter heiße L_{α_i} ein *gebundener* Raum in G, wenn der Schnitt von L_{α_i} mit dem Rest von G nicht nur aus einem einzigen Raum L_σ besteht. Es ist zu zeigen, daß ein Freisystem nicht nur aus gebundenen Räumen bestehen kann.

Die Schnitte $L_{\alpha_i} L_{\alpha_j}$ $(i \neq j)$ seien mit $L_{\sigma_{ij}}$ bezeichnet. Ein gebundener

---

[6]) Ist $G = L_{\alpha_i}$, so ist der L_{-1} als „Rest" zu betrachten.

Raum L_{α_i} trifft den Rest in wenigstens zwei Räumen $L_{\sigma_{ij}}$ und $L_{\sigma_{ik}}$, von denen keiner im andern enthalten ist, und die außerdem als *maximale* Schnitträume anzunehmen sind, d. h. keiner soll in einem $L_{\sigma_{il}}$ von größerer Dimension enthalten sein. Man kann dann im $L_{\sigma_{ij}}$ und $L_{\sigma_{ik}}$ die Punkte Q_j und $Q_k \neq Q_j$ so annehmen, daß die Gerade $[Q_j, Q_k]$ nur dem L_{α_i} ganz angehört, denn andernfalls müßte der Verbindungsraum $[L_{\sigma_{ij}}, L_{\sigma_{ik}}]$ ganz zum Rest, also zu einem $L_{\sigma_{il}}$ gehören. Wir sagen nun, daß die Gerade $[Q_j, Q_k]$ zwischen den Räumen $L_{\sigma_{ij}}$ und $L_{\sigma_{ik}}$ eine *echte* Verbindung herstellt.

Enthält nun G nur gebundene Räume, so gehe man von einem beliebigen derselben, etwa L_{α_0}, aus und bezeichne einen der maximalen Schnitträume $L_{\sigma_{0i}}$, der von einem L_{α_i} ausgeschnitten wird, mit L_{σ_1}. Im Raum L_{α_i} nehme man einen maximalen Schnittraum $L_{\sigma_{ij}}$, welcher den L_{σ_1} nicht enthält (wobei zunächst angenommen wird, daß dies jedesmal möglich sei), und bezeichne ihn mit L_{σ_2}. Im Raum L_{α_j}, der den L_{σ_2} ausschneidet, bestimme man ebenso einen L_{σ_3} usf. Da G nur aus endlich vielen Räumen zusammengesetzt ist, muß schließlich ein L_{σ_p} von einem Raum L_α ausgeschnitten werden, in dem vorher schon ein L_{σ_k} $(k < p)$ bestimmt wurde. Wenn durch den L_{σ_p} mehrere solche Räume L_α gehen, so nehme man den, für welchen k am größten wird. Der Raum L_{σ_k} kann dann den Raum L_{σ_p} nicht enthalten, denn sonst könnte man den Raum L_α durch den in der vorangehenden Konstruktion, die zum L_{σ_k} führte, nächstfolgenden ersetzen, der auch L_{σ_p} enthalten würde, und könnte somit k um 1 vergrößern.

Man kann jetzt durch passende Gerade zwischen L_{σ_k} und $L_{\sigma_{k+1}}$, dann zwischen $L_{\sigma_{k+1}}$ und $L_{\sigma_{k+2}}$ usw., schließlich zwischen L_{σ_p} und L_{σ_k} je eine echte Verbindung herstellen. Eine solche ist stets möglich, denn der Raum $L_{\sigma_{m+1}}$ enthält nach Voraussetzung nicht den Raum L_{σ_m} und ist als maximaler Schnittraum auch nicht in ihm enthalten. Es gibt also Punkte Q_m im L_{σ_m} und Q_{m+1} im $L_{\sigma_{m+1}}$, deren Verbindung nicht in diesen Schnitträumen liegt. Würden alle solchen Geraden $[Q_m, Q_{m+1}]$ noch in einem andern Schnittraum L_σ liegen, so wäre $L_{\sigma_{m+1}}$ nicht maximal. Es gibt also solche, die nur einem L_α ganz angehören und somit echte Verbindungen sind.

Man kann schließlich noch erreichen, daß aufeinanderfolgende Gerade $[Q_{m-1}, Q_m]$ und $[Q_m, Q_{m+1}]$ den Raum L_{σ_m} im selben Punkt Q_m treffen. Da es nämlich, wie eben gezeigt, für beide Geraden im L_{σ_m} wenigstens je einen zulässigen Punkt gibt, so können die nicht zulässigen Punkte im L_{σ_m} nur in geringerer Dimension vorhanden sein; es gibt also wenigstens einen Punkt Q_m, der für beide Geraden zugleich zulässig ist. Es gilt dies auch für $m = p$, wenn für $p+1$ k gesetzt wird. Die so bestimmten Geraden bilden dann einen Zykel, und die sie enthaltenden Räume, die ein Teilsystem von G bilden, schließen sich.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß zu einem L_{σ_m} kein maximaler $L_{\sigma_{m+1}}$ gefunden werden kann, welcher den L_{σ_m} nicht enthält, und zwar in keinem der L_α, die den L_{σ_m} ausschneiden. Die Schnitte dieser L_α mit andern, den L_{σ_m} nicht enthaltenden Räumen von G können dann in den L_α nicht maximal sein, und da die L_α gebundene Räume sind, müssen ihre maximalen Schnitträume, die sämtlich den L_{σ_m} enthalten, größere Dimension als dieser Raum besitzen. Man breche nun die Konstruktion ab und beginne sie mit dem System der Räume L_α aufs neue. Wenn dann die Konstruktion bei einem L_{σ_n} wieder abbricht, so ist $\sigma_n > \sigma_m$ und man kommt zu Schnitträumen von noch höherer Dimension. Da aber die Dimensionen beschränkt sind, so muß man schließlich doch zu einem Teilsystem gelangen, das sich schließt. Es gilt also:

Satz 22. *Wenn ein System von linearen Räumen nur gebundene Räume enthält, so gibt es darin ein Teilsystem, das sich schließt.*

Aus diesem Satz allein läßt sich nach der Bemerkung zu Satz 21 nicht folgern, daß das betrachtete System kein Freisystem sein kann. Aus der angegebenen Konstruktion des sich schließenden Teilsystems und des zugehörigen Zykels geht jedoch hervor, daß man auf den Seiten $[Q_m, Q_{m+1}]$ des Zykels Punkte P_m annehmen kann, die nur je einem der Räume L_{α_i} von G angehören. Wäre nun G ein Freisystem, so würde es nach Satz 20 von dem Verbindungsraum der Punkte P_m nur in diesen Punkten getroffen, was aber mit Satz 17 in Widerspruch steht. Es folgt also:

Satz 23. *Ein Freisystem kann nicht nur aus gebundenen Räumen bestehen.*

7. Struktur der Freisysteme

Ist also $G = \sum_{i=0}^{r} L_{\alpha_i}$ ein Freisystem und wieder $L_{\alpha_i} L_{\alpha_j} \neq L_{\alpha_i}$ für $i \neq j$, so ist wenigstens einer der Räume L_{α_i}, es sei dies L_{α_r}, kein gebundener Raum, d. h. der Schnitt des L_{α_r} mit dem Rest $G' = \sum_{i=0}^{r-1} L_{\alpha_i}$ ist ein linearer Raum L_σ.

G' ist dann ebenfalls Freisystem und der zu G' gehörende Raum $[G']$ wird vom L_{α_r} nur im L_σ getroffen.

Gäbe es nämlich einen L_ν, welcher G' in linear abhängigen Punkten trifft, so müßte der Schnitt des L_ν mit L_{α_r} wenigstens zwei von diesen Punkten verbinden, da sonst der Schnitt des L_ν mit G nach Frg. Satz 5 kein Freisystem wäre. Dann wäre aber L_{α_r} entgegen der Voraussetzung ein gebundener Raum. G' ist also Freisystem.

Hätte nun der L_{α_r} außer L_σ noch einen Punkt P mit $[G']$ gemein, so könnte man nach Satz 9 durch P einen L_ν legen, welcher G' in $\nu+1$ linear unabhängigen Punkten trifft. Da der Schnitt des L_ν mit G Freisystem sein muß, so müßte der Schnitt des L_ν mit L_{α_r}, da er noch P enthält, wenigstens zwei der $\nu+1$ Punkte verbinden und der L_{α_r} wäre wieder ein gebundener Raum. Es gilt also:

Satz 24. *In einem Freisystem G gibt es stets einen linearen Raum L_α derart, daß der Rest G' wieder Freisystem ist und der zu G' gehörende Raum den L_α in einem L_σ schneidet, der in G' enthalten ist.*

Ist in Satz 24 $[G] = L_\varrho$ und $[G'] = L_{\varrho'}$, so ist $\varrho = \varrho' + (\alpha - \sigma)$. Auf G' statt G ist dann derselbe Satz wieder anwendbar und man kann das Freisystem weiter reduzieren bis zum L_{-1}. Bezeichnet man die weggenommenen Räume in umgekehrter Reihenfolge mit $L_{\alpha_0}, \ldots, L_{\alpha_r}$ und den Schnitt $L_{\alpha_i}\sum_{j=0}^{i-1} L_{\alpha_j}$ mit $L_{\sigma_i} (i = 1, \ldots, r)$, so folgt, daß $\varrho = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i - \sigma_i) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i - \sum_{i=1}^{r} \sigma_i$ wird. Mit Satz 18 zusammen ergibt sich also:

Satz 25. *Ein System G von linearen Räumen bildet dann und nur dann ein Freisystem, wenn sich $G = \sum_{i=0}^{r} L_{\alpha_i}$ so darstellen läßt, daß $L_{\alpha_i}\sum_{j=0}^{i-1} L_{\alpha_j} = L_{\sigma_i}$ wird und für die Dimension ϱ des zu G gehörigen Raums gilt:*

$$\varrho = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i - \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \ .$$

Da ϱ nicht größer als $\sum_{i=0}^{r} \alpha_i - \sum_{i=1}^{r} \sigma_i$ werden kann, so befinden sich die Räume L_{α_i} eines Freisystems unter Beibehaltung der Schnitträume „in möglichst freier Lage".

Jedes Freisystem läßt sich also aus linearen Räumen so aufbauen, daß jeweils durch einen schon vorhandenen L_σ ein L_α gelegt wird, welcher die Dimension des zugehörigen Raums möglichst stark, d. h. um $\alpha - \sigma$, vergrößert. Es genügt auch, jeweils durch einen L_σ einen $L_{\sigma+1}$ zu legen, welcher die Dimension des zugehörigen Raums um 1 vergrößert:

Satz 26. *Jedes beliebige Freisystem, und nur solche, kann man erhalten, indem man vom Nullgebilde L_{-1} ausgehend jeweils durch einen im System schon enthaltenen L_σ einen $L_{\sigma+1}$ (oder einen L_α) legt ($\sigma \geqq -1$, $\alpha > \sigma$), welcher die Dimension des zugehörigen Raums um 1 (bzw. um $\alpha - \sigma$) vergrößert.*

Weiter gilt noch:

Satz 27. *Jedes beliebige System von (endlich vielen) linearen Räumen läßt sich in einem Raum genügend hoher Dimension in einem Freisystem darstellen als Schnitt eines Raums des Freisystems mit dem zugehörigen Rest.*

Man braucht dazu nur den zum gegebenen System $\sum L_{\alpha_i}$ gehörenden Raum zu nehmen und durch jeden der Räume L_{α_i} einen Raum L_{α_i+1} zu legen, der jedesmal die Dimension des zugehörigen Raums vergrößert.

8. Abänderung von Freisystemen

Aus Satz 25 folgt

Satz 28. *In jedem Freisystem* $G = \sum_{i=0}^{r} L_{\alpha_i}$ *mit* $L_{\alpha_i} \sum_{j=0}^{i-1} L_{\alpha_j} = L_{\sigma_i}$ *und* $\varrho = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i - \sum_{i=1}^{r} \sigma_i$ *kann man die* $m+1$ *ersten Räume* $\sum_{i=0}^{m} L_{\alpha_i}$ *durch den zugehörigen Raum* L_μ *ersetzen, um wieder ein Freisystem* $L_\mu + \sum_{i=m+1}^{r} L_{\alpha_i}$ *zu erhalten.*

Es ist nämlich $\mu = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i - \sum_{i=1}^{m} \sigma_i$, also $\varrho = \mu + \sum_{i=m+1}^{r} \alpha_i - \sum_{i=m+1}^{r} \sigma_i$.

Man könnte nun vermuten, daß es allgemein gestattet sei, einen beliebigen Teil eines Freisystems durch den zugehörigen Raum zu ersetzen, um wieder ein Freisystem zu erhalten. Daß dies jedoch nicht gilt, zeigt das folgende Beispiel:

Zwei windschiefe Gerade a und b liegen im L_3. Ein Punkt A von a und ein Punkt B von b werden mit einem nicht im L_3 liegenden Punkt P durch die Geraden c und d verbunden. Die vier Geraden a, b, c, d bilden ein Freisystem. Ersetzt man aber den aus a und b bestehenden Teil desselben durch den zugehörigen Raum L_3, so ergibt dieser mit c und d zusammen kein Freisystem.

Umgekehrt gilt jedoch für beliebige Freigebilde, nicht nur für Freisysteme:

Satz 29. *Ist in einem Freigebilde ein linearer Raum* L_α *enthalten, so kann man diesen, um wieder ein Freigebilde zu erhalten, durch ein beliebiges im* L_α *enthaltenes Freigebilde ersetzen, sofern dieses den Schnitt des* L_α *mit dem zugehörigen Rest enthält.*

Würde nämlich das entstehende Gebilde von einem L_ν in linear abhängigen Punkten getroffen, so wären darunter nach Frg. Satz 5 die nicht im L_α liegenden Punkte P_i und nach Voraussetzung auch die im L_α

liegenden Punkte Q_i linear unabhängig. Der Verbindungsraum der Punkte P_i müßte also den Raum L_α treffen, was bei dem gegebenen Freigebilde nicht möglich ist.

9. Anzahlbestimmung

Um die Anzahl der verschiedenen, im L_n enthaltenen Freisysteme zu bestimmen, kann man zunächst die freien Räume und die zusammenhängenden Freisysteme je für sich betrachten, um dann durch Kombination nach Satz 14 alle möglichen Freisysteme zu erhalten.

Für die freien Räume gilt:

Satz 30. *Die Anzahl der projektiv verschiedenen, zum L_n gehörenden Systeme von freien Räumen ist gleich der Anzahl der Zerfällungen der Zahl $n+1$ in eine Summe von natürlichen Zahlen, ohne Rücksicht auf die Reihenfolge der Summanden.*

Legt man nämlich die Räume L_{α_i} eines solchen Systems durch je α_i+1 linear unabhängige Punkte fest, so ist nach Satz 2 $\Sigma(\alpha_i+1)=n+1$, und da man jedes geordnete System von $n+1$ linear unabhängigen Punkten in jedes andere durch eine projektive Transformation überführen kann, so sind zwei Systeme ΣL_{α_i} von freien Räumen projektiv äquivalent, wenn die Dimensionen α_i bei passend gewählter Reihenfolge entsprechend übereinstimmen.

Wird die Anzahl der Zerfällungen der Zahl i, deren kleinster Summand größer oder gleich j ist, mit $s_{i,j}$ bezeichnet, so gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} s_{i,j} &= s_{i,j+1} + s_{i-j,j} && \text{für} \quad 0<j<i\,, \\ s_{i,i} &= 1 && \text{für} \quad 0<i\,, \\ s_{i,k} &= 0 && \text{für} \quad 0<i<k\,. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} s_{i,j} &= s_{i,j+1} + s_{i-j,j} && \text{für} \quad 0<j<\left[\tfrac{i}{2}\right], \\ s_{i,j} &= 2 && \text{für} \quad 1<j=\left[\tfrac{i}{2}\right], \\ s_{i,j} &= 1 && \text{für} \quad \left[\tfrac{i}{2}\right]<j\leqq i\,. \end{aligned}$$

Damit läßt sich durch einfache Additionen die Gesamtzahl $p(i)=s_{i,1}$ der Zerfällungen von i bestimmen, wobei $p(0)=1$ gesetzt wird. Wird noch $u(n)=p(n+1)$ gesetzt, so ergeben sich die Werte

$$u(n) = 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11$$

als Anzahlen der zum L_{-1} bis L_5 gehörenden Systeme von freien Räumen[7]).

Bei der Zählung der übrigen Freisysteme ist zu beachten, daß es im L_5 schon unendlich viele projektiv verschiedene gibt. Legt man nämlich durch vier Punkte einer Geraden je eine weitere Gerade nach der zweiten bis fünften Dimension, so erhält man ein Freisystem, das noch von dem Doppelverhältnis der vier Punkte abhängig ist.

Man kann jedoch unter den Freisystemen im L_n endlich viele Typen unterscheiden. Diese sind aber nicht immer schon durch die Angabe der Dimensionen der Teil- und ihrer Schnitträume bestimmt, es kann auch noch die Lage der Schnitträume wesentlich sein. So kann man im L_5 durch drei Punkte einer Ebene je eine Gerade legen; die drei Punkte

---

[7]) Eine direkte Rekursionsformel für $p(i)$ gab *L. Euler*, De partitione numerorum, Opera omnia Ser. I, Vol. II, p. 254—294. Aus den obigen Formeln läßt sie sich in folgender Weise herleiten:

Setzt man $s_{0,j} = 1$ und $s_{k,j} = 0$ für $k < 0$, so gilt allgemein:

$$s_{i,j} = s_{i,j+1} + s_{i-j,j} \quad \text{für} \quad j > 0,$$

also auch

$$s_{i,j} = s_{i,1} - \sum_{k=1}^{j-1} s_{i-k,k}.$$

Wenn man mit dieser Formel ihre rechte Seite weiter reduziert, so folgt

$$s_{i,j} = s_{i,1} - \sum_{k=1}^{j-1} s_{i-k,1} + \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=1}^{k-1} s_{i-k-l,1} - \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=1}^{l-1} s_{i-k-l-m,1} + \cdots.$$

Weiter ist nach derselben Formel:

$$s_{i,1} = s_{i,i} + \sum_{j=1}^{i-1} s_{i-j,j},$$

also wird

$$s_{i,1} = \sum_{j=1}^{i} s_{i-j,1} - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} s_{i-j-k,1} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{l=1}^{k-1} s_{i-j-k-l,1} - \cdots$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{i} \lambda_\kappa s_{i-\kappa,1},$$

d. h.

$$p(i) = \sum_{\kappa=1}^{i} \lambda_\kappa p(i-\kappa).$$

Dabei ist $i > j > k > l > m > \ldots > 0$, also ist λ_κ gleich der Anzahl der Zerfällungen von κ in eine ungerade Anzahl von verschiedenen Summanden, vermindert um die Anzahl der Zerfällungen von κ in eine gerade Anzahl von verschiedenen Summanden. Es gilt daher für λ_κ der *Euler-Legendre*'sche Pentagonalzahlensatz, d. h. es ist

$$-\lambda_\kappa = (-1)^n \quad \text{für} \quad \kappa = \frac{3n^2 \pm n}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_\kappa = 0 \quad \text{sonst.}$$

Einen einfachen arithmetischen Beweis für diesen Satz gab *J. Franklin*, Comptes Rendus 92 (1881), S. 448. Vgl. auch *K. Th. Vahlen*, Journal für Math. 112 (1893), S. 1.

Die Werte von $p(i) = u(i-1)$ bis zu $p(600)$ finden sich bei *H. Gupta*, Proc. Lond. math. Soc. (2) 39 (1935), S. 142; 42 (1937), S. 546.

können aber selbst in gerader Linie liegen oder auch nicht. Bei höheren Dimensionen müßten noch weitere Festsetzungen darüber getroffen werden, wann zwei Freisysteme zum selben Typus zu rechnen sind und wann nicht. So könnte man es z. B. als besonderen Fall zählen, wenn im L_8 eine Ebene von 6 Geraden in den Punkten eines Kegelschnitts getroffen wird usw.

Die Anzahl $z(n)$ der zum L_n gehörenden zusammenhängenden Freisysteme von verschiedenem Typus ist also für größere Werte von n nicht eindeutig festgelegt; eine einfache Formel dafür ist nicht ersichtlich. Man kann aber alle möglichen Fälle nach Satz 26 in systematischer Weise aufstellen und findet so für den L_{-1} bis L_5 die Werte

$$z(n) = 1, 1, 1, 2, 5, 16, 66.$$

Dabei ist (im L_5) die harmonische Lage nicht als besonderer Fall gezählt.

Wenn nun ein beliebiges Freisystem in getrennte Teile zerfällt, so sind diese Teile nach Frg. Satz 6 selbst wieder Freisysteme. Man erhält also nach Satz 14 alle zum L_n gehörenden Freisysteme, wenn man in den zum L_n gehörenden Systemen von freien Räumen die einzelnen Teilräume L_{α_i} durch beliebige, zum L_{α_i} gehörige zusammenhängende Freisysteme ersetzt.

Sind in einem System ΣL_{α_i} von freien Räumen je r_i der Zahlen α_i einander gleich, so daß der Index i die Teilräume verschiedener Dimension unterscheidet, so erhält man aus ihm $\prod\limits_i \binom{z(\alpha_i) + r_i - 1}{r_i}$ verschiedene Freisysteme. Wenn dann noch der Index j die verschiedenen zum L_n gehörenden Systeme von freien Räumen unterscheidet, so erhält man als Gesamtzahl der wesentlich verschiedenen, zum L_n gehörenden Freisysteme den Wert

$$f(n) = \sum_{j=1}^{u(n)} \prod_i \binom{z(\alpha_{ij}) + r_{ij} - 1}{r_{ij}} .$$

Für den L_{-1} bis L_5 ergeben sich so die Werte

$$f(n) = 1, 1, 2, 4, 10, 28, 103,$$

so daß also in der Ebene 8, im L_3 18, im L_4 46 und im L_5 149 verschiedene Typen von Freisystemen vorhanden sind.

(Eingegangen den 8. September 1938.)