Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 10 (1937-1938)

Artikel: Reguläre Permutationen und ihre Beziehungen zur Topologie.

Autor: Gruner, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10989

Reguläre Permutationen und ihre Beziehungen zur Topologie

Von Walter Gruner, Bern

Einleitung

W. Scherrer hat mich auf das Problem aufmerksam gemacht, wie ein Komplex regulärer Permutationen beschaffen sein muß, wenn er eine Gruppe, die nur reguläre Permutationen enthält, erzeugen soll. Permutationen nennt man *regulär*, wenn sie in lauter, gleich viel Elemente enthaltende elementfremde Zyklen zerlegt werden können. Dieses Problem wäre trivial, wenn das Produkt zweier regulärer Permutationen stets regulär wäre. Denn dann enthielte ja offenbar auch eine durch reguläre Permutationen erzeugte Gruppe nur reguläre Permutationen.

Schon das einfache Beispiel vom Grad 4:

$$\begin{aligned} A &= (1\ 2\ 3\ 4) \\ B &= (1\ 2)\ (3\ 4) \\ A\,.\,B &= (1)\ (3)\ (2\ 4) \end{aligned}$$

(A und B sind regulär, $A\,.\,B$ aber nicht)

ist ein Gegenbeweis.

Wir werden hier das Problem in dem Sinne lösen, daß wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufstellen, daß ein Komplex von regulären Permutationen eine Gruppe mit lauter regulären Permutationen erzeugt. Diese Bedingung gestattet zwar nicht etwa die Menge derjenigen Permutationen B unmittelbar zu überblicken, die zusammen mit einer regulären Permutation A eine Gruppe mit lauter regulären Permutationen erzeugen. Wohl aber gestattet sie eine anschauliche Interpretation des Sachverhaltes zu geben.

Die Bedeutung dieser Bedingung liegt nämlich darin, daß die zu permutierenden „Gegenstände", die ich im folgenden stets als *Variable* bezeichnen werde, innerhalb des erzeugenden Komplexes gleichgelagert sind.

Der Inhalt der Sätze, die in dieser Bedingung liegen, wurde schon von H. Kuhn[1]) und G. A. Miller[2]) bewiesen. Doch ist dort von einer ganz andern Problemstellung ausgegangen worden, und ich werde hier die Sätze in etwas anderer Art formulieren und beweisen.

[1]) *H. Kuhn*, Amer. J. of Math. vol. 26, 1904, p. 67.

[2]) *G. A. Miller*, Proc. of the Amer. Phil. Soc., vol. 50, 1911, p. 129—146.

Die Gleichlagerung der Variabeln im erzeugenden Komplex läßt sich topologisch auf einer Fläche veranschaulichen. Es kann dann bewiesen werden, daß die erzeugte Gruppe als Gruppe topologischer Abbildungen dieser Fläche in sich realisiert werden kann. Dieses Gruppenbild entspricht, was den Streckenkomplex für sich anbelangt, vollständig dem Dehn'schen[3]) Gruppenbild.

Die Untersuchung dieser Darstellung wird uns in einem dritten Teil zur Untersuchung allgemeiner Überlagerungsflächen führen. Speziell wird hier der Zusammenhang von Monodromiegruppe und Decktransformationengruppe einer Überlagerungsfläche untersucht. Dieser Zusammenhang ist im Fall regulärer Überlagerungsflächen schon lange bekannt. Über den allgemeinen Fall findet sich ein Hinweis bei Threlfall-Seifert[4]). Doch kann dieser verallgemeinerte Satz einfacher direkt und ohne explizite Heranziehung des Begriffes der Fundamentalgruppe bewiesen werden; dies erweist sich im Fall verzweigter Überlagerungsflächen als besonders günstig.

I. TEIL

§ 1. Grundbegriffe

Definition: Eine Permutation ist *regulär*[5]), wenn sie sich in lauter gleich viel Variable enthaltende elementfremde Zyklen zerlegen läßt.

Definition: Ein Permutationenkomplex ist *uniform,* wenn jede Variable in jede andere durch *höchstens* eine Permutation übergeführt wird.

Diesen neuen Hilfsbegriff führe ich hier ein, um die folgenden Sätze übersichtlicher formulieren zu können.

Wir brauchen nun ein Kriterium, das im wesentlichen schon bei Netto[6]) steht.

Satz I: *Jede Gruppe, die nur reguläre Permutationen enthält, ist uniform, und umgekehrt.*

Beweis:

A: *Voraussetzung:* Die Gruppe enthält nur reguläre Permutationen.
Behauptung: Die Gruppe ist uniform.

S und T seien zwei Permutationen dieser Gruppe, die entgegen der Behauptung beide die Variable x_i in die Varable x_k überführen. $S\,.\,T^{-1}$ führt dann x_i in sich über, enthält also einen Einerzyklus. Weil $S\,T^{-1}$ aber regulär ist, so muß es lauter Einerzyklen enthalten.

---

[3]) *M. Dehn,* Math. Ann. 69 (1900) p. 137.
[4]) *Threlfall-Seifert,* Lehrbuch der Topologie, p. 198.
[5]) *A. Cauchy,* Par. C. R. 21, p. 601.
[6]) *Netto,* Substitutionentheorie. 1. Aufl., p. 99.

Es folgt daher:

$$S \,.\, T^{-1} = E$$

oder

$$S = T \qquad \text{q. e. d.}$$

B: *Voraussetzung:* Die Gruppe ist uniform.

Behauptung: Die Gruppe enthält nur reguläre Permutationen.

Es sei A entgegen der Behauptung eine nichtreguläre Permutation der Gruppe und enthalte daher mindestens zwei verschieden lange Zyklen Z_1 und Z_2. Z_1 sei von der Ordnung r_1 und Z_2 von der Ordnung r_2. Ferner sei $r_1 < r_2$. A^{r_1} führt daher alle Variabeln von Z_1 in sich über. Das tut auch E. Weil nun die Gruppe uniform ist, ist $A^{r_1} = E$. Es müßte also auch $Z_2^{r_1} = E$ sein, was im Widerspruch zu $r_2 > r_1$ steht. Es kann also nur $r_1 = r_2$ sein, und A ist also regulär. q. e. d.

Ich erinnere noch an folgenden Begriff:

Definition: Eine Gruppe heißt *regulär*[7]), wenn jede Variable in jede andere durch genau eine Permutation übergeführt wird. Eine reguläre Gruppe kann also auch als transitive und zugleich uniforme charakterisiert werden.

Nach Satz I folgt, daß uniforme Gruppen und Gruppen mit lauter regulären Permutationen identische Begriffe sind. Ich stelle hier einige in der Literatur[8]) schon bekannte Sätze zusammen.

Satz II: *Jede uniforme Gruppe ist Untergruppe einer regulären.*

Satz III: *Die transitiven Konstituenten einer uniformen Gruppe der Ordnung h und des Grades n bilden n/h zueinander und zur Gruppe selbst isomorphe Gruppen. Sie sind innerhalb ihres Systems regulär.*

Satz IV: *Zwei isomorphe uniforme Gruppen sind in bezug auf die symmetrische Gruppe aller Permutationen konjugiert.*

§ 2. Numerierung der Variabeln nach einer uniformen Gruppe

$\mathfrak{H}$ sei eine uniforme Gruppe vom Grade n und der Ordnung h. Nach Satz III bilden die Variabeln $r = \frac{n}{h}$ Transitivitätssysteme, die ich mit $s_1, s_2, \ldots s_r$, numeriere. In s_1 sei eine bestimmte Varable mit x_{11} bezeichnet. Ebenso bezeichne ich in jedem andern System s_i eine bestimmte Variable mit x_{i1}. $H_1, H_2, \ldots H_h$ seien die Elemente der Gruppe $\mathfrak{H}$.

[7]) *C. Jordan*, Traité des substitutions. 1870.

[8]) z. B. *G. A. Miller*, Am. J. of Math., vol. 21, 1899, p. 287—338, oder *Netto*, Substitutionentheorie.

Speziell sei $H_1 = E$. Nun bezeichne ich mit x_{ik} diejenige Variable, in welche x_{i1} durch H_k übergeführt wird. Alle x_{ik} mit festem i liegen im gleichen System s_i, und anderseits sind so alle Variable von s_i eindeutig bezeichnet worden, weil s_i Transitivitätssystem von $\mathfrak{H}$ ist, und weil $\mathfrak{H}$ uniform ist.

Bei vorgegebener Numerierung der H_k bleiben $r!$ Möglichkeiten für die Wahl der Numerierungen der Transitivitätssysteme. Nach festgelegter Numerierung der s_i verbleiben noch h^r Möglichkeiten für die Wahl der x_{i1}. So gibt es denn bei vorgegebener Numerierung der H_k $h^r \cdot r!$ verschiedene Numerierungen der Variabeln. Jede Variable kann als x_{11} gewählt werden, denn sie liegt in einem System s, das seinerseits als s_1 gewählt werden kann. Diese einfache Tatsache ist von grundlegender Bedeutung für die folgenden Sätze.

§ 3. Erzeugung uniformer Gruppen durch reguläre Permutationen

Wir treten nach diesen Vorbemerkungen an das eigentliche Problem heran, nämlich reguläre Permutationen so zu kombinieren, daß daraus nur Gruppen mit lauter regulären Permutationen erzeugt werden. Bevor wir das Problem in seiner Allgemeinheit lösen, wollen wir uns zunächst mit einem bloß hinreichenden Kriterium begnügen.

Es lautet:

Satz V: *Sind zwei Permutationsgruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$, deren Vereinigungskomplex $\mathfrak{H} + \mathfrak{K}$ uniform ist, miteinander vertauschbar, so enthält die durch sie erzeugte Gruppe $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{K}\}$ nur reguläre Permutationen.*

Beweis:

Voraussetzungen:

1) $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ Gruppen
2) $\mathfrak{H} + \mathfrak{K}$ uniform
3) $\mathfrak{H}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$

Behauptung:

$\{\mathfrak{H}, \mathfrak{K}\}$ enthält nur reguläre Permutationen.

Nach Satz I genügt es, zu zeigen, daß $\{\mathfrak{H}, \mathfrak{K}\}$ uniform ist.

Aus der Voraussetzung $\mathfrak{H}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}\mathfrak{H}$ folgt:

$$\{\mathfrak{H}, \mathfrak{K}\} = \mathfrak{H}\mathfrak{K}.$$

Ist $\mathfrak{H}\mathfrak{K}$ nicht uniform, so enthält es zwei Elemente H_1K_1 und H_2K_2, die beide x_h in x_k überführen.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Es führe} & H_1 & x_h \text{ in } x_i \\
 & H_2 & x_h \text{ in } x_j \\
 & K_1 & x_i \text{ in } x_k \\
 & K_2 & x_j \text{ in } x_k \\
\text{Daher führt} & H_1^{-1}H_2 & x_i \text{ in } x_j \\
\text{und} & K_1K_2^{-1} & x_i \text{ in } x_j\,.
\end{array}
$$

Da nun $H_1^{-1}H_2$ in $\mathfrak{H}$, $K_1K_2^{-1}$ in $\mathfrak{K}$, und daher beide im uniformen Komplex $\mathfrak{H}+\mathfrak{K}$ liegen, müssen sie identisch sein:

$$H_1^{-1}H_2 = K_1K_2^{-1}$$

und daraus $$H_1K_1 = H_2K_2$$ q. e. d.

Diese Bedingung ist nur hinreichend, da es in vielen Gruppen nichtvertauschbare Untergruppen gibt, wie z. B. die zyklischen Untergruppen der Ordnung 2 in der Diedergruppe der Ordnung 6.

Wenn die Vertauschbarkeitsvoraussetzung fallen gelassen wird, so erhalten wir nun wegen Satz I wohl eine notwendige Bedingung, welche jetzt aber nicht mehr hinreichend ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$
\mathfrak{H}\left\{\begin{array}{l}
E\ = (1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(5)\,(6)\,(7)\,(8)\,(9)\,(10)\,(11)\,(12) \\
A\ = (1\ \ 2\ \ 3)\,(4\ \ 5\ \ 6)\,(7\ \ 8\ \ 9)\,(10\ \ 11\ \ 12) \\
A^2 = (1\ \ 3\ \ 2)\,(4\ \ 6\ \ 5)\,(7\ \ 9\ \ 8)\,(10\ \ 12\ \ 11)
\end{array}\right.
$$

$$
\mathfrak{K}\left\{\begin{array}{l}
E\ = (1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(5)\,(6)\,(7)\,(8)\,(9)\,(10)\,(11)\,(12) \\
B\ = (1\ \ 4\ \ 7)\,(2\ \ 5\ \ 10)\,(3\ \ 8\ \ 11)\,(6\ \ 9\ \ 12) \\
B^2 = (1\ \ 7\ \ 4)\,(2\ \ 10\ \ 5)\,(3\ \ 11\ \ 8)\,(6\ \ 12\ \ 9)
\end{array}\right.
$$

$$A^2B = (1\ \ 8)\,(6\ \ 10)\,(2\ \ 4\ \ 9\ \ 11)\,(3\ \ 5\ \ 7\ \ 12)$$

A^2B ist nicht mehr regulär, obwohl $\mathfrak{H}+\mathfrak{K}$ uniform ist.

Wir kommen nun zum allgemeinen Fall: Wir führen folgende Bezeichnung ein:

Definition: Ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe und $\mathfrak{A}$ ein in $\mathfrak{G}$ enthaltener Elementenkomplex, so bezeichne $\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{A})$ denjenigen Elementenkomplex von $\mathfrak{G}$, der aus denjenigen Elementen besteht, die mit *jedem* Element von $\mathfrak{A}$ vertauschbar sind.

$\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{A})$ bildet eine Gruppe.

Es gilt nun folgende Relation:

Satz VI: $$\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}(\{\mathfrak{A}\})\,,$$
wobei $\{\mathfrak{A}\}$ die durch $\mathfrak{A}$ erzeugte Gruppe bezeichnet.

Beweis: Ist S nämlich ein Element von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{A})$, so ist es mit A und B auch mit AB vertauschbar und daher mit jedem Element von $\{\mathfrak{A}\}$ vertauschbar. Ist aber S mit jedem Element von $\{\mathfrak{A}\}$ vertauschbar, so ist es *a* fortiori mit jedem Element von $\mathfrak{A}$ vertauschbar, da $\mathfrak{A}$ ein Teilkomplex von $\{\mathfrak{A}\}$ ist. q. e. d.

Im folgenden schreiben wir kurz $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, wenn mit $\mathfrak{A}$ ein Permutationenkomplex und mit $\mathfrak{S}$ die symmetrische Gruppe aller Permutationen gemeint ist.

Nun können wir den allgemeinen Satz formulieren:

Satz VII[9]**:** *Notwendig und hinreichend dafür, daß der Permutationenkomplex* $\mathfrak{A}$ *eine Gruppe* $\{\mathfrak{A}\}$, *die nur reguläre Permutationen enthält, erzeugt, ist, daß* $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ *transitiv ist.*

Beweis:

Nach Satz I und Satz VI genügt es, folgenden Hilfssatz zu beweisen:

Hilfssatz: Ist eine Permutationsgruppe $\mathfrak{H}$ uniform, so ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ transitiv; ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ transitiv, so ist $\mathfrak{H}$ uniform.

Wir beweisen zunächst die letztere Behauptung:

A: *Voraussetzung:* $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ transitiv.

Behauptung: $\mathfrak{H}$ uniform.

Beweis von A:

H_1 und H_2 seien zwei Elemente von $\mathfrak{H}$, die beide x_i in x_k überführen. $H_3 = H_1 H_2^{-1}$ führt dann x_i in sich über.

x_l sei eine beliebige Variable.

Weil $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ transitiv ist, so existiert in $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ ein Element S, das x_i in x_l überführt.

Dann führt $S^{-1}H_3S$ x_l in sich über.

Anderseits ist $S^{-1}H_3S = H_3$.

Also führt H_3 x_l in sich über, und, weil x_l beliebig ist, jede Variable in sich über.

Also ist $H_3 = E$, woraus folgt $H_1 = H_2$. q. e. d.

B: *Voraussetzung:* $\mathfrak{H}$ uniform.

Behauptung: $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ transitiv.

Beweis von B:

Wir suchen eine Permutation S, welche erstens eine Variable in eine

---

[9]) Implizit bei *G. A. Miller*, Proc. of the Amer. Phil. Soc., vol. 50 (1911), p. 129—146.

vorgegebene Variable überführt und mit jedem Element von $\mathfrak{H}$ vertauschbar ist. Wir können nach einer Bemerkung von § 2 stets zwei Numerierungen x_{ik} und x'_{ik} so wählen, daß x_{11} die vorgegebene Anfangsvariable und x'_{11} die vorgegebene Endvariable, in die S x_{11} überführen soll, werden.

Wir konstruieren nun die Abbildung S, indem wir den Ansatz machen:

$$S = \begin{pmatrix} x_{ik} \\ x'_{ik} \end{pmatrix}$$

S ist eine Permutation, weil bei beiden Numerierungen jede Variable genau einmal durchlaufen wird. Ferner führt S wirklich x_{11} in x'_{11} über. Nun zeigen wir noch, daß S mit allen Permutationen von $\mathfrak{H}$ vertauschbar ist.

H_i sei ein Element von $\mathfrak{H}$, und $x_{\lambda\mu}$ eine beliebige Variable. Es führe H_i $x_{\lambda\mu}$ in $x_{\lambda\mu_i}$; das tut auch die Permutation $H_\mu^{-1} H_{\mu_i}$.

Wegen der Uniformität von $\mathfrak{H}$ ist also:

$$H_i = H_\mu^{-1} H_{\mu_i}$$

Ferner führt H_μ $x'_{\lambda 1}$ in $x'_{\lambda\mu}$

und H_{μ_i} $x'_{\lambda 1}$ in $x'_{\lambda\mu_i}$.

Also führt $H_i = H_\mu^{-1} H_{\mu_i}$ $x'_{\lambda\mu}$ in $x'_{\lambda\mu_i}$ über.

Nun führt S $x_{\lambda\mu}$ in $x'_{\lambda\mu}$

und H_i $x'_{\lambda\mu}$ in $x'_{\lambda\mu_i}$

ferner S^{-1} $x'_{\lambda\mu_i}$ in $x_{\lambda\mu_i}$

also $S H_i S^{-1}$ $x_{\lambda\mu}$ in $x_{\lambda\mu_i}$

wie dies auch H_i tut.

Das gilt für jedes $x_{\lambda\mu}$. Also ist $SH_iS^{-1} = H_i$,

oder $SH_i = H_iS$. q. e. d.

§ 4. *Die Reziprozität der Begriffe „transitiv" und „uniform" bei Gruppen*

Die Begriffe „transitiv" und „uniform" stehen schon rein definitionsmäßig in einer gewissen Reziprozität zueinander. Während nämlich die transitiven Gruppen jede Variable in jede andere durch *mindestens* eine Permutation überführen, so führen uniforme Gruppen jede Variable in jede andere durch *höchstens* eine Permutation über. Es ist nun interessant, daß gerade aus dem vorigen Satz eine weitere Reziprozität dieser beiden Begriffe hervorgeht.

Es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz VIII[10]**):** *Ist die Gruppe $\mathfrak{H}$ uniform, so ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ transitiv; ist $\mathfrak{H}$ transitiv, so ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ uniform.*

Beweis: Der erste Teil des Satzes ist inhaltlich identisch mit der letzten Behauptung des vorigen Satzes.

Um den zweiten Teil zu beweisen, führen wir den Begriff $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{M}(\mathfrak{H}))$ ein. Es ist dann $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H}) \supseteqq \mathfrak{H}$, denn $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H})$ umfaßt ja alle Elemente, die mit jedem Element von $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ vertauschbar sind, und unter ihnen finden sich ja auch die Elemente von $\mathfrak{H}$. Wenn aber $\mathfrak{H}$ transitiv ist, ist um so mehr $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H})$ transitiv und daher nach der ersten Behauptung von Satz VII $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ uniform. q. e. d.

Auf diese Weise läßt sich auch der folgende ebenfalls bekannte[10]) Satz beweisen:

Satz IX: *Ist $\mathfrak{H}$ uniform, so fällt $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H})$ mit $\mathfrak{H}$ zusammen.*

Beweis: Ich beweise zunächst, daß ganz allgemein gilt:

$$\boldsymbol{\mathfrak{M}^3(\mathfrak{H}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{H})}$$

wobei
$$\mathfrak{M}^3(\mathfrak{H}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H}))\,.$$

Ist A ein Element in $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$, so ist A mit allen Elementen von $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H})$ vertauschbar und daher in $\mathfrak{M}^3(\mathfrak{H})$; ist aber A in $\mathfrak{M}^3(\mathfrak{H})$, so ist A mit allen Elementen von $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H})$, worunter auch die von $\mathfrak{H}$ sind, vertauschbar. Daher ist A mit jedem Element von $\mathfrak{H}$ vertauschbar und daher in $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$.

Ferner brauchen wir noch folgenden

Hilfssatz: Die Ordnung von $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ ist, wenn $\mathfrak{H}$ uniform, gleich $h^r r!$, d. h. gleich der Anzahl der Numerierungen nach $\mathfrak{H}$.

Beweis des Hilfssatzes: Jede Numerierung liefert als Permutation einer festen Numerierung eine Permutation von $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$.

Ist umgekehrt $S = \begin{pmatrix} x_{ik} \\ x'_{ik} \end{pmatrix}$ in $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$, und x_{ik} eine Numerierung nach $\mathfrak{H}$, so ist auch x'_{ik} eine solche.

Ist nämlich H_k ein beliebiges Element von $\mathfrak{H}$, so gilt ja:

$$S^{-1}H_kS = H_k$$

	$S^{-1}H_kS = H_k$				
Es führt		S^{-1}	x'_{i1}	in	x_{i1}
		H_k	x_{i1}	in	x_{ik}
und		S	x_{ik}	in	x'_{ik}
Also	$S^{-1}H_kS =$	H_k	x'_{i1}	in	x'_{ik} .

[10]) *G. A. Miller*, Proc. of the Amer. Phil. Soc., vol. 50, 1911, p. 129—146.

Das ist aber gerade die Definition der Numerierung nach $\mathfrak{H}$. Somit ist also die Ordnung von $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ genau gleich $h^r r!$, wobei $h \,.\, r = n$.

Nun sei die Ordnung von $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H})$, welches $\mathfrak{H}$ umfaßt, gleich $h \,.\, \mu$. Dann wird die Ordnung von $\mathfrak{M}^3(\mathfrak{H})$ gleich $(h\mu)^{\frac{r}{\mu}}\left(\frac{r}{\mu}\right)!$.

Anderseits ist $$\mathfrak{M}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{M}^3(\mathfrak{H})$$

Also folgt daraus:
$$h^r r! = (h\mu)^{\frac{r}{\mu}} \cdot \left(\frac{r}{\mu}\right)!$$

Nun ist $h^r r! = n(n-h)\,(n-2h)\ldots(n-(r-1)h)$

und $$(h\mu)^{\frac{r}{\mu}}\left(\frac{r}{\mu}\right)! = n(n-\mu h)\,(n-2\mu h)\ldots\left(n-\left(\frac{r}{\mu}-1\right)\mu h\right).$$

Weil nun μ als Index von $\mathfrak{H}$ unter $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H})$ eine ganze Zahl $\geqq 1$ ist, kann die obige Gleichung nur bestehen, wenn $\mu = 1$.

Dann ist $$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}^2(\mathfrak{H}) \qquad \text{q. e. d.}$$

Bei transitiven Gruppen kann es wohl vorkommen, daß $\mathfrak{H}$ wirklich kleiner ist als $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H})$. Ein Beispiel ist die alternierende Gruppe für $n > 3$. Das einzige Element, das mit allen Elementen der alternierenden Gruppen vertauschbar ist, ist das Einheitselement. Dieses ist aber auch mit allen Elementen der symmetrischen Gruppe vertauschbar.

Also ist: $$\mathfrak{M}^2(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{S}_n \neq \mathfrak{A}_n .$$

Die Relation $\mathfrak{M}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{M}^3(\mathfrak{H})$ ist für beliebige $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{H})$ richtig, wie man leicht am Beweis erkennen kann.

§ 5. Die reguläre Gruppe[11])

Es sollen hier noch kurz die gewonnenen Resultate auf reguläre, d. h. transitive und zugleich uniforme Gruppen angewandt werden. Hier ist offenbar die Ordnung der Gruppe gleich dem Grad der Permutationen. Ferner erkennt man, daß $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die Ordnung n besitzen muß, weil auch sie nun transitiv und uniform sein muß nach Satz VIII. Man erkennt auch leicht, daß $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ konjugiert sind[12]) und, im Falle $\mathfrak{H}$ abelsch ist, zusammenfallen. Dieser wichtige Spezialfall der regulären Gruppe ist schon von C. Jordan[11]) bearbeitet worden.

---

[11]) *C. Jordan*, J. de l'Ecole polytechn., 1860, tome 22, p. 113—194.

[12]) *A. Speiser*, Gruppentheorie. 2. Aufl., p. 124.

II. TEIL

Bevor wir auf die eigentlichen topologischen Fragen eintreten, soll hier noch eine Interpretation von Satz VII, wie sie schon in der Einleitung beschrieben wurde, gegeben werden.

§ 1. Gleichlagerung der Variabeln

Nach Satz VII ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ transitiv, wenn $\mathfrak{A}$ uniform, und umgekehrt. Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf den Fall, daß der Komplex $\mathfrak{A}$ aus zwei Permutationen A und B bestehe. Die Verallgemeinerung kann leicht vollzogen werden. Wir nennen zwei Variable x_i und x_k „in A aufeinanderfolgend", wenn A x_i in x_k überführt. Ebenso erklären wir den Begriff „in B aufeinanderfolgend". Diejenigen Permutationen, die „in A aufeinanderfolgende Variable" wieder in „in A aufeinanderfolgende Variable" überführen, nennen wir *Automorphismen in bezug auf A*. Analog werden Automorphismen in bezug auf B erklärt. Diejenigen Permutationen, die sowohl in bezug auf A wie auf B Automorphismen sind, nennen wir Automorphismen in bezug auf $\mathfrak{A}$. Wir können nun zwei Variable *„in $\mathfrak{A}$ gleichgelagert"* nennen, wenn es einen Automorphismus in bezug auf $\mathfrak{A}$ gibt, der die eine Variable in die andere überführt. Nun wollen wir zeigen, daß Permutationen, die in bezug auf A Automorphismen sind, mit A vertauschbar sind, und umgekehrt.

Seien x_i und x_k in A aufeinanderfolgende Variable und $S = \begin{pmatrix} x_i \\ x_i' \end{pmatrix}$ eine solche Permutation.

Dann sind auch x_i' und x_k' „in A aufeinanderfolgend".

Es führt nun:	S x_i in x_i' über
und	A x_i' in x_k'
ferner	S^{-1} x_k' in x_k
also	SAS^{-1} x_i in x_k .

Das tut auch A, und, weil x_i beliebig ist, so wird $SAS^{-1} = A$. Die Umkehrung verläuft analog.

Damit nun ist zugleich bewiesen, daß die Gruppe der Automorphismen in bezug auf $\mathfrak{A}$ identisch ist mit $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$.

Die Transitivität der Automorphismengruppe bedeutet nichts anderes als die Gleichlagerung aller Variabeln in bezug auf $\mathfrak{A}$. Wir können daher den Satz VII in folgender Form aussprechen:

Satz VII*: *Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Komplex $\mathfrak{A}$ von Permutationen eine Gruppe $\{\mathfrak{A}\}$, die nur reguläre Permutationen enthält, erzeugt, ist, daß die Variabeln in bezug auf den Komplex $\mathfrak{A}$ gleichgelagert sind.*

§ 2. Eine Konstruktion einer geschlossenen Fläche mit Hilfe einer regulären Permutationsgruppe

Die Gleichlagerung der Variabeln im erzeugenden Komplex einer uniformen Gruppe, speziell einer regulären, legt nahe, die Variabeln als Eckpunkte einer Polygoneinteilung einer Fläche aufzufassen und die Automorphismengruppe in bezug auf $\mathfrak{A}$ als topologische Abbildungsgruppe dieser Fläche zu deuten.

Gegeben sei also eine reguläre Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$ vom Grade n. Wir stellen die n Variabeln als Punkte einer zu bildenden geschlossenen Fläche dar. Der Variablen x_μ entspreche der Punkt P_μ. Wir wählen ein erzeugendes System von Elementen der Gruppe $\mathfrak{G}$: $A_1, A_2, \ldots A_k$. Die Reihenfolge $A_1, A_2, \ldots A_k$ dieser Elemente sei ebenfalls festgelegt. A_i sei von der Ordnung a_i. Jedes A_i zerlegt sich daher in n/a_i Zyklen mit je a_i Variabeln.

Zwei Punkte P_λ und P_μ verbinden wir nun durch eine orientierte von P_λ nach P_μ führende A_i-Strecke, wenn A_i die Variable x_λ in x_μ überführt. Die A_i-Strecken lassen sich nun, den A_i-Zyklen gemäß, zu geschlossenen Streckenzügen verbinden. Jeder zum Element A_i gehörende geschlossene Steckenzug besteht genau aus a_i Strecken.

Diese Konstruktion werde für $i = 1, 2, \ldots k$ gemacht. An jeder Ecke P_λ mündet also je eine A_1-, A_2-, $\ldots$ A_k-Strecke und je eine geht von ihm aus. Nun füllen wir die geschlossenen Streckenzüge durch schlichte Flächenstücke aus. Die so erhaltenen Polygone, die je von einem A_i-Streckenzug berandet werden, nennen wir A_i-Polygone. An jeder Ecke stößt also je ein A_1-, A_2-, $\ldots$ A_k-Polygon zusammen. Jede A_i-Strecke berandet nur ein Polygon, weil sie nur zu einem geschlossenen Streckenzug gehört. Entsprechend der Orientierung der die Polygone berandenden Streckenzüge kann jedes Polygon mit einer Indikatrix versehen werden. Der so erhaltene Flächenkomplex wird nun zu einer geschlossenen Fläche ergänzt durch Einfügen neuer Polygone. Hiebei wird nun die vorgelegte Reihenfolge der A_i wesentlich sein. Die Konstruktion dieser neuen Polygone verläuft folgendermaßen:

Wir bilden zunächst aus den A_i-Strecken neue geschlossene Streckenzüge. Wir beginnen mit einer A_1-Strecke, fügen an ihren Endpunkt die dort beginnende A_2-Strecke, an deren Endpunkt die dort beginnende A_3-Strecke ... u. s. f., bis wir bei einer A_k-Strecke angelangt sind. An deren Endpunkt schließen wir die dort beginnende A_1-Strecke und setzen an ihren Endpunkt die dort beginnende A_2-Strecke usw. Mehrmaliges Passieren eines Eckpunktes ist für diesen Streckenzug durchaus zulässig. Falls nun der Streckenzug erst dann als geschlossen erklärt wird, wenn die erste verwendete A_1-Strecke wieder an die Reihe kommt, so passiert der Streckenzug jede Strecke nur einmal, weil jede Strecke des Zuges die vorangehende und folgende eindeutig bestimmt. Sind noch nicht alle Strecken in diesem neuen Streckenzug untergebracht, so konstruieren wir weitere solche Züge unter Berücksichtigung der *gleichen Reihenfolge* der A_i. Schließlich erhalten wir so ein System neuer geschlossener Streckenzüge, so daß jede Strecke genau zu einem dieser Züge gehört. Wir füllen nun diese neuen geschlossenen Streckenzüge durch neue schlichte Polygone aus. Wir können dann folgenden Satz aussprechen:

Satz X: *Das so erhaltene Polygonsystem bildet eine geschlossene orientierbare Fläche.*

Beweis:

Um dies zu beweisen, zeigen wir Punkt für Punkt, daß die Definition der geschlossenen orientierbaren Fläche[13]) erfüllt ist:

1) Die Polygone sind in endlicher Anzahl vorhanden.

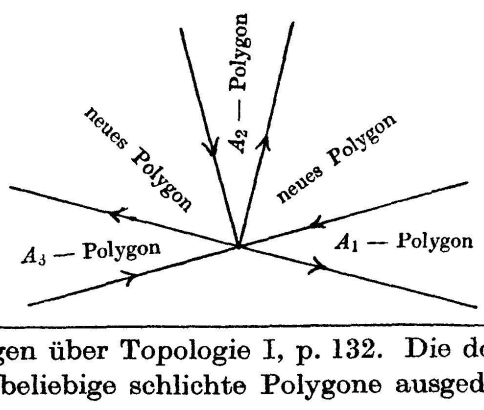
Das ist selbstverständlich, denn die Anzahl der Ecken und Kanten ist endlich.

2) An jeder Kante stoßen genau zwei Polygone zusammen.

Jede Strecke berandet genau ein A_i-Polygon. Sie gehört zu einem und nur zu einem der neuen geschlossenen Züge und berandet daher auch genau ein neues Polygon.

3) In jedem Eckpunkt bilden die anstoßenden Polygone einen Zyklus.

An jede Ecke stößt genau ein A_i-Polygon. An die einmündende A_1-Strecke schließt sich einerseits das A_1-Polygon, anderseits eines der neuen Polygone. Die fortführende A_2-Strecke bildet nach Konstruktion den andern Schenkel des Winkelraums dieses neuen Polygons.



(Fig. 1)

[13]) *Kerekjarto*, Vorlesungen über Topologie I, p. 132. Die dort auf Dreiecke bezogene Definition kann leicht auf beliebige schlichte Polygone ausgedehnt werden.

An sie schließt sich das A_2-Polygon an; an dieses wiederum ein neues, dessen anderer Schenkel die fortführende A_3-Strecke bildet. Der so entstehende Zyklus enthält daher alle an diese Ecke stoßenden A_i-Polygone, und ein weiterer Zyklus müßte daher aus lauter neuen Polygonen bestehen. Das ist unmöglich, weil neue Polygone nicht längs Strecken zusammenstoßen.

4) Die Fläche ist zusammenhängend.

$\mathfrak{G}$ ist ja transitiv vorausgesetzt. Es können daher irgend zwei Variable durch Elemente von $\mathfrak{G}$ ineinander übergeführt werden. Den Elementen entsprechend lassen sich Wege aus Strecken aufbauen, die infolge der Transitivität von jedem Endpunkt zu jedem andern geführt werden können.

5) Die Fläche ist orientierbar.

Die einzelnen A_i-Strecken wurden als orientierte Strecken eingeführt. Diese Orientierung können wir, wie schon oben erwähnt, auf die A_i-Polygone übertragen. Die neuen Streckenzüge sind ebenfalls nach Konstruktion durch die A_i-Strecken orientiert, weil ja immer der Endpunkt der einen Strecke mit dem Anfangspunkt der folgenden zusammenfällt. Orientieren wir nun die neuen Polygone mit der umgekehrten Indikatrix, so sind die beiden Ufer jeder Strecke tatsächlich mit entgegengesetzten Orientierungen versehen, weil an jede Strecke je ein altes und ein neues Polygon stößt. Damit ist eine kohärente Orientierung der Fläche gegeben, also die Fläche orientierbar. q. e. d.

In § 1 wurde gezeigt, daß $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ identisch ist mit der Automorphismengruppe in bezug auf den erzeugenden Komplex. Die Konstruktion des Streckenkomplexes, abgesehen von den ausfüllenden Polygonen, entspricht dem Dehn'schen[14]) Gruppenbild. Die obige Automorphismengruppe ist vermöge ihrer Definition so beschaffen, daß sie alle Berandungsrelationen des Streckenkomplexes invariant läßt.

Es liegt die Vermutung nun nahe, daß auch die hier durchgeführte Flächenkonstruktion so beschaffen ist, daß diese Automorphismengruppe zu einer Gruppe topologischer Abbildungen der Fläche ausgebaut werden kann. Da sie identisch ist mit $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$, diese wiederum nach I § 5 isomorph zu $\mathfrak{G}$, so wäre hiemit zugleich gezeigt, daß die Fläche, die mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ konstruiert wurde, auch eine Gruppe topologischer Abbildungen zuläßt, die isomorph ist zu $\mathfrak{G}$. Wir werden sehen, daß dies zutrifft.

---

[14]) *M. Dehn*, Math. Ann. 69 (1900), p. 137.

§ 3. *Die konstruierte Fläche als Überlagerungsfläche der Kugel*

$\mathfrak{G}$ sei wieder die reguläre Gruppe von oben mit den Erzeugenden $A_1, A_2, \ldots A_k$.

Wir konstruieren nun nach Hurwitz[15]) eine Überlagerungsfläche der Kugel auf folgende Weise: Wir wählen auf der Kugel einen Punkt O und setzen um O eine positive Orientierung fest. Nun wählen wir $k+1$ weitere Punkte $V_1, V_2, \ldots V_k, V_{k+1}$ und führen von O einfache Schnitte l_i zu den V_i in der Weise, daß die Schnitte in positiver Orientierung um O in der Reihenfolge: $l_1, l_2, \ldots l_k, l_{k+1}, l_1$ folgen. Nun stellen wir n Blätter der so aufgeschnittenen Kugel her und heften diese so zusammen, daß bei negativer Umkreisung von O beim Überschreiten des i-ten Schnittes man vom ϱ-ten zum ϱ_i-ten Blatt gelangt, wobei

$$A_i = \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho_i \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots k.$$

Bei Überschreiten von l_{k+1}, soll dabei das ϱ te Blatt in das ϱ_{k+1}-te übergehen, wo $\begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho_{k+1} \end{pmatrix} = (A_1 . A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_{k+1}$.

Bei vollständigem Umkreisen von O gelangt man so wieder zum ursprünglichen Blatt.

Definition: Die *Monodromiegruppe*[16]) der Überlagerungsfläche wird folgendermaßen erklärt: M sei ein beliebiger Punkt auf der Kugel, der nicht auf dem Schnittsystem liege. $M_1, M_2, \ldots M_n$ seien die entsprechenden Punkte auf der Überlagerungsfläche. γ sei eine geschlossene Kurve auf der Kugel durch M, die nur in innern Punkten die Schnitte l_i trifft und nur in endlich vielen Malen. Der Kurve γ auf der Kugel entsprechen dann n verschiedene Kurven γ_i auf der Überlagerungsfläche, die je von einem der Punkte M_i ausgehen und γ als Spurkurve haben. Die Kurve γ_i führt im allgemeinen nicht nach M_i zurück, sondern etwa nach M_{λ_i}. Die Permutationen $\begin{pmatrix} i \\ \lambda_i \end{pmatrix}$ bilden dann die Monodromiegruppe.

Zu jedem M_i gehört ein Blatt der Überlagerungsfläche, und so kann ich die Monodromiegruppe auch als Permutationsgruppe der Blätter auffassen. Die Kurven γ_i erfahren nun bloß bei Überschreiten der Schnitte Permutationen der Blätter, und zwar gerade die Permutationen A_i, resp. A_i^{-1}, so daß die Monodromiegruppe identisch ist mit der Gruppe $\mathfrak{G}$, die unsrer Flächenkonstruktion zugrunde gelegt wurde.

Die Überlagerungsfläche nennt man *regulär*[17]), wenn entweder alle zu

[15]) *A. Hurwitz,* Math. Ann. 39 (1891), p. 1—61.
[16]) *Threlfall-Seifert,* Lehrbuch der Topologie, p. 198.
[17]) *Kerekjarto,* Vorlesungen über Topologie I, p. 162.

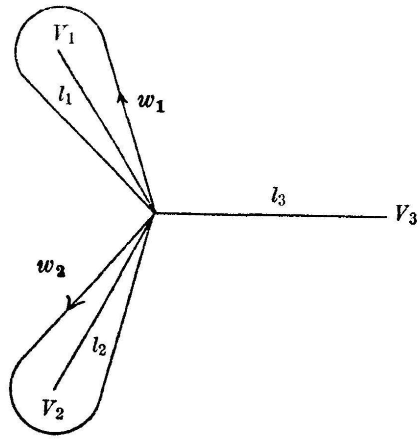
einer geschlossenen Spurkurve γ gehörenden γ_i geschlossen oder alle offen sind. Das ist offenbar der Fall, wenn die Monodromiegruppe nur reguläre Permutationen enthält, und das ist hier der Fall. Wir haben es also mit einer regulären Überlagerungsfläche zu tun.

Definition: Unter einer *Decktransformation*[17]) einer Überlagerungsfläche verstehen wir eine topologische Abbildung der Überlagerungsfläche in sich, die nur Punkte über dem gleichen Spurpunkt permutiert.

Nun gilt der Satz:

Satz XI[18])**:** *Bei regulären Überlagerungsflächen ist die Gruppe der Decktransformationen isomorph zur Monodromiegruppe; sie permutiert die Blätter der Überlagerungsfläche, wie* $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$, *wenn* $\mathfrak{G}$ *die Monodromiegruppe darstellt.*

Wir konstruieren nun um die Verzweigungspunkte $V_i (i = 1 \ldots k)$ einfache geschlossene Wege W_i, die in O beginnen und enden, so daß für $k = 2$ folgende Figur auf der Kugel entsteht.



(Fig. 2)

Dem einmaligen Umlauf w_1 um V_1 entsprechen auf der Überlagerungsfläche n Wege, die gerade die Permutation A_1 auf O ausüben. Diese Wege lassen sich also als A_1-Strecken einführen. Entsprechend die andern. Nach a_1 Umläufen (a_1 = Ordnung von A_1) schließen sich die dem Spurweg w_1 entsprechenden Wege. Sie beranden die dem Dreieck $(V_1 - l_1 \quad O - w_1 - O - l_1 - V_1)$ entsprechenden schlichten Polygone, die wir als A_1-Polygone einführen können. Entsprechendes gilt für die andern A_i-Polygone. Schließlich entsprechen dem Äußern der Kugel Polygone auf der Überlagerungsfläche, die genau durch die den Kantenzügen, welche die neuen Polygone in unsrer Konstruktion beranden,

[17]) *Kerekjarto,* Vorlesungen über Topologie I, p. 162.

[18]) *W. Scherrer,* Zur Theorie der endl. Gruppen top. Abb. geschl. Flächen in sich. C. M. H., vol. 2, pag. 88.

entsprechenden Kantenzüge berandet werden. So finden wir unsre Konstruktion auf dieser Überlagerungsfläche wieder. Mit $\mathfrak{G}$ als Monodromiegruppe und mit Hilfe von Satz XI bestätigt sich nun unsere Vermutung, daß die oben erwähnte Automorphismengruppe als Gruppe topologischer Abbildungen der konstruierten Fläche aufgefaßt werden kann.

Dyck[19]) hat eine ähnliche Konstruktion, ausgehend von der freien Gruppe gefunden. Die Figur auf der Kugel, durch die duale ersetzt und auf die Überlagerungsfläche übertragen, läßt die Dyck'sche Darstellung als duale der unsrigen erkennen. Es ist interessant, wie von zwei ganz verschiedenen Ausgangspunkten: freie Gruppen, reguläre Permutationen, das gleiche Gruppenbild gewonnen werden kann.

Die so in § 2 mit Hilfe einer regulären Gruppe konstruierte Fläche ist nicht nur von der Wahl der Erzeugenden, sondern auch von ihrer Reihenfolge abhängig.

Schon mit Hilfe der Hurwitz'schen Relation erkennt man die Möglichkeit, mit der Tetraedergruppe als Ausgangsgruppe zwei verschiedene Flächen, den Torus und die Kugel, zu konstruieren. Die Hurwitz'sche Relation für reguläre Überlagerungsflächen lautet nämlich, wenn wir beachten, daß die Ordnung von $A_i = a_i$ ist, folgendermaßen:

$$2-2p = n(2-2\pi) - n\sum_{1}^{k+1}{}_i \left(1-\frac{1}{a_i}\right)^{20)}$$

p = Geschlecht der Überlagerungsfläche
π = Geschlecht der Grundfläche
n = Blätterzahl.

In unserm Fall ist $\pi = 0$ und n gleich der Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Für den Fall der Tetraedergruppe können wir uns auf zwei Erzeugende beschränken. Es wird dann a_3 gleich der Ordnung des Produktes der Erzeugenden.

Wir erhalten also:

$$2-2p = 12\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-1\right).$$

Die Tetraedergruppe kann auf folgende zwei Arten erzeugt werden:

1. Indem wir zwei Elemente der Ordnung 3 nehmen, die in der gleichen Nebenreihe der Vierergruppe liegen. Ihr Produkt ist dann in der andern

[19]) *W. V. Dyck*, Math. Ann. 20 (1882), p. 1—44.
[20]) *Kerekjarto*, Vorlesungen über Topologie I, p. 162.

Nebenreihe der Vierergruppe, weil die Vierergruppe Normalteiler ist; es ist daher von der Ordnung 3.

Es wird also
$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3$$
$$a_3 = 3$$
und daher
$$p = 1: \text{Fall des Torus.}$$

2. Indem wir zwei Elemente der Ordnung 3 nehmen, die in verschiedenen Nebenreihen der Vierergruppe, jedoch nicht in der gleichen zyklischen Gruppe liegen. Ihr Produkt liegt dann in der Vierergruppe und ist daher von der Ordnung 2.

Wir erhalten
$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3$$
$$a_3 = 2$$
und daher
$$p = 0: \text{Fall der Kugel.}$$

III. TEIL

§ 1. Der Zusammenhang zwischen Monodromie- und Decktransformationengruppe einer Überlagerungsfläche

Bei der vorigen Untersuchung wurde der Satz benutzt, daß bei einer regulären Überlagerungsfläche Monodromiegruppe und Decktransformationengruppe sich so zueinander verhalten, wie eine reguläre Gruppe $\mathfrak{G}$ zu der ihr zugeordneten Gruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$. Dieser Sachverhalt läßt sich nun verallgemeinern, indem die Regularität der Überlagerungsfläche und damit auch die Regularität der Monodromiegruppe fallen gelassen wird. Trotzdem bleibt dann die Tatsache bestehen, daß $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ als Decktransformationengruppe der Überlagerungsfläche aufgefaßt werden kann.

Wir werden diese Erweiterung in zwei Fällen aufzeigen können:

1) Für alle verzweigten Überlagerungspolyederflächen von Polyederflächen.

2) Für alle unverzweigten zusammenhängenden simplizialen Überlagerungskomplexe ebensolcher Komplexe.

§ 2. Überlagerung von Polyederflächen

Unter einer Polyederfläche sei eine berandete oder geschlossene triangulierte Fläche verstanden.

Bei Untersuchung[21]) der topologischen Gruppen von Polyederflächen hat es sich als nützlich erwiesen, Faltverzweigungen einzuführen. Wir betrachten hier den allgemeinen Fall von gefalteten oder ungefalteten Überlagerungsflächen von Polyederflächen. Es ergibt sich daher eine gewisse Modifizierung der Definition verzweigter Überlagerungsflächen von Kerekjarto[22]).

Wir definieren diesen Begriff folgendermaßen:

Definition: Eine Polyederfläche F ist Überlagerungsfläche einer Polyederfläche Φ, wenn folgende Beziehungen gelten:

1) Jedem Dreieck $\bar{\varDelta}$ von F ist ein Dreieck $\varDelta$ von Φ zugeordnet durch eine topologische Abbildung von $\bar{\varDelta}$ auf $\varDelta$, bei der den Eckpunkten und Kantenpunkten von $\bar{\varDelta}$, die Eckpunkte, bzw. die Kantenpunkte von $\varDelta$ entsprechen.

2) Zwei Dreiecken $\bar{\varDelta}_1$ und $\bar{\varDelta}_2$, die eine Kante gemeinsam haben, entsprechen:

a) entweder zwei solche Dreiecke $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$, die ebenfalls eine Kante gemeinsam haben; auf der gemeinsamen Kante von $\bar{\varDelta}_1$ und $\bar{\varDelta}_2$ ist die Abbildung auf die gemeinsame Kante von $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ in beiden Dreiecken dieselbe.

b) oder einem Dreieck $\varDelta$ auf Φ mit einer Randkante, die der gemeinsamen Kante von $\bar{\varDelta}_1$ und $\bar{\varDelta}_2$ entspricht; auf dieser gemeinsamen Kante ist die Abbildung auf die Randkante von $\varDelta$ in beiden Dreiecken dieselbe.

3) Sind $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ zwei benachbarte Dreiecke von Φ und ist $\bar{\varDelta}_1$ ein beliebiges dem Dreieck $\varDelta_1$ entsprechendes Dreieck von F, so soll es ein Dreieck $\bar{\varDelta}_2$ von F geben, welches dem Dreieck $\varDelta_2$ entspricht und $\bar{\varDelta}_1$ benachbart ist.

Es folgt aus der Definition, daß über jedem Dreieck $\varDelta$ von Φ die gleiche Anzahl von Dreiecken $\bar{\varDelta}$ von F liegen. Diese Zahl nennen wir die Blätterzahl der Überlagerungsfläche.

§ 3. Korrespondenz der Wege auf Überlagerungs- und Grundfläche

Wir teilen die Punkte von Φ in drei Kategorien:

1) Reguläre Punkte: Alle innern Punkte der Dreiecke und innern Kanten.

---

21) *W. Scherrer*, Zur Theorie der endl. Gruppen top. Abb. geschl. Flächen in sich.

22) *Kerekjarto*, Vorlesungen über Topologie I, p. 158.

2) Halbsinguläre Punkte: Alle innern Randkantenpunkte.

3) Singuläre Punkte: Alle Eckpunkte.

Bemerkung: Die hier eingeführte Einteilung ist lediglich der Einfachheit halber so gewählt worden. Man kann auch bloß diejenigen Punkte zu singulären Punkten zählen, die wirklich Verzweigungspunkte sind.

Wir führen nun auf Φ und F den Begriff des *normalen Weges* ein.

Auf Φ nennen wir einen Weg normal, wenn er keine singulären und nur endlich viele halbsinguläre Punkte besitzt.

Auf F nennen wir einen Weg normal, wenn sein Spurweg auf normal, und wenn er über den halbsingulären Punkten die Faltungskanten überschreitet.

Unter Faltungskanten verstehen wir dabei diejenigen Kanten von F, die Randkarten von Φ entsprechen, ohne selbst Randkanten von F zu sein. Wir betrachten nun einen Weg γ auf Φ, der im Innern nur reguläre Punkte enthält. M sei ein solcher Punkt. n sei die Blätterzahl von F. Dann entsprechen dem Punkt M auf Φ n verschiedene Punkte M_i auf F. Wir betrachten nun eine Kreisumgebung von M. Ihr entsprechen auf F n verschiedene Kreisumgebungen, falls die Umgebung genügend klein gewählt wird. Es läßt sich daher zu dem Weg γ auf Φ in der Umgebung von M_i auf F eindeutig ein Weg γ_i bestimmen, dessen Spurweg γ ist. Durch Fortsetzung dieser Umgebungen erreichen wir so das ganze abgeschlossene Stück des Weges γ samt den berandenden Punkten, die eventuell halbsingulär sind. Wenn wir uns nun auf normale Wege auf F beschränken, so können wir diese Wege auch in den halbsingulären Punkten fortsetzen, d. h. eindeutig einen Weg auf F bestimmen, der einen vorgegebenen normalen Weg auf Φ als Spurweg hat. Den halbsingulären Punkten auf Φ entsprechen nämlich auf F entweder Randpunkte oder Punkte auf Faltungskanten. Im ersten Fall bedarf es keiner weitern Festsetzung, indem der Halbumgebung auf Φ eine Halbumgebung auf F entspricht, in welcher der Weg eindeutig fortgesetzt werden kann. Im andern Fall entspricht der Randkante von Φ eine innere Kante von F. Der Halbumgebung auf Φ entspricht jetzt eine gefaltete volle Umgebung auf F. Somit ist zu entscheiden, auf welcher Hälfte der Weg fortgesetzt werden soll. Das ist nun aber schon entschieden durch die Festsetzung, daß ein normaler Weg auf F die Faltungskante überschreitet. Wir sehen also, daß es zu jedem einen Punkt M enthaltenden normalen Spurweg γ einen und nur einen Weg γ_i gibt, der normal auf F liegt und durch den Punkt M_i geht.

Erst auf Grund dieser Tatsachen ist es nun möglich, die Monodromiegruppe zu definieren. Die Definition ist die Erweiterung der gewöhnlichen Definition[23]) auf unsern Fall.

Definition: Wir wählen einen beliebigen regulären Punkt M auf Φ. M_i seien die entsprechenden Punkte auf F. Statt nun überhaupt alle geschlossenen Wege zuzulassen, betrachten wir nur die normalen geschlossenen Wege auf Φ. γ sei ein solcher in M beginnender normaler Weg. Der in M_i beginnende γ entsprechende normale Weg γ_i auf F endige in M_{ϱ_i}. Die Abbildungen $\binom{i}{\varrho_i}$ können wir als Permutationen auffassen. Die Permutationsgruppe dieser so erhaltenen Permutationen der M_i bildet die Monodromiegruppe.

Sie hängt, wie man leicht sieht, nur unwesentlich von der Wahl des Punktes M ab, solang dieser regulär gewählt wird. Die Monodromiegruppe ist transitiv, weil die Polyederflächen zusammenhängend sind, und irgend zwei Punkte M_i und M_k daher durch einen normalen Weg verbunden werden können.

Definition: Die Decktransformationen[24]), im folgenden kurz mit D.T. bezeichnet, sind definiert als topologische Abbildungen der Überlagerungsfläche F in sich, bei der jeder Punkt von F in einen über demselben Spurpunkt liegenden Punkt übergeht. Die Gesamtheit der D.T. bildet die D.T.-Gruppe.

M sei wieder der vorhin betrachtete reguläre Punkt. Bei jeder D.T. erfahren die Punkte M_i eine Permutation, die wir als die der D.T. zugeordnete Permutation bezeichnen. Wir zeigen nun, daß jede solche Permutation aber auch nur einer D.T. zugeordnet ist.

Sind nämlich T_1 und T_2 zwei D.T., denen die gleiche Permutation der M_i entspricht, so entspricht der D.T.: $T_1^{-1}T_2$ die identische Permutation. Wenn nun $T_1 \neq T_2$, so gibt es einen Punkt P_1 auf F, der durch $T_1^{-1}T_2$ in einen von P_1 verschiedenen Punkt P_2 übergeht. Verbinden wir M_1 mit P_1 durch einen normalen Weg γ_1, so wird γ_1 in einen Weg mit dem gleichen Spurweg transformiert.

Ist er auch normal, so ist er durch M_1 und γ eindeutig bestimmt und daher mit γ_1 identisch. Es folgt daraus $P_1 = P_2$, und also $T_1^{-1}T_2 = E$. Wir haben nun noch zu zeigen, daß jede D.T. normale Wege in normale

23) *Threlfall-Seifert*, Lehrbuch der Topologie, p. 198.

24) *Kerekjarto*, Vorlesungen über Topologie, p. 162.

überführt. Sei γ_1 ein normaler Weg von F, der durch die D.T. T in den Weg γ_2 übergeht. Der Spurweg γ von γ_1 ist auch der Spurweg von γ_2. Daher ist der Spurweg von γ_2 normal. Ferner gehen bei einer D.T. Ränder von F in Ränder über und, da die Ränder von Φ invariant bleiben, so müssen auch Faltungskanten in Faltungskanten übergehen. Würde nun im Punkte, welcher dem Punkte entspricht, wo γ_1 eine Faltungskante überschreitet, der Bildweg γ_2 dies nicht tun, so würde er sich topologisch anders verhalten, als der Urweg γ_1. Daher ist γ_2 normal. Es entspricht als der D.T.-Gruppe eine isomorphe Permutationsgruppe der M_i.

Die Frage, wie nun diese der D.T.-Gruppe zugeordnete Permutationsgruppe mit der Monodromiegruppe in Zusammenhang steht, wird nun durch folgenden Satz, der eine Verallgemeinerung von Satz XI darstellt, beantwortet:

Satz XII: *Ist $\mathfrak{H}$ die Monodromiegruppe, so ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ die der D.T.-Gruppe zugeordnete Permutationsgruppe.*

Beweis:

Der Beweis zerfällt in zwei Teile, entsprechend den zwei Behauptungen, die in Satz XII enthalten sind.

Behauptung A: Jede D.T.-Permutation ist mit jeder Monodromiepermutation vertauschbar.

Behauptung B: Jede Permutation, die mit jeder Monodromiepermutation vertauschbar ist, ist eine D.T.-Permutation.

Beweis von A:
T sei eine D.T.-Permutation,
S sei eine Monodromiepermutation.

Wir betrachten einen normalen geschlossenen Weg γ auf Φ, der S entspricht. Dann erfahren die γ_i durch T eine Permutation, da ja normale Wege in normale übergehen. Diese Permutation der γ_i ergibt für die Endpunkte der γ_i eine entsprechende Permutation, die wiederum mit T identisch sein muß.

Es führe $\quad S\, M_i$ in $M_{\varrho i}$
und $\quad T\, M_i$ in M_k.

T führt also auch γ_i in γ_k und daher auch $M_{\varrho i}$ in $M_{\varrho k}$. Also führt $S T S^{-1} M_i$ in M_k über.

Das tut auch T, und da M_i beliebig, so wird

$$\begin{aligned} STS^{-1} &= T \\ ST &= TS\,. \end{aligned} \qquad \text{q. e. d.}$$

Beweis von B:

Der Beweis ist weit komplizierter als der Beweis von A, da nun eine topologische Abbildung zu konstruieren ist mit Hilfe einer Permutation der M_i.

Im folgenden seien die regulären, bzw. halbsingulären oder singulären Punkten auf Φ entsprechenden Punkte auf F ebenfalls als reguläre, bzw. halbsinguläre oder singuläre Punkte auf F bezeichnet.

T sei nun eine Permutation der M_i, die mit allen Monodromiepermutationen vertauschbar ist. T führe den Punkt M_1 in M_2 über. Wir erklären zunächst in jedem regulären Punkt P_1 von F eine Abbildung auf einen über dem gleichen Spurpunkt liegenden Punkt P_2 mit Hilfe der Abbildung T und einem M_1 mit P_1 verbindenden normalen Weg γ_1.

γ_2 sei der von M_2 ausgehende γ_1 entsprechende Weg. Er führe zum Punkte P_2.

Wir erklären nun die Abbildung:

$$T_\gamma(P_1) = P_2 .$$

Diese Abbildung hängt scheinbar noch von γ_1 ab. Dem ist aber nicht so. Es sei δ_1 ein anderer normaler Weg, der M_1 mit P_1 verbindet. Den Wegen γ_1 und δ_1 mögen die Spurwege γ und δ entsprechen. Dem geschlossenen Spurweg $\gamma\,\delta^{-1}$ entspreche die Permutation S der Monodromiegruppe.

Nun führt T^{-1} M_2 in M_1
und S M_1 in M_1, weil ja $\gamma_1\,\delta_1^{-1}$ der über $\gamma\,\delta^{-1}$ von M_1 ausgehende normale Weg ist.

Ferner führt T wieder M_1 in M_2 über. Also führt $T^{-1}S\,T$ M_2 in sich über.

Weil nun $T^{-1}S\,T = S$ ist, so führt auch S M_2 in sich über.

Es sei σ der von P_2 ausgehende, über δ^{-1} liegende normale Weg. Somit ist $\gamma_2\sigma$ der von M_2 ausgehende, über $\gamma\delta^{-1}$ liegende normale Weg. Daher führt σ P_2 in M_2 über. σ^{-1} ist also der Weg, welcher über δ von M_2 ausgeht. Nach Definition muß also $T_\delta(P_1) = P_2$ sein, oder

$$T_\gamma(P_1) = T_\delta(P_1) .$$

Um nun die Abbildung $T(P_1)$ auch auf halb- und ganzsinguläre Punkte von F zu übertragen, bemerken wir, daß zu jedem Punkt P von Φ eine Umgebung (kann auch eine Halbumgebung sein) $U(P)$ derart angenommen werden kann, daß zu jedem der verschiedenen Punkte $P_1, P_2, \ldots P_r$ $(r \leqq n)$ auf F eine Umgebung $U(P_i)$ existiert, die nur Bilder von $U(P)$ enthält, so daß alle $U(P_i)$ mit festem P untereinander punktfremd sind, und daß jeder Punkt X_1 von F, dessen Spur X in $U(P)$ liegt, auch in einer der Umgebungen $U(P_i)$ liegt. Ferner enthält jede der Umgebungen $U(P_i)$ reguläre Punkte, und je zwei solche, die in der gleichen Umgebung $U(P_i)$ liegen, lassen sich auch innerhalb dieser durch einen normalen Weg verbinden.

Es sei nun V_1 ein singulärer Punkt von F. Wir wählen eine Folge regulärer Punkte $P_1^{(1)}, P_1^{(2)}, \ldots$ von F, die gegen V_1 konvergiert und die alle schon in $U(V_1)$ liegen. $P_2^{(1)}, \ldots$ seien die durch $T(P_1)$ vermittelten Bilder. Ich behaupte nun, daß die Bildfolge ebenfalls konvergiert. Die Folge der Spurpunkte konvergiert jedenfalls gegen den Spurpunkt V von V_1. Es genügt offenbar, zu zeigen, daß zwei Punkte $P_2^{(i)}$ und $P_2^{(k)}$ in der gleichen Umgebung $U(V_2)$ liegen, wo V_2 einer der über V liegenden Punkte ist. Es liege nun im Gegenteil $P_2^{(i)}$ in $U(V_2)$ und $P_2^{(k)}$ in $U(V_2')$. Wir verbinden $P_1^{(i)}$ mit $P_1^{(k)}$ durch einen normalen Weg ε_1, der ganz in $U(V_1)$ verläuft. Es sei ferner M_1 mit $P_1^{(i)}$ durch den normalen Weg γ_1 verbunden. $P_2^{(i)}$ ist dann durch den von M_1 ausgehenden über γ_1 liegenden normalen Weg γ_2 definiert. Ebenso ist $P_2^{(k)}$ durch den von M_2 ausgehenden normalen Weg $\gamma_2\,\varepsilon_2$, der $\gamma_1\,\varepsilon_1$ entspricht, definiert. Der Spurweg von ε_1 und ε_2 liegt ganz in $U(V)$, weil ε_1 ganz in $U(V_1)$ liegt. Also liegt auch ε_2 ganz in $U(V_2)$ und daher ist auch $P_2^{(k)}$ in $U(V_2)$, also $V_2' = V_2$.

Wir definieren nun: $T(V_1) = V_2$.

Diese Erklärung ist scheinbar von der Wahl der Folge $P_1^{(i)}$ abhängig. Wenn aber eine andere Folge $Q_1^{(i)}$ eine Bildfolge definieren würde, die nicht gegen V_2 konvergiert, so müßte doch die aus $P_2^{(i)}$ und $Q_2^{(i)}$ kombinierte Folge konvergieren, weil die Urfolge konvergiert. $P_1^{(i)}$ und $Q_1^{(i)}$ konvergieren ja beide gegen V_1. Weil aber die Teilfolge $P_2^{(i)}$ gegen V_2 konvergiert, so muß auch die Teilfolge $Q_2^{(i)}$ gegen V_2 konvergieren. Somit ist die Erklärung $T(V_1) = V_2$ unabhängig von der Wahl der Folge.

Wir haben jetzt eine Abbildung $T(P_1) = P_2$ für die ganze Fläche F eindeutig erklärt, und es gilt nun noch folgendes zu zeigen, damit wir erkennen, daß wir es hier mit einer Decktransformation zu tun haben:

1) $T(P_1)$ läßt die Spurpunkte invariant.
2) $T(P_1)$ ist stetig.
3) $T(P_1)$ ist umkehrbar eindeutig.

1) $T(P_1)$ läßt die Spurpunkte invariant.

Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $T(P_1)$.

2) $T(P_1)$ ist stetig.

Es sei P_1 ein beliebiger Punkt von F. Es genügt zu zeigen, daß der Bildpunkt X_2 jedes Punktes X_1, der in $U(P_1)$ liegt, in $U(P_2)$ liegt. Für reguläre Punkte wurde dies schon durch die Art der Erklärung von $T(V_1)$ gezeigt. S_1 sei ein regulärer Punkt, der in $U(X_1)$ liege. Ferner sei noch $U(X_1)$ ganz in $U(P_1)$ gewählt. Dann liegt $T(S_1) = S_2$ in $U(P_2)$ und anderseits in $U(X_2)$. $U(X_2)$ liegt ganz in einer bestimmten Umgebung $U(P'_2)$. Da sie aber S_2 enthält, liegt sie in $U(P_2)$. Also liegt X_2 in $U(P_2)$.

3) $T(P_1)$ ist umkehrbar eindeutig.

Dies ergibt sich daraus, daß ich ja eine Abbildung $T^{-1}(P_2) = P_1$ konstruieren kann, indem ich die Abbildung $T^{-1}(M_2) = M_1$ stetig fortsetze. Die Abbildungen ergänzen sich offenbar zur Identität.

$T(P_1)$ ist also eine Decktransformation. Es ist bloß noch zu zeigen, daß $T(P_1)$ nicht nur M_1 in M_2, sondern auch die andern Punkte M_i so permutiert, wie die vorgegebene Permutation T. Dies ergibt sich durch folgende Überlegung:

Nach Behauptung A ist die D.T.-Gruppe Untergruppe von $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$. Diese ist uniform, weil die Monodromiegruppe $\mathfrak{H}$ transitiv ist (Satz VIII). Somit ist die D.T. $T(P_1)$ als Element von $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ eindeutig durch die Abbildung $M_1 \to M_2$ bestimmt und daher mit T identisch. Damit ist auch Behauptung B vollständig bewiesen. q. e. d.

Bevor ich nun zu der zweiten der in § 1 beschriebenen Erweiterungen von Satz XI übergehe, möchte ich an einem einfachen Beispiel zeigen, wie dieser Satz funktioniert.

Gegeben sei ein Rechteck, das, wie Fig. 3 zeigt, in 8 Teile geteilt sei.

1	2	3	4
5	6	7	8

(Fig. 3)

Man falte nun das Rechteck an der Längsachse, so daß die Rechtecke

1 und 5
2 und 6
3 und 7
4 und 8

aufeinanderzuliegen kommen.

Nun falte man noch an der Querachse und schließlich noch an der einzig übrigbleibenden innern Kante, so daß schließlich alle 8 Teile übereinanderliegen.

Das so gefaltete Rechteck bildet nun eine 8-blättrige Überlagerungsfläche irgendeines Rechtecks. Die erzeugenden Monodromiepermutationen werden erhalten bei Überschreiten der Ränder des Spurrechtecks. Man erhält so die folgenden Blätterpermutationen:

$$\begin{aligned}
S_1 &= (1)\,(2\;3)\,(4)\,(5)\,(6\;7)\,(8)\\
S_2 &= (1\;5)\,(2\;6)\,(3\;7)\,(4\;8)\\
S_3 &= (1\;2)\,(3\;4)\,(5\;6)\,(7\;8)\\
S_4 &= (1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(5)\,(6)\,(7)\,(8)
\end{aligned}$$

Durch Ausrechnen erhält man aus diesen 4 Permutationen eine Gruppe der Ordnung 16.

Die D.T.-Gruppe kann nur aus den Spiegelungen an der Längsachse und Querachse und der Drehung um Π um den Mittelpunkt bestehen. Es muß die Vierergruppe sein.

Ihre Permutationen sind

$$\begin{aligned}
T_1 &= E\\
T_2 &= (1\;5)\,(2\;6)\,(3\;7)\,(4\;8)\\
T_3 &= (1\;4)\,(2\;3)\,(5\;8)\,(6\;7)\\
T_4 &= (1\;8)\,(2\;7)\,(3\;6)\,(4\;5)
\end{aligned}$$

Man erkennt nun leicht, daß diese T mit sämtlichen S vertauschbar sind.

$\mathfrak{H}$ ist von der Ordnung 16 $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ ist von der Ordnung 4 und Grad 8. Also ist $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H})$ von der Ordnung $4^2 2! = 32$. Das ist ein weiteres Beispiel dafür, daß $\mathfrak{M}^2(\mathfrak{H})$ bei transitiven Gruppen nicht mit $\mathfrak{H}$ identisch zu sein braucht.

§ 5. *Übertragung auf allgemeine unverzweigte Überlagerungskomplexe*

Nach Threlfall-Seifert[25]) kann der unverzweigte Überlagerungskomplex folgendermaßen definiert werden.

Definition: $\mathfrak{K}$ und $\tilde{\mathfrak{K}}$ seien zwei endliche oder unendliche zusammenhängende (simpliziale) Komplexe. $\tilde{\mathfrak{K}}$ ist eine Überlagerung von $\mathfrak{K}$, wenn eine stetige Abbildung G von $\tilde{\mathfrak{K}}$ auf $\mathfrak{K}$ gegeben ist, die folgende Bedingungen erfüllt:

Ül. 1: In jedem Punkt P von $\mathfrak{K}$ bildet sich mindestens ein Punkt $\tilde{P}$ von $\tilde{\mathfrak{K}}$ ab. P ist der Grund-(Spur-)punkt von $\tilde{P}$.

[25]) *Threlfall-Seifert,* Lehrbuch der Topologie, p. 181 und p. 184.

Ül. 2: Sind $\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$, ... die sämtlichen über P liegenden Punkte, so gibt es ausgezeichnete Umgebungen $U(P)$, $U(\tilde{P}_1)$, ... von der Art, daß sich $U(\tilde{P}_1)$, $U(\tilde{P}_2)$, ... durch G topologisch auf $U(P)$ abbilden, und daß

Ül. 3: ein Punkt von $\tilde{\mathfrak{K}}$, der über einem Punkte von $U(P)$ liegt, mindestens zu einer der ausgezeichneten Umgebungen $U(P_i)$ gehört.

Eine Unterscheidung in reguläre und singuläre Punkte ist hier nicht notwendig. Auch brauchen wir uns nicht auf besondere Wege zu beschränken, sondern können gleich folgenden Satz aussprechen:

Satz XIII: *Ist W ein von A nach B führender Weg in $\mathfrak{K}$ und $\tilde{A}$ ein über A liegender Punkt in $\tilde{\mathfrak{K}}$, so gibt es genau einen Weg $\tilde{W}$ mit dem Anfangspunkt $\tilde{A}$, der W überlagert.*

Die Monodromiegruppe und die D.T.-Gruppe lassen sich wie in § 4 definieren. Die D.T.-Gruppe ist auch hier wieder isomorph zu der Permutationsgruppe der Punkte M_i, die sie durch die D.T. erfahren.

Wir können also sogleich zum Analogon von Satz XII übergehen.

Satz XIV: *Ist $\mathfrak{H}$ die Monodromiegruppe eines unverzweigten zusammenhängenden Überlagerungskomplexes, so ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ die der D.T.-Gruppe zugeordnete Permutationsgruppe.*

Beweis: Der Beweis braucht nur skizziert zu werden, da er demjenigen von Satz XII ganz analog läuft.

Behauptung A: Jede D.T.-Permutation ist mit jeder Monodromiepermutation vertauschbar.

Der Beweis von A verläuft genau wie in § 4.

Behauptung B: Jede Permutation, die mit jeder Monodromiepermutation vertauschbar ist, ist eine D.T.-Permutation.

Beweis von B: T sei eine Permutation von $\mathfrak{M}(\mathfrak{H})$ und führe M_1 in M_2 über.

Nun erklären wir wieder die Abbildung: $T_\gamma(P_1)$, und zeigen, wie in § 4 mit Hilfe der Vertauschbarkeit: $T_\gamma(P_1) = T_\delta(P_1)$.

Die in § 4 betrachteten Umgebungen sind hier schon in Ül. 2 und Ül. 3 direkt garantiert, so daß also auch die Stetigkeit und Umkehrbarkeit von $T(P_1)$ gezeigt werden kann. Der Schluß des Beweises verläuft entsprechend.

Um diesen Satz im Falle unverzweigter Überlagerungskomplexe mit den Untersuchungen über die Fundamentalgruppe in Zusammenhang zu bringen, benutzen wir einen Satz von Kuhn[26]), der dort zwar nicht explizit steht, der aber aus den dortigen Ausführungen unmittelbar gefolgert werden kann:

Satz XV: *Ist $\mathfrak{G}$ eine transitive Gruppe, und $\mathfrak{H}$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}$, welche eine Variable festhält, so ist $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{Z}/\mathfrak{H}$, wo $\mathfrak{Z}$ der Normalisator von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ ist.*

Der dortige Satz gibt zwar nur die Gleichheit der Ordnungen von $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ und $\mathfrak{Z}/\mathfrak{H}$, aber der dort gegebene Beweis läßt unmittelbar auch auf die Isomorphie schließen. Diesen Satz können wir hier anwenden, wenn wir für $\mathfrak{G}$ zunächst die Monodromiegruppe einsetzen. Da aber bei unverzweigten Überlagerungskomplexen die Monodromiegruppe homomorph zur Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{K}$ ist, so können wir alles auf die Fundamentalgruppe beziehen: Wir können dann unsern Satz XIV so formulieren:

Die D.T.-Gruppe ist isomorph der Faktorgruppe $\mathfrak{Z}/\mathfrak{H}$, wo $\mathfrak{H}$ die der Fundamentalgruppe des Überlagerungskomplexes entsprechende Untergruppe der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{K}$ ist und $\mathfrak{Z}$ der Normalisator von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{F}$.

Dieser Satz ist aber identisch mit der Lösung einer Aufgabe in Threlfall-Seifert[27]). Umgekehrt läßt sich mit Hilfe des Satzes von Kuhn schließen, daß die D.T.-Gruppe isomorph ist zu $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$, nicht aber folgt daraus, daß die M_i unter der D.T.-Gruppe gerade die Permutation der Gruppe $\mathfrak{M}(\mathfrak{G})$ erfahren.

Der Satz läßt sich nur bei *unverzweigten* Überlagerungskomplexen mit den Sätzen über die Fundamentalgruppe in Zusammenhang bringen. Bei *verzweigten* Überlagerungsflächen ist die Monodromiegruppe im allgemeinen nicht mehr homomorph zur Fundamentalgruppe der Grundfläche. Es besteht aber auch kein unmittelbarer Zusammenhang. Darum war es wichtig, gerade für diesen Fall den Satz XII ausführlich zu beweisen.

---

[26]) *H. Kuhn*, Amer. J. of Math., vol. 26 (1904), p. 67.
[27]) *Threlfall-Seifert*, Lehrbuch der Topologie, p. 198, 57, Aufgabe 1.

(Eingegangen den 25. Juli 1937.)