Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 11 (1938-1939)

Artikel: Über faserungstreue Abbildungen der Sphären.

Autor: Hopf, H. / Rueff, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11879

Über faserungstreue Abbildungen der Sphären

Von H. Hopf und M. Rueff, Zürich

1. Wir erinnern zunächst an einen bekannten Satz über die n-dimensionalen Sphären und eine Folgerung aus ihm; ein analoger Satz mit einer analogen Folgerung wird den eigentlichen Inhalt dieser Note bilden.

Ist x ein Punkt der n-dimensionalen Sphäre S^n, so bezeichnen wir durch $-x$ seinen Antipoden auf S^n. Eine Abbildung f der S^n in sich heiße „gerade", falls

$$f(-x) = f(x) \,, \tag{1a}$$

und „ungerade", falls

$$f(-x) = -f(x) \tag{1b}$$

für jeden Punkt x der S^n ist; ein Antipodenpaar wird also durch eine gerade Abbildung auf einen Punkt, durch eine ungerade Abbildung wieder auf ein Antipodenpaar abgebildet. Es gilt

Satz A. *Jede gerade Abbildung der S^n in sich hat geraden, jede ungerade Abbildung ungeraden Abbildungsgrad*[1]).

Der Teil des Satzes, der sich auf die geraden Abbildungen bezieht, ist sehr leicht zu beweisen: durch Identifizierung je zweier antipodischer Punkte der S^n entsteht ein projektiver Raum P^n sowie eine Abbildung p der S^n auf P^n; unter der Voraussetzung (1a) gibt es eine Abbildung f' von P^n in S^n mit $f = f'p$; sind $c_f, c_{f'}, c_p$ die Abbildungsgrade mod. 2 der genannten Abbildungen, so ist $c_f = c_{f'} \cdot c_p$, also, da $c_p \equiv 0$ ist, auch $c_f \equiv 0$ mod. 2.

Der zweite Teil des Satzes A ist nicht so einfach zu beweisen; er stammt von *K. Borsuk*[2]). Es lassen sich aus ihm interessante Folgerungen ziehen, von denen wir hier die folgende anführen[3]):

Satz B. *Auf der Sphäre S^n, die durch*

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_j^2 = 1 \tag{2}$$

---

[1]) Unter einer „Abbildung" soll immer eine *stetige* Abbildung verstanden werden.

[2]) Fund. Math. 20 (1933), S. 177. — Neue Darstellung des Beweises: *Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), S. 483. — Anderer Beweis: *G. Hirsch*, Bull. Acad. r. d. Belgique (Classe des Sciences) XXIII (1937), p. 219. — Noch ein Beweis ergibt sich, wenn man in Nr. 7 und 8 der vorliegenden Arbeit den komplexen projektiven Raum K_n durch den reellen P^n ersetzt.

[3]) *Alexandroff-Hopf*, a. a. O., S. 485, Satz VIII.

erklärt ist, seien n stetige reelle Funktionen $f_r(x_1, \ldots, x_{n+1})$, $r = 1, \ldots, n$, gegeben, die ungerade sind, d. h. die Gleichungen

$$f_r(-x_1, \ldots, -x_{n+1}) = -f_r(x_1, \ldots, x_{n+1}) \tag{3}$$

erfüllen. Dann besitzen die f_r auf der S^n gemeinsame Nullstellen.

Demnach besitzt insbesondere jedes Gleichungssystem

$$f_r(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0 \quad , \qquad r = 1, \ldots, n \; , \tag{4}$$

in welchem die f_r für alle $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ stetig und homogen von ungeraden Graden sind, eine nicht-triviale, d. h. von $(0, \ldots, 0)$ verschiedene, Lösung. Dies ist in dem Spezialfall, in dem die f_r Linearformen sind, ein bekannter elementarer Satz.

2. Dieser elementare Satz bleibt bekanntlich gültig, wenn man unter den x_j und den f_r *komplexe* Veränderliche und *komplexe* Funktionen versteht; es erhebt sich die Frage nach allgemeineren Bedingungen, unter denen das System (4) im Komplexen eine nicht-triviale Lösung besitzt, also im wesentlichen die Frage nach einem „komplexen Analogon" des Satzes B.

Um ein solches Analogon aussprechen zu können, stellen wir dem Begriff der Ungeradheit einer Funktion, der durch (3) gegeben ist, sowie dem ähnlichen der Geradheit den folgenden an die Seite: Die komplexe Funktion $f(z_1, \ldots, z_{n+1})$ der komplexen Veränderlichen z_j heiße „*schwach homogen vom Grade m*", wenn *für jedes komplexe λ vom Betrage* 1 die Funktionalgleichung

$$f(\lambda z_1, \ldots, \lambda z_{n+1}) = \lambda^m \cdot f(z_1, \ldots, z_{n+1}) \tag{5}$$

erfüllt ist. Zum Beispiel sind

$$z_1^2 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2^2 \quad , \qquad \bar{z}_1^2 + z_1 \bar{z}_2^3 \quad , \qquad z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2$$

Funktionen, die schwach homogen von den Graden $+1$, -2 bzw. 0 sind. Jede Funktion, die im gewöhnlichen Sinne homogen vom m-ten Grade ist, ist natürlich schwach homogen von demselben Grade.

Nun gilt, in Analogie zum Satz B,

Satz II. *Für*

$$\sum_{j=1}^{n+1} z_j \bar{z}_j = 1 \tag{6}$$

seien n stetige komplexe Funktionen $f_r(z_1, \ldots, z_{n+1})$, $r = 1, \ldots, n$, der komplexen Veränderlichen $z_1, \ldots, z_{n+1}$ gegeben; sie seien schwach homogen von Graden m_r, die sämtlich $\neq 0$ sind. Dann besitzen die f_r auf der Sphäre (6) *gemeinsame Nullstellen.*

Darin ist enthalten, daß sich die Frage, die wir an das System (4) angeknüpft haben, folgendermaßen beantworten läßt: Das komplexe Gleichungssystem

$$f_r(z_1, \ldots, z_{n+1}) = 0 , \qquad r = 1, \ldots, n , \tag{4'}$$

in dem die f_r für alle $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ stetig seien, besitzt gewiß dann eine von $(0, \ldots, 0)$ verschiedene Lösung, wenn jede Funktion f_r schwach homogen mit einem von 0 verschiedenen Grade ist.

3. Der Satz II wird sich als Korollar eines Satzes I ergeben, der seinerseits ein Analogon zum Satz A darstellt und den wir auch an sich, abgesehen von seiner Anwendbarkeit auf den Beweis des Satzes II, für interessant halten; seine Behandlung ist unser eigentliches Ziel. Um zu ihm zu gelangen, übertragen wir die Begriffe, die im Satz A auftreten, ins Komplexe. Hierfür betrachten wir die Sphäre S^{2n+1}, die in reellen Koordinaten x_k durch

$$\sum_{k=1}^{2n+2} x_k^2 = 1$$

gegeben ist, oder, wenn wir

$$x_{2j-1} + i\, x_{2j} = z_j , \qquad j = 1, \ldots, n+1 ,$$

setzen, durch (6).

Die Zusammenfassung von Punkten der Sphäre (2) zu Antipodenpaaren geschieht durch die Festsetzung: die Punkte $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ und $(x_1', \ldots, x_{n+1}')$ gehören zu einem Paar, wenn

$$x_j' = \lambda x_j , \qquad j = 1, \ldots, n+1 ,$$

mit $\lambda = +1$ oder $\lambda = -1$ ist; hiermit gleichbedeutend ist die Bedingung:

$$x_1' : x_2' : \ldots : x_{n+1}' = x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1} .$$

In analoger Weise fassen wir jetzt Punkte $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ und $(z_1', \ldots, z_{n+1}')$ in eine Klasse zusammen, wenn es ein $\lambda = e^{it}$ gibt, so daß

$$z_j' = e^{it} z_j , \quad j = 1, \ldots, n+1 , \tag{7a}$$

ist, oder, was damit gleichbedeutend ist, wenn die Proportion

$$z_1' : z_2' : \ldots : z_{n+1}' = z_1 : z_2 : \ldots z_{n+1} \tag{7b}$$

besteht.

Man überzeugt sich leicht von den folgenden Tatsachen: durch diese Vorschrift wird die Menge aller Punkte der S^{2n+1} in zueinander fremde Klassen zerlegt; jede dieser Klassen ist ein Großkreis; es geht also durch jeden Punkt genau einer dieser Kreise; variiert ein Punkt stetig auf der S^{2n+1}, so variiert auch der durch ihn gehende Kreis stetig; durch eine unitäre Transformation der z_j kann man die S^{2n+1} topologisch so auf sich abbilden, daß dieses System von Kreisen in sich übergeht und dabei ein willkürlich vorgeschriebener unserer Kreise auf einen willkürlich vorgeschriebenen Kreis des Systems abgebildet wird[4]). Alles dies läßt sich dahin zusammenfassen: es liegt eine „*Faserung*" der S^{2n+1} vor, deren Fasern Großkreise sind und die homogen ist, d. h. keine Ausnahmefaser besitzt[5]). Wir bezeichnen diese Faserung immer durch $\mathfrak{F}$.

Die geraden und die ungeraden Abbildungen der Sphäre S^n, die wir in Nr. 1 betrachtet haben, sind unter allen Abbildungen der S^n in sich dadurch ausgezeichnet, daß jedes Antipodenpaar α in ein Antipodenpaar α' abgebildet wird; indem wir die Punktepaare als 0-dimensionale Sphären auffassen, können wir jeder Abbildung von α in α' einen Abbildungsgrad $\mathfrak{c}$ mod. 2 zuordnen, und zwar ist dieser $\equiv 0$ oder $\equiv 1$, je nachdem α nur auf einen der beiden Punkte von α' oder auf das ganze Paar α' abgebildet wird. Ist nun f eine gerade oder ungerade Abbildung der S^n in sich, für welche $\mathfrak{c}_f$ den Grad mod. 2 der durch f bewirkten Abbildungen der Paare α in die ihnen zugeordneten Paare α' bezeichnet, während c_f der Grad von f selbst ist, so läßt sich der Satz A in der Kongruenz

$$c_f \equiv \mathfrak{c}_f \qquad \text{mod. } 2$$

zusammenfassen.

In analoger Weise betrachten wir jetzt Abbildungen f der S^{2n+1} in sich, welche bezüglich $\mathfrak{F}$ „faserungstreu" sind, d. h. durch welche jede Faser β von $\mathfrak{F}$ in eine Faser β' von $\mathfrak{F}$ abgebildet wird. Alle Fasern seien im Sinne des wachsenden Parameters t, der in (7a) auftritt, orientiert; dann hat für jedes β die Abbildung von β in β' einen bestimmten Grad; aus naheliegenden Stetigkeitsgründen hängt er nicht von der speziellen Faser β ab; wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{c}_f$. Die Frage ist nun die, was für ein Zusammen-

---

[4]) Man kann dieses System von Kreisen auch charakterisieren als den Schnitt der Sphäre S^{2n+1} mit dem Bündel der „komplexen Geraden" durch den Nullpunkt des euklidischen Raumes R^{2n+2}, wenn dieser als $(n+1)$-dimensionaler komplexer Raum aufgefaßt wird.

[5]) *H. Seifert*, Acta math. 60 (1932), S. 147.

hang zwischen dem Grade c_f der Abbildung f und dem Grade $\mathfrak{c}_f$ besteht; sie wird durch den folgenden Satz beantwortet[6]).

Satz I. *Es sei f eine Abbildung*[1]) *der Sphäre S^{2n+1} in sich, welche bezüglich $\mathfrak{F}$ faserungstreu ist; der Grad der Abbildungen der einzelnen Fasern sei $\mathfrak{c}_f$. Dann ist der Grad c_f von f durch*

$$c_f = \mathfrak{c}_f^{\,n+1}$$

bestimmt.

Der Beweis wird in den Nummern 7—10 erbracht werden.

4. *Beispiele* zum Satz I mit beliebigem $n \geqq 0$ und beliebigem $\mathfrak{c}_f \gtrless 0$ sind leicht anzugeben. Eine Abbildung f der S^{2n+1} in sich, die durch

$$z'_j = f_j(z_1, \ldots, z_{n+1}) \,, \qquad j = 1, \ldots, n+1 \,,$$

gegeben ist, ist offenbar dann und nur dann faserungstreu, wenn die f_j Funktionalgleichungen

$$f_j(e^{it} z_1, \ldots, e^{it} z_{n+1}) = e^{i\psi} f_j(z_1, \ldots, z_{n+1}) \tag{8}$$

erfüllen, wobei ψ eine stetige Funktion von t und den z_j ist, welche folgende Periodizitäts-Eigenschaft hat — wir schreiben statt $(z_1, \ldots, z_{n+1})$ kurz z —:

$$\psi(t + 2\pi; z) = \psi(t; z) + \mathfrak{c} \cdot 2\pi \;; \tag{9}$$

hierin ist $\mathfrak{c}$ eine ganze Zahl, und zwar ist diese offenbar mit dem oben eingeführten Grad $\mathfrak{c}_f$ identisch.

Insbesondere sieht man: *Sind die Funktionen f_j schwach homogen von dem gleichen Grade m, so ist die Abbildung f faserungstreu, und es ist $\mathfrak{c}_f = m$.* Denn die schwache Homogenität der f_j drückt sich in den Gleichungen (8) mit

$$\psi(t; z) = mt \tag{9'}$$

aus[7]).

---

[6]) Für $n = 1$ bereits von *M. Rueff*, Comp. Math. VI (1938), S. [39], bewiesen; die dortige Beweismethode ist vorläufig nur für 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten schlüssig, dann allerdings nicht nur für die Sphäre (a. a. O., S. [41]). Es ist anzunehmen, daß es Verallgemeinerungen des obigen Satzes I gibt, die sich auf faserungstreue Abbildungen beliebiger Mannigfaltigkeiten beziehen.

[7]) Der Beweis des Satzes II (Nr. 6) zeigt, daß sich dieser Satz auch auf Funktionen ausdehnen läßt, die insofern allgemeiner sind als die schwach homogenen, als an Stelle der Funktionalgleichung (9') auch (9) treten darf.

Dieser Spezialfall liegt in den folgenden Beispielen vor:

$$z_j' = \frac{z_j^m}{\sqrt{\sum\limits_\varrho |z_\varrho|^{2m}}} \quad \text{für} \quad m \geqq 0\,, \tag{10a}$$

$$z_j' = \frac{\bar{z}_j^{-m}}{\sqrt{\sum\limits_\varrho |z_\varrho|^{-2m}}} \quad \text{für} \quad m < 0\,; \tag{10b}$$

sie zeigen, daß es für jedes n faserungstreue Abbildungen f mit willkürlichem $\mathfrak{c}_f = m$ gibt.

5. Die Abbildung f, die durch (10b) mit $m = -1$, also durch

$$z_j' = \bar{z}_j$$

gegeben ist, gibt zu der folgenden Bemerkung Anlaß. Sie ist offenbar eineindeutig, und sie hat den Grad $c_f = (-1)^{n+1}$; letzteres ergibt sich sowohl aus Satz I als auch durch eine ganz elementare Betrachtung; bei geradem n hat sie also den Grad -1; andererseits hat nach Satz I bei ungeradem n eine faserungstreue Abbildung niemals negativen Grad[8]). Wir sehen also:

Bei geradem n, jedoch nicht bei ungeradem n, gibt es topologische und faserungstreue Abbildungen der S^{2n+1} auf sich, welche die Orientierung umkehren.

Hierzu ist kein „reelles" Analogon im Rahmen der Betrachtungen aus Nr. 1 vorhanden; denn für jedes n ist die Spiegelung der S^n an einer n-dimensionalen Ebene durch ihren Mittelpunkt eine topologische und antipodentreue Abbildung, welche die Orientierung umkehrt.

6. Wir zeigen jetzt, daß der Satz II (Nr. 2) aus dem Satz I folgt.

Es seien f_r die im Satz II genannten n Funktionen. Wir setzen $|m_1 \cdot m_2 \ldots \cdot m_n| = m$ und

$$f_r' = f_r^{\frac{m}{m_r}}\,, \quad \text{wenn} \quad m_r > 0\,,$$

$$f_r' = \bar{f}_r^{\frac{m}{-m_r}}\,, \quad \text{wenn} \quad m_r < 0$$

ist; (dabei bezeichnet $\bar{f}_r$ den zu f_r konjugiert komplexen Wert). Die f_r' sind ebenfalls auf der S^{2n+1}, die durch (6) gegeben ist, stetig, und sie sind sämtlich schwach homogen vom Grade m.

---

[8]) Man beachte übrigens, daß sowohl das Vorzeichen von c_f unabhängig von der Orientierung der S^{2n+1} als auch das Vorzeichen von $\mathfrak{c}_f$ unabhängig von der in Nr. 3 festgelegten Orientierung der Fasern ist.

Hätten die f_r, und damit auch die f'_r, keine gemeinsame Nullstelle, so wären die $n+1$ Funktionen

$$g_r = \frac{f'_r}{\sqrt{\sum\limits_{\varrho} |f'_\varrho|^2}} \ , \qquad r = 1, \ldots, n \ ,$$

$$g_{n+1} \equiv 0$$

ebenfalls stetig auf der S^{2n+1}; sie wären schwach homogen vom Grade m — (die identisch verschwindende Funktion g_{n+1} ist homogen von jedem Grade) —, und es wäre

$$\sum_{j=1}^{n+1} |g_j|^2 = 1 \ ;$$

durch

$$z'_j = g_j(z_1, \ldots, z_{n+1}) \ , \qquad j = 1, \ldots, n+1$$

wäre daher eine Abbildung g der S^{2n+1} in sich gegeben, die faserungstreu mit $c_g = m \neq 0$ wäre (Nr. 4); andererseits läge das Bild $g(S^{2n+1})$ ganz in der Ebene $z_{n+1} = 0$, es wäre also ein echter Teil von S^{2n+1}, und daher wäre $c_g = 0$. Man würde also einen Widerspruch zum Satz I erhalten; folglich haben die f_r eine gemeinsame Nullstelle.

7. *Beweis des Satzes I* (Nr. 3). Unter K_n verstehen wir die Mannigfaltigkeit der komplexen Punkte des n-dimensionalen projektiven Raumes, also die Mannigfaltigkeit aller Verhältnisse $z_1 : z_2 : \ldots : z_{n+1}$ komplexer Zahlen, $0 : 0 : \ldots : 0$ ausgeschlossen; bekanntlich ist K_n eine $2n$-dimensionale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit[9]). Ordnen wir jedem Punkt $(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ unserer durch (6) gegebenen Sphäre S^{2n+1} das Verhältnis $z_1 : z_2 : \ldots : z_{n+1}$ zu, so entsteht eine stetige Abbildung p von S^{2n+1} auf K_n; dabei sind, wie aus der Charakterisierung (7b) der Faserung $\mathfrak{F}$ hervorgeht, die Urbilder der einzelnen Punkte von K_n gerade die Fasern von $\mathfrak{F}$.

Ist f eine faserungstreue Abbildung der S^{2n+1} in sich, und bezeichnen wir für jede Faser β diejenige Faser, in welcher $f(\beta)$ liegt, mit $\varphi(\beta)$, so kann φ als eine stetige Abbildung von K_n in sich aufgefaßt werden, die durch

$$p f p^{-1} = \varphi$$

bestimmt, also mit f und p durch die Funktionalgleichung

$$p f = \varphi p \tag{11}$$

verknüpft ist.

[9]) *H. Hopf*, Journ. f. d. r. u. a. Math. 163 (1930), S. 71, § 5.

Der Grad von φ sei c_φ. Wir zerlegen die Behauptung des Satzes I in die folgenden beiden Teile:

$$c_\varphi = \mathfrak{c}_f^n , \tag{12}$$

$$c_f = \mathfrak{c}_f \cdot c_\varphi . \tag{13}$$

8. *Beweis von* (12). In K_n wird eine zweidimensionale Homologiebasis von einem Zyklus Z gebildet, der einer komplexen projektiven Geraden entspricht und mit einer Kugelfläche homöomorph ist[9]). Die Abbildung φ bewirkt eine Homologie

$$\varphi(Z) \sim uZ .$$

Man weiß, daß zwischen der ganzen Zahl u und dem Grade c_φ die Beziehung[9])

$$c_\varphi = u^n \tag{14}$$

besteht; daher ist (12) bewiesen, sobald gezeigt ist, daß

$$u = \mathfrak{c}_f$$

ist, und wir brauchen also nur zu beweisen, daß

$$\varphi(Z) \sim \mathfrak{c}_f \cdot Z \tag{12'}$$

gilt.

Hierfür stellen wir eine vorbereitende Betrachtung an.

Die Sphäre S^{2n+1}, die durch (6) gegeben ist, wird von der dreidimensionalen Ebene

$$\mathfrak{I} z_2 = 0 , \qquad z_3 = \cdots = z_{n+1} = 0$$

in einer zweidimensionalen Kugelfläche geschnitten; deren durch

$$\mathfrak{R} z_2 \geqq 0$$

bestimmte Halbkugel heiße H; diese Halbkugel wird durch den Kreis β berandet, der auf S^{2n+1} durch

$$z_2 = z_3 = \cdots = z_{n+1} = 0$$

gegeben ist; β ist diejenige Faser aus der Faserung $\mathfrak{F}$, die durch den Punkt $(1, 0, \ldots, 0)$ geht. Für die in Nr. 3 festgesetzte Orientierung von β und eine geeignete Orientierung von H gilt die Berandungsrelation auch im algebraischen Sinne[10]):

$$\dot{H} = \beta . \tag{15}$$

[10]) Wie bei *Alexandroff-Hopf*, a. a. O., wird der Rand eines algebraischen Komplexes H mit $\dot{H}$ bezeichnet.

Durch die Abbildung p (Nr. 7) wird H auf die komplexe projektive Gerade in K_n abgebildet, deren Gleichung

$$z_3 = \cdots = z_{n+1} = 0$$

ist; und zwar geht dabei der ganze Rand β in den einen Punkt mit $z_2 = 0$ über; jeder andere Punkt der projektiven Geraden entspricht aber genau einem Punkt von H, da es, wie man leicht nachrechnet, zu jeder komplexen Zahl $w \neq \infty$ genau ein Zahlenpaar $\{z_1, z_2\}$ mit

$$\Re z_2 > 0\,, \qquad \Im z_2 = 0\,, \qquad z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = 1, \qquad z_1 : z_2 = w$$

gibt. Die Abbildung p von H auf die projektive Gerade ist also im wesentlichen eineindeutig, nur der Randkreis β wird auf einen einzigen Punkt abgebildet. Daher gilt, wenn wir die — mit einer Kugelfläche homöomorphe — komplexe projektive Gerade noch geeignet orientieren[11]), die Homologie

$$p(H) \sim Z\,. \tag{16}$$

Was wir in (15) und (16) für die spezielle Faser β festgestellt haben, gilt ebenso für jede Faser β' — man erkennt das etwa dadurch, daß man durch eine unitäre Drehung der S^{2n+1} die Faser β in eine beliebige andere Faser β' transformiert — : zu jeder Faser β' gibt es einen zweidimensionalen Komplex H', so daß

$$\dot{H}' = \beta'\,, \tag{15'}$$

$$p(H') \sim Z \tag{16'}$$

gilt.

Nach dieser Vorbereitung kommen wir zum Beweis von (12'). Nach Definition von $\mathfrak{c}_f$ ist

$$f(\beta) = \mathfrak{c}_f \beta'\,,$$

wobei β' eine gewisse Faser ist; also, nach (15) und (15')

$$f(\dot{H}) = \mathfrak{c}_f \dot{H}'\,;$$

andererseits ist immer [12])

$$f(\dot{H}) = f(H)^{\cdot}\,;$$

folglich ist

$$X = f(H) - \mathfrak{c}_f H'$$

ein zweidimensionaler Zyklus; er ist ~ 0 in der Sphäre S^{2n+1}, also ist auch

[11]) Die Orientierung von Z hat auf den Koeffizienten in der Homologie (12') keinen Einfluß.

[12]) *Alexandroff-Hopf*, a. a. O., S. 176. Die obigen Komplexe H und X sind „stetige" Komplexe im Sinne des zitierten Buches, S. 332 ff.

$$p(X) = pf(H) - \mathfrak{c}_f p(H') \sim 0 \quad \text{in} \quad K_n \ ;$$

hieraus und aus (11) folgt

$$\varphi p(H) \sim \mathfrak{c}_f p(H') \ ;$$

dies ist aber infolge (16) und (16′) die Behauptung (12′).

9. *Vorbemerkungen zum Beweis von* (13). Diese Bemerkungen handeln nicht von den Abbildungen f und φ, sondern nur von der Faserung $\mathfrak{F}$. Sind $y = (y_1, \ldots, y_{n+1})$ und $z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$ Punkte auf den Fasern β bzw. γ, so dürfen wir

$$|\Sigma y_j \bar{z}_j| = \sigma(\beta, \gamma)$$

setzen, da dieser Ausdruck von der speziellen Wahl der Punkte y und z auf β bzw. γ nicht abhängt. Es ist $\sigma(\beta, \beta) = 1$, also

$$\sigma(\beta, \gamma) \neq 0 \ , \tag{17}$$

wenn β und γ nicht zu weit voneinander entfernt sind; es gibt eine Zahl $d > 0$ mit folgender Eigenschaft: sind ξ, η irgend zwei Punkte von K_n, deren Abstand $< d$ ist — wir setzen K_n als metrisiert voraus —, so gilt (17) für $\beta = p^{-1}(\xi)$, $\gamma = p^{-1}(\eta)$.

Erfüllen β und γ die Bedingung (17), so wird durch die Bedingung, daß

$$\Sigma y_j \bar{z}_j \qquad \textit{reell und positiv} \tag{18}$$

sei, jedem Punkt y von β genau ein Punkt $z = R(y)$ von γ zugeordnet, und zwar ist R eine topologische Abbildung von β auf γ, welche die Orientierung (Nr. 3) erhält. In der Tat ist, wenn y^0, z^0 feste Punkte auf β bzw. γ sind und wir

$$y_j = e^{iu} y_j^0 \ , \qquad z_j = e^{iv} z_j^0$$

setzen, die Bedingung (18) gleichbedeutend mit

$$v \equiv u + \arg(\Sigma y_j^0 \bar{z}_j^0) \qquad (\text{mod. } 2\pi) \ .$$

Der Punkt $R(y)$ variiert auch eindeutig und stetig, wenn man die Faser γ stetig abändert; es ist also

$$z = R(y, \gamma)$$

eine eindeutige und stetige Funktion von y und γ, solange die Faser β, die durch y geht, und die Faser γ die Bedingung (17) erfüllen.

Ist T eine Teilmenge von K_n, deren Durchmesser kleiner ist als die oben eingeführte Zahl d, so kann man in der Teilmenge $p^{-1}(T)$ von S^{2n+1} folgendermaßen Parameter einführen: γ sei eine feste Faser in $p^{-1}(T)$ und $s = s(z)$ ein Parameter auf ihr, der um 2π wächst, während γ einmal positiv von z durchlaufen wird; dann setzen wir für jeden Punkt y aus $p^{-1}(T)$:

$$s(y) = s\big(R(y,\gamma)\big)\ ;$$ [13]

dies ist erlaubt, da (17) für jede Faser β aus $p^{-1}(T)$ gilt. Bezeichnet jetzt noch ξ einen in T variablen Punkt, so können wir die Punkte y von $p^{-1}(T)$ durch

$$y = (\xi, s)$$

charakterisieren, wobei

$$\xi = p(y)\ , \qquad s = s(y)$$

ist; dies bedeutet, daß man $p^{-1}(T)$ als topologisches Produkt von T mit einer Kreislinie, aus welcher s Parameter ist, auffassen kann.

10. *Beweis von* (13). Wir werden f stetig so abändern, daß die Abbildung dabei immer faserungstreu bleibt — so daß also die Werte von c_f, $\mathfrak{c}_f$, c_φ ungeändert bleiben — und daß für die resultierende Abbildung die Richtigkeit von (13) durch eine einfache Abzählung der Bedeckungen, die ein Teilgebiet von S^{2n+1} durch das Bild $f(S^{2n+1})$ erleidet, bestätigt werden kann. Diese Abänderung wird in zwei Schritten geschehen

Erster Schritt: Es sei $\{\varphi_t\}$ eine stetige Abänderung von φ mit $0 \leqq t \leqq 1$ und $\varphi_0 = \varphi$, und zwar eine so kleine Abänderung, daß die Entfernung

$$\varrho\big(\varphi(\xi)\ ,\ \varphi_t(\xi)\big) < d$$

für jeden Punkt ξ von K_n und jedes t ist. Dann erfüllen für jeden Punkt z der S^{2n+1} die Faser

$$\beta = p^{-1}\varphi p(z)\ ,$$

auf welcher der Punkt $f(z)$ liegt, und die Faser

$$\gamma = p^{-1}\varphi_t p(z)$$

die Bedingung (17), und wir dürfen daher

$$f_t(z) = R\big(f(z)\ ,\ p^{-1}\varphi_t p(z)\big)$$

---

[13]) Man beachte: für $y \varepsilon \gamma$ ist $R(y,\gamma) = y$.

setzen. Die f_t sind faserungstreue Abbildungen, die in K_n gerade die gegebenen Abbildungen φ_t induzieren. Infolge der stetigen Abhängigkeit von t ändern sich die Zahlen c_{f_t}, $\mathfrak{c}_{f_t}$, c_{φ_t} nicht. Man kann die Schar $\{\varphi_t\}$ so wählen, daß φ_1 simplizial ist; folglich dürfen wir — indem wir statt f_1 wieder f schreiben — von vornherein φ als *simplizial* annehmen.

Zweiter Schritt (bei dem φ nicht mehr geändert wird): Bei der simplizialen Abbildung φ seien T' ein $2n$-dimensionales Bildsimplex in K_n und $T_1, \ldots, T_m$ seine Urbilder; die Durchmesser aller dieser Simplexe dürfen wir als $< d$ annehmen. Vorläufig ändern wir f nur in $p^{-1}(T_1)$. Dazu führen wir, wie es in Nr. 9 besprochen wurde, in den Mengen $p^{-1}(T_1)$ und $p^{-1}(T')$ Parameter (ξ_1, s_1) bzw. (ξ', s') ein; die Abbildung f von $p^{-1}(T_1)$ ist durch

$$, \qquad f(\xi_1, s_1) = (\xi', s')$$

mit

$$\xi' = \varphi(\xi_1)\,, \qquad s' = \psi(\xi_1, s_1)$$

gegeben, wobei ψ die Periodizitätseigenschaft

$$\psi(\xi, s + 2\pi) = \psi(\xi, s) + \mathfrak{c}_f \cdot 2\pi$$

besitzt.

Es sei nun U' ein $2n$-dimensionales Simplex, das ganz im Inneren von T' liegt, U_1 sein Urbild in T_1. Wir verstehen unter $\tau(\xi_1)$ eine in T_1 erklärte stetige reelle Funktion, die auf dem Rande von T_1 verschwindet und auf U_1 den Wert 1 hat; dann setzen wir für $0 \leqq t \leqq 1$:

$$\psi_t(\xi_1, s_1) = \tau(\xi_1) \cdot \big((1 - t) \cdot \psi(\xi_1, s_1) + t \cdot \mathfrak{c}_f \cdot s_1\big) + \big(1 - \tau(\xi_1)\big) \cdot \psi(\xi_1, s_1)$$

und

$$f_t(\xi_1, s_1) = \big(\varphi(\xi_1), \quad \psi_t(\xi_1, s_1)\big)\,.$$

Während t variiert, bleibt f_t auf dem Rande von $p^{-1}(T_1)$ fest; in $p^{-1}(T_1)$ wird die Abbildung jeder einzelnen Faser, ohne daß das Bild die ursprüngliche Bildfaser verläßt, modifiziert; und zwar sind diese Abbildungen am Schluß (also für $t = 1$) in U_1 (also für $\tau = 1$) durch

$$\psi_1(\xi_1, s_1) = \mathfrak{c}_f \cdot s_1$$

charakterisiert: das Bild jeder Faser durchläuft die Bildfaser monoton $\mathfrak{c}_f$ mal.

Diese „Monotonisierung" nehmen wir nicht nur in $p^{-1}(T_1)$, sondern in jeder einzelnen Menge $p^{-1}(T_i)$ vor. Bei der schließlich resultierenden Abbildung wird ein $(2n+1)$-dimensionales Element E, das in der Menge $p^{-1}(U')$ liegt, durch das Bild von $p^{-1}(U_i)$ genau $|\mathfrak{c}_f|$ mal schlicht bedeckt; dabei ist die algebraische Bedeckungszahl gleich $\mathfrak{c}_f$ oder gleich $-\mathfrak{c}_f$, je nach dem Vorzeichen der Abbildung φ von T_i auf T' [14]); dies gilt für $i = 1, 2, \ldots, m$; andere Bedeckungen erleidet E nicht. Hieraus ist die Richtigkeit der Behauptung (13) ersichtlich.

---

[14]) Die Orientierungen der T_i und T' sind durch eine Orientierung von K_n gegeben; welche der beiden möglichen Orientierungen von K_n dabei gewählt ist, ist gleichgültig.

(Eingegangen den 31. August 1938.)