Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1937-1938)

Artikel: Sur l'équation de la chaleur.
Autor: Nicolesco, Miron
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10987

Sur l'équation de la chaleur

Par MIRON NICOLESCO

L'équation de Fourier, dite *de la chaleur*,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

a suscité de nombreuses et belles études: il suffirait de prononcer les noms de E. E. Levi, E. Holmgren, de MM. Volterra, Hadamard, Mauro Picone, M. Gevrey. Cependant il y a des résultats qui peuvent être améliorés: c'est un des buts de ce travail. J'y ai ajouté aussi quelques résultats nouveaux.

La formule de Poisson, par exemple, s'établit d'habitude, dans la bande où elle est valable, en faisant sur l'allure à l'infini de la fonction u et de la dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ des hypothèses spéciales. Je montre qu'on peut supprimer, ou bien la condition relative à la dérivée, ou bien la condition relative à la fonction même.

Je donne ensuite, pour une *demi-bande* (c'est-à-dire un rectangle dont l'un des côtés est rejeté à l'infini) une formule correspondant à la formule de Poisson pour la bande entière.

Dans son Mémoire connu: ,,Sull'equazione del calore[1]'', E. E. Levi a posé et résolu le problème de l'unicité pour une demi-bande limitée (à gauche ou à droite) par un arc de courbe quelconque, en faisant une certaine hypothèse sur l'allure à l'infini de la fonction u. Je montre que l'unicité subsiste dans des conditions beaucoup plus générales.

Enfin j'établis pour l'équation de la chaleur un théorème entièrement analogue a celui de Liouville pour les fonctions harmoniques. Ce dernier résultat a déjà été communiqué en 1932, avec des hypothèses plus restrictives que celles du texte, au Congrès International de Zurich.

1. Considérons, dans le plan xOy, le rectangle $PABQ$, de sommets $P(r, y)$, $A(r, h)$, $B(R, h)$, $Q(R, y)$, avec $R > r$, $y > h$. Si $u(x, y)$ est une intégrale de l'équation (1), régulière dans ce rectangle, on a la formule bien connue

---

[1]) Annali di Matematica, serie III, t. XIV (1908), p. 187—264.

$$
\left.\begin{matrix} u(x,y) \\ 0 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\,u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta \,+ \qquad \begin{matrix}(2)\\(2')\end{matrix}
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=R} - \frac{(x-R)\,u(R,\eta)}{(2(y-\eta)}\right]d\eta \,+
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{x}}\int_r^R \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}}{\sqrt{y-h}}\,u(\xi,h)\,d\xi \;,
$$

suivant que le point $M(x, y)$ est dans l'intervalle PQ ou extérieur à cet intervalle.

Soit $M'(x', y')$ le symétrique du point M par rapport au point Q. On a

$$
x' = 2R - x, \; y' = y.
$$

Cela étant, appliquons la formule précédente au point M'. Puisque le point M' est extérieur au rectangle, on aura

$$
0 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(2R-r-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(2R-r-x)\,u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta \,+
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(R-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=R} + \frac{(R-x)\,u(R,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta \,+ \qquad (3)
$$

$$
+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_r^R e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-h)}}\,\frac{u(\xi,h)}{\sqrt{y-h}}\,d\xi \;.
$$

Nous allons utiliser tout de suite ces formules.

2. Considérons une intégrale $u(x, y)$ de (1), régulière dans la bande infinie limitée par deux caractéristiques d'ordonnées respectives h et $y = h + \delta\ (\delta > 0)$. On démontre que, si l'on a, simultanément dans cette bande,

$$
|\,u(x,y)\,| < M e^{Kx^2}, \qquad (4)
$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| < M e^{K x^2} , \tag{5}$$

la constante K vérifiant la double inégalité

$$0 < K < \frac{1}{4\delta} ,$$

on a

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \frac{u(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} d\xi . \tag{6}$$

C'est la formule de Poisson. Comme cette formule est fondamentale dans la théorie de la chaleur, il est utile d'examiner de plus près les conditions dans lesquelles elle est obtenue. Nous allons montrer que *l'une seulement des conditions* (4) *ou* (5) *suffit pour obtenir la formule de Poisson.*

3. Démontrons, par exemple, la formule de Poisson avec la seule hypothèse (4). Retranchons, pour cela, la formule (3) de (2). On obtient

$$\begin{aligned} u(x, y) = & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\, u(r, \eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(2R-r-x)^2}{4(x-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(2R-r-x)\, u(R, \eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}} \frac{(x-R)\, u(R, \eta)}{(y-\eta)^{3/2}} d\eta + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_r^R e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \frac{u(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} d\xi - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_r^R e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-h)}} \frac{u(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} d\xi . \end{aligned} \tag{7}$$

Dans cette formule faisons tendre R vers l'infini. L'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(2R-r-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(2R-r-x)\, u(r, \eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta$$

tend manifestement, vers zéro avec $1/R$. Il en est de même de l'intégrale[2])

---

[2]) Voir, p. e., *Goursat:* Cours d'Analyse, t. III (1923), p. 311.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}.\frac{(x-R)\,u(R,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\,d\eta\ .$$

Reste à examiner l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_r^R e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-h)}}\frac{u(\xi,h)}{\sqrt{y-h}}\,d\xi\ .$$

Or

$$2R-x-\xi=R-x+R-\xi>R-x\ .$$

Donc en tenant compte de l'inégalité (4), l'intégrale considérée est majorée par l'expression suivante

$$\frac{M(R-r)}{2\sqrt{\pi\delta}}\,e^{\frac{(4K\delta-1)R^2+2Rx-x^2}{4\delta}}$$

qui tend vers zéro pour $R\to\infty$. La formule (7) donnera donc, pour $R\to\infty$,

$$\begin{aligned} u(x,y) = &-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\xi=r}-\frac{(x-r)\,u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta\,+ \\ &+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-2)}}\frac{u(\xi,h)}{\sqrt{y-h}}\,d\xi\ . \end{aligned} \tag{8}$$

Au lieu du rectangle $PABQ$ du $n\cdot 1$, raisonnons maintenant sur le rectangle $PAB'Q'$, symétrique du premier par rapport au côté $\overline{PA}$. Dans ce cas-là, il faut utiliser la formule (2′), puisque le point $(x,\,y)$ est extérieur au rectangle $PAB'Q'$. Dans le second membre des formules (2′) et (3) il faut remplacer r par $2r-R$, R par r et — dans (3) — le point $x'=2R-x$ par le point $X'=4r-2R-x$. Et alors la formule (2′) devient

$$\begin{aligned} 0 = &-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-2r+R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=2r-R}-\frac{(x-2r+R)\,u(2r-R,\eta)}{(2(y-\eta)}\right]d\eta\,+ \\ &+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r}-\frac{(x-r)\,u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta\,+ \\ &+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{2r-R}^r \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}}{\sqrt{y-h}}\,u(\xi,h)\,d\xi\ , \end{aligned} \tag{2_1}$$

tandis que la formule (3) s'écrit

$$
\begin{aligned}
0 = &-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(2r-R-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=2r-R} - \frac{(2r-R-x)\,u(2r-R,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta + \\
&+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(3r-2R-x)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(3r-2R-x)\,u(r,\eta)}{2(y-\eta)}\right]d\eta + \qquad (3_1)\\
&+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{2r-R}^{r} e^{-\frac{(4r-2R-x-\xi)^2}{4(y-h)}}\frac{u(\xi,h)}{\sqrt{y-h}}\,d\xi\,.
\end{aligned}
$$

Dans cette dernière formule, la seconde intégrale tend manifestement vers zéro avec $1/R$. Il en est de même de la dernière intégrale, car on a

$$4r - 2R - x - \xi = 2r - R - x + (2r - R - \xi) > 2r - R - x$$

et l'intégrale est majorée par l'expression suivante

$$\frac{M(R-r)}{2\sqrt{\pi\delta}}\,e^{\frac{4K\delta r^2-(R-2r+x)^2}{4\delta}}$$

qui tend vers zéro avec $1/R$.

Enfin, puisque, d'après (4),

$$|\,u(2r-R,\eta)\,| < M\,e^{K(2r-R)^2} < M\,e^{\frac{4K\delta(2r-R)^2}{4(y-\eta)}},$$

l'intégrale

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_k^y e^{-\frac{(2r-R-x)^2}{4(y-\eta)}}\,\frac{(2r-R-x)\,u(2r-R,\eta)}{2(y-\eta)}\,d\eta$$

est majorée par la suivante

$$\frac{(x-2r+R)M}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y e^{\frac{(4K\delta-1)\,[(R-2r)^2-2x(R-2r)-x^2]}{4(y-\eta)}}\,,\,\frac{d\eta}{2(y-\eta)}\,,$$

et comme cette dernière tend visiblement vers zéro pour $R \to \infty$ (puisque $4K\delta - 1 < 0$), il en sera de même de la première.

Cela étant, en retranchant les deux formules précédentes l'une de l'autre et en faisant ensuite tendre R vers l'infini, on obtient

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\, u(r,\eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta \, + \\
+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{r} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \frac{u(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} d\xi \; .
\end{aligned}
\tag{8'}
$$

Ajoutons (8) et (8'). Nous obtenons

$$
u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{r} + \int_{r}^{+\infty} \right) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \frac{u(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} d\xi \; ;
$$

c. q. f. d.

4. Tâchons maintenant d'obtenir la formule de Poisson en partant de la seule condition (5). Pour cela il suffira simplement d'ajouter les formules (2) et (3), au lieu de les retrancher; on obtiendra

$$
\begin{aligned}
u(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x-r)\, u(r,\eta)}{2(y-\eta)} \right] d\eta \, + \\
+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=R} d\eta + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_r^R e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} \frac{u(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} d\xi \, + \\
+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_r^R e^{-\frac{(2R-r-x)^2}{4(y-h)}} \frac{u(\xi, h)}{\sqrt{y-h}} d\xi \; .
\end{aligned}
$$

Cette formule contient les mêmes termes que la formule (7), sauf la seconde intégrale de cette dernière, qui est remplacée par celle-ci:

$$
\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=R} d\eta \; .
$$

Puisque grâce à la condition (5), on a

$$\left| \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\xi=R} \right| < M e^{KR^2} < M e^{\frac{4K\delta R^2}{4(y-\eta)}} ,$$

cette intégrale sera majorée par la suivante

$$\frac{M}{2\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{y} e^{\frac{(4K\delta-1)R^2+2Rx-x^2}{4(y-\eta)}} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}}$$

qui tend vers zéro pour $R \to \infty$.

A la limite on obtient donc toujours la formule (8).

De même, en *ajoutant* les formules (2_1) et (3_1) (au lieu de les retrancher) et en faisant tendre R vers l'infini, on tombe sur la formule (8').

En ajoutant (8) et (8'), on obtient la formule de Poisson.

Il est donc prouvé, en définitive, par les raisonnements de ce n⁰ et du n⁰ 3, que l'*une des conditions* (4) ou (5) *est surabondante dans l'obtention de la formule de Poisson.*[3])

5. Arrêtons-nous un peu sur cette formule. Elle est l'analogue de la formule de même nom de la théorie du potentiel. Cette dernière formule contient comme cas particulier le théorème d'invariance des fonctions harmoniques par la moyenne circulaire, théorème dû à Gauss. Il n'y a pas un théorème analogue pour les intégrales de l'équation (1); ou, plutôt, la formule de Poisson dans la théorie de la chaleur est à la fois l'équivalent de la formule de Poisson et du théorème de Gauss dans la théorie du potentiel. Or, ce dernier théorème admet une réciproque. On doit donc s'attendre à avoir une réciproque du résultat exprimé par la formule de Poisson dans la théorie de la chaleur. Voici cette réciproque:

Soit u(x,y) *une fonction sommable dans la bande infinie comprise entre les droites* $y = h$, $y = h + \delta\ (\delta > 0)$. *On suppose de plus que le produit*

$$| u(x,y) | \, e^{-Kx^2} , \quad \left(\text{où } K < \frac{1}{4\delta}\right) ,$$

reste borné dans cette bande. Dans ces conditions, si l'on a

$$u(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi,\eta)}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}} d\xi , \tag{9}$$

[3]) La suffisance de la condition (4) a été aussi établie, dans le cas du demi-plan et par une méthode toute différente de celle du texte, par *M. Mauro-Picone* (Math. Annalen, 101 (1929), p. 701—712).

quel que soit η *tel que* $h \leqslant \eta < h + \delta$, *la fonction* $u(x,y)$ *est une intégrale de* (1), *régulière dans la bande considérée.*

Il est facile de voir, en effet, en répétant un raisonnement classique, que l'intégrale obtenue de la précédente en dérivant sous le signe $\int$ par rapport à x, est uniformément convergente dans la bande considérée. Donc $\frac{\partial u}{\partial x}$ existe et l'on peut écrire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)\,u(\xi,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\, d\xi\,. \tag{10}$$

Dérivons sous le signe $\int$ encore une fois par rapport à x; on obtient l'expression

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\, d\xi + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^2 u(\xi,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}\, d\xi\,. \tag{11}$$

Ces intégrales sont, respectivement, majorées par

$$\frac{M}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(4K\delta-1)\,\xi^2+2x\xi-x^2}{4(y-\eta)}} \frac{d\xi}{(y-\eta)^{3/2}}, \quad \frac{M}{8\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(4K\delta-1)\,\xi^2+2x\xi-x^2}{4(y-\eta)}} \frac{d\xi}{(y-\eta)^{3/2}}\,.$$

Ces dernières intégrales sont uniformément convergentes, car le coefficient de ξ^2 dans l'exposant de e est, par hypothèse, négatif. L'expression (11) est donc égale à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dont l'existence est ainsi démontrée. Or, si l'on dérive dans (9) par rapport à y, on obtient la même expression dont on vient de démontrer la convergence uniforme. On a donc bien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

dans toute la bande, c. q. f. d.

6. Dans la formule (2′) remplaçons les lettres (x, y) (représentant nécessairement un point extérieur au rectangle $PABQ$), par (x', y'); de cette formule ainsi modifiée retranchons la formule (3), où (x, y) est aussi remplacé par (x', y'), et faisons tendre R vers l'infini. Le raisonnement fait aux n^os^ 3 et 4 montret que le résultat de cette opération peut s'obtenir immédiatement de (8) en remplaçant dans le premier membre $u(x,y)$ par zéro et dans le second membre (x, y) par (x', y'):

$$0 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y \frac{e^{-\frac{(x'-r)^2}{4(y'-\eta)}}}{\sqrt{y'-\eta}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=r} - \frac{(x'-r)\,u(r,\eta)}{2(y'-\eta)}\right]d\eta + \tag{12}$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_r^\infty e^{-\frac{(x'-\xi)^2}{4(y'-h)}}\frac{u(\xi,h)}{\sqrt{y'-h}}\,d\xi\ .$$

Cela étant, supposons le point (x', y') symétrique de (x, y) par rapport au point P et retranchons la formule précédente de la formule (8). Il vient

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_h^y e^{-\frac{(x-r)^2}{4(y-\eta)}}\frac{(x-r)\,u(r,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\,d\eta +} \tag{13}$$
$$\boxed{+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_r^\infty e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}}\frac{u(\xi,h)}{\sqrt{y-h}}\,d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_r^\infty e^{-\frac{(2r-x-\xi)^2}{4(y-h)}}\frac{u(\xi,h)}{\sqrt{y-h}}\,d\xi\,.}$$

Cette formule joue, pour une demi-bande le même rôle que la formule de Poisson pour une bande entière. Elle donne les valeurs d'une fonction $u(x,y)$, intégrale de (1), à l'intérieur d'une demi-bande comprise entre deux caractéristiques et une perpendiculaire à ces droites, en connaissant ses valeurs sur le côté *inférieur* et le côté *vertical* de cette demi-bande. La solution obtenue par cette formule est-elle unique? La réponse est affirmative, elle sera une conséquence des considérations du numéro suivant.

7. Dans son Mémoire cité dans l'introduction, E. E. Levi a posé et résolu le problème de l'unicité pour une demi-bande horizontale limitée (à gauche ou à droite) non pas par un segment de droite perpendiculaire à la bande, mais par un arc de courbe quelconque. Il démontre cette unicité dans l'hypothèse que la solution satisfait, dans la région considérée, à l'inégalité suivante

$$|u(x,y)| < Mx^\alpha$$

α étant un nombre positif quelconque. La démonstration de E. E. Levi repose sur la proposition préliminaire suivante: *Considérons une région limitée par les caractéristiques* $y = h$, $y = h + \delta$ *et — à gauche — par* *un arc* s *de courbe. Soit* u(x,y) *une intégrale de* (1), *nulle sur le côté inférieur de cette région. Si l'on a, à partir d'une certaine valeur de* x,

$$|u(x,y)| < Mx^{\alpha},$$

alors u(x,y) *et ses dérivées partielles tendent vers zéro avec* 1/x, *dans la région considérée*[4]).

Nous allons montrer que, *sous l'hypothèse plus générale* (4), u(x,y) et *ses dérivées partielles tendent encore vers zéro avec* 1/x. Dès lors, le théorème d'unicité pourra être démontré, en suivant la voie de E. E. Levi, et pour le contour qu'il a envisagé, avec la condition plus générale (4).

Considérons un point (x, y) quelconque de la région. Nous désignerons par P le point où la caractéristique menée par le point (x, y) coupe l'arc s, par A le point où la caractéristique $y = h$ coupe le même arc, enfin par B et Q les points où la droite $x = R$ (R est supposé suffisamment grand pour que cette droite soit située toute à droite de l'arc s sans le couper) coupe les deux caractéristiques considérées. On aura, pour tout point (x, y), puisque $u(x,y)$ est supposée nulle sur le segment $\overline{AB}$,

$$u(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_A^P \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{(x-\xi)\,u(\xi,\eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u(\xi,\eta)}{d\xi}\right)_{\xi=R} - \frac{(x-R)\,u(R,\eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta\,,$$

ξ étant l'abscisse du point d'ordonnée η *sur l'arc s*.

Pour un point (x',y'), symétrique de (x,y) par rapport au point Q, donc *extérieur* au contour $PABQ$, on aura

$$0 = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_A^P \frac{e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{(2R-x-\xi)\,u(\xi,\eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y \frac{e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\left(\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)_{\xi=R} + \frac{(x-R)\,u(R,\eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta\,.$$

---

[4]) Loc. cit. [1]) n. 11, p. 205.

En retranchant cette formule de la précédente, il vient

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_A^P \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{(x-\xi)\,u(\xi,\eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_A^P \frac{e^{-\frac{(2R-x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{(2R-x-\xi)\,u(\xi,\eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_h^y e^{-\frac{(x-R)^2}{4(y-\eta)}} \frac{(x-R)\,u(R,\eta)}{(y-\eta)^{3/2}}\, d\eta \ .$$

Si l'on fait tendre R vers l'infini, sous l'hypothèse (4), la dernière intégrale tend vers zéro. Il en sera de même de la seconde, car la fonction à intégrer tend vers zéro avec $1/R$. Il reste donc à la limite

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_A^P \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}}}{\sqrt{y-\eta}} \left[\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{(x-\xi)\,u(\xi,\eta)}{2(y-\eta)}\right] d\eta \ .$$

Cette formule montre bien que l'on a

$$\lim_{x\to\infty} u(x,y) = 0 \ , \quad (h < y < h+\delta)$$

car la fonction à intégrer tend uniformément vers zéro pour $x \to \infty$. Si l'on dérive la formule précédente par rapport à x et que l'on fait ensuite $x \to \infty$, on obtiendrait encore

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \to 0 \, ,$$

et ainsi de suite. Notre lemme, généralisant celui de E. E. Levi, est ainsi établi. A partir de là, il serait facile, en réproduisant mot par mot le raisonnement de E. E. Levi, de démontrer l'unicité de la solution pour le domaine qu'il a envisagé, *et cela avec l'hypothèse plus générale* (4).

En particulier, pour la demi-bande considérée par nous au numéro précédent, la solution obtenue par la formule (13) est *unique*, sous l'hypothèse (4).

Notons encore que l'on pourrait démontrer aussi le théorème d'unicité avec l'hypothèse (5); il suffirait pour cela d'*ajouter* les deux formules précédentes, au lieu de les retrancher.

8. Je partirai toujours de la formule de Poisson, dont je déduirai par dérivation la formule (10). Faisons-y la substitution

$$x - \xi = -2\sqrt{y-\eta} \cdot X \ .$$

Il vient (en prenant $\eta = h$)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x + 2\sqrt{\delta} X, h) \cdot X e^{-X^2} dX \ . \tag{14}$$

Je suppose maintenant que $u(x,y)$ soit bornée sur la droite $y = h$ par le nombre $M(h)$. On déduit de la relation précédente

$$\left| \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right| < \frac{2M(h)}{\sqrt{\pi\delta}} \int_0^{\infty} X e^{-X^2} dX \ ,$$

ou bien

$$\left| \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right| < \frac{M(h)}{\sqrt{\pi\delta}} \ .$$

Par récurrence on obtient les inégalités générales

$$\boxed{\left| \frac{\partial^p u(x,y)}{\partial x^p} \right| < \frac{M(h)}{(\pi\delta)^{p/2}} \ , \quad \left| \frac{\partial^q u(x,y)}{\partial y^q} \right| < \frac{M(h)}{(\pi\delta)^q}} \tag{15}$$

où p et q sont arbitraires.

Il résulte de ces inégalités que *toute famille d'intégrales* $u(x,y)$ *de* (1), *également bornées sur le côté inférieur de la bande* $h \leqslant y \leqslant h + \delta$, *et telle que la famille* $u(x,y)e^{-Kx^2}$ *où* $K < \frac{1}{4\delta}$ *est encore formée de fonctions également bornées dans l'intérieur de la bande, est normale dans la bande considérée.* Car les fonctions d'une telle famille sont également continues.

Ce théorème étend aux intégrales de l'équation de la chaleur, et pour le domaine infini considéré, un théorème établi par M. Paul Montel[5]) pour les fonctions harmoniques et par nous-même pour les fonctions polyharmoniques[6]).

---

[5]) *Paul Montel:* Sur les suites infinies de fonctions (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3me série, t. 24 (1907), ch. V, n. 57, 60).

[6]) *Miron Nicolesco:* Sur les fonctions de n variables, harmoniques d'ordre p (Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 60 (1932), p. 136).

9. Des formules (15) on déduit encore un résultat important. Remplaçons dans ces inégalités (x, y) par (x_0, y_0), ensuite faisons tendre δ vers l'infini. A cause de la relation $h + \delta = y_0$, h tendra vers l'infini négatif, c'est-à-dire que la bande considérée tendra vers le demi-plan $y < y_0$, en même temps que K tendra vers zéro. Cela étant, supposons que le rapport

$$\frac{M(h)}{\delta^{d}}$$

où α est un nombre positif quelconque, reste borné. Les inégalités (15) donnent

$$\left|\frac{\partial^p u(x_0, y_0)}{\partial x_0^p}\right| < \frac{\overline{M}}{\pi^{p/2} . \delta^{p/2-\delta}}, \quad \left|\frac{\partial^q u(x_0, y_0)}{\partial y_0^q}\right| < \frac{\overline{M}}{\pi^q \delta^{q-\alpha}},$$

$\overline{M}$ étant une borne du rapport précédent. Si donc on désigne par n le plus grand entier contenu dans α, on aura à la limite

$$\frac{\partial^{2m} u(x_0, y_0)}{\partial x_0^{2m}} = 0, \quad \frac{\partial^m u(x_0, y_0)}{\partial y_0^m} = 0, \quad (m = n, n+1, \ldots).$$

Comme (x_0, y_0) est arbitraire, on en déduit que $u(x, y)$ est un polynome de degré n en y, donc de degré $2n$ en x. On peut donc énoncer la proposition suivante:

Supposons que dans le demi-plan $\mathrm{y} \leqslant \mathrm{y}_0 - \varepsilon$ (y_0 quelconque) *le rapport* $\frac{\mathrm{u(x,y)}}{\delta^\alpha}$ *où δ est la distance du point* (x, y) *à la droite* $\mathrm{y} = \mathrm{y}_0$, *$\alpha$ et ε deux nombres positifs quelconques, reste borné. Alors* u(x, y) *est nécessairement un polynome (de degrè $E(\alpha)$ en y).*

On a désigné, comme d'habitude, par $E(\alpha)$ le plus grand entier contenu dans α. En particulier, *si le rapport* $\frac{\mathrm{u(x,y)}}{\delta^\alpha}$, *où $\alpha < \frac{1}{2}$, est borné,* u(x, y) *se réduit à une constante dans le demi-plan considéré.*

Le dernier théorème correspond au théorème de Liouville pour les fonctions harmoniques. Nous avions déjà donné un cas très particulier de ce résultat, correspondant à $\alpha = 0$ (dans ce cas on peut prendre aussi $\varepsilon = 0$), avec l'hypothèse supplémentaire que $\frac{\partial u}{\partial x}$ est bornée dans l'un des angles droits limités dans le demi-plan considéré par une parallèle à l'axe des y[7]). Comme on vient de le voir, *l'hypothèse relative à la dérivée* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *peut être supprimée.* Quant au premier énoncé, il correspond à la généralisation que H. Poincaré a donnée, pour les fonctions harmoniques, au théorème de Liouville[8]).

10. On doit à E. E. Levi[9]) ce théorème: *Si une suite de fonctions, intégrales de* (1) *converge uniformément sur le contour*[10]) *d'un domaine, la suite convergera uniformément à l'intérieur vers une intégrale de* (1).

C'est l'extension à l'équation de la chaleur d'un classique théorème de Harnack dans la théorie du potentiel. Nous allons énoncer un théorème analogue pour une bande infinie:

Considérons la bande comprise entre les caractéristiques d'ordonnées respectives h *et* $h + \delta$ $(\delta > 0)$ *et une suite d'intégrales de* (1)

$$u_1(x,y), u_2(x,y), \ldots, u_n(x,y), \ldots$$

uniformément convergente sur le côté inférieur de la bande. Nous supposerons de plus que les fonctions obtenues des précédentes par multiplication avec le facteur e^{-Kx^2} *soient également bornées dans la bande considérée. Dans ces conditions, la suite convergera uniformément dans la bande vers une intégrale de l'équation* (1).

En effet, la fonction $u(x,h)\, e^{-Kx^2}$ sera aussi bornée. Par conséquent, l'intégrale suivante

$$u_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\delta}} \cdot u_n(\xi, h)\, d\xi$$

a un sens et représente une intégrale de l'équation (1), régulière dans la bande considérée. D'autre part, on peut aussi écrire, en vertu des hypothèses,

---

[7]) *Miron Nicolesco:* Extension du théorème de Liouville-Picard à l'équation de la chaleur (Internationaler Mathematiker-Kongreß, Zürich, Sept. 1932, Sektions-Vorträge, S. 329).

[8]) *H. Poincaré:* Théorie du potentiel newtonien, Paris, Hermann, 1899, p. 208.

[9]) Loc. cit. p. 194.

[10]) Pour ce qu'on appelle contour dans la théorie de l'équation de la chaleur, voir le Mémoire cité de E. E. Levi.

$$u_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} . \, u_n(\xi, h) \, d\xi$$

d'où

$$u(x, y) - u_n(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-h)}} [u(\xi, h) - u_n(\xi, h)] \, d\xi \ .$$

Or, $\varepsilon > 0$ étant donné, on peut par hypothèse trouver un entier n_0 tel que l'on ait, pour $n > n_0$,

$$|u(\xi, h) - u_n(\xi, h)| < \varepsilon \ .$$

La formule précédente donnera, dans ces conditions,

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| < \varepsilon,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

(Reçu le 14 avril 1937.)