Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1937-1938)

Artikel: Integralsätze für reguläre Funktionen einer Quaternionen-Variablen.
Autor: Fueter, Rud.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11005

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Integralsätze für reguläre Funktionen einer Quaternionen-Variablen

Von Rud. Fueter, Zürich

1. Einleitung.

Ist u eine rechts-, v eine links-reguläre Funktion der Quaternionenvariablen $z = \sum_{(k)} x_k i_k$ in dem echten Hyperraume H, so gilt bekanntlich der I. Hauptsatz[1]):

$$\int_{(R)} u dZ v = 0 \,, \tag{I}$$

wo R irgend eine geschlossene Hyperfläche in H ist, deren Inneres nur Punkte von H enthält. Wird R durch $z = \sum_{(k)} x_k(t_1, t_2, t_3) i_k$ gegeben, wo die t_k reelle Variable sind, so ist:

$$dZ = \pm \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial x_0}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_0}{\partial t_2} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_0}{\partial t_3} & \frac{\partial x_1}{\partial t_3} & \frac{\partial x_2}{\partial t_3} & \frac{\partial x_3}{\partial t_3} \end{vmatrix} dt_1\, dt_2\, dt_3 \;.$$

Das Vorzeichen wird so bestimmt, daß die Richtung des durch die Determinante bestimmten Normalvektors ins Innere von R geht.

Es fragt sich, ob aus diesem Satze Integralsätze hergeleitet werden können, die sich auf zwei- oder eindimensionale Gebilde beziehen? In der Tat existieren solche Formeln, wie im folgenden gezeigt werden soll. Diese scheinen mir daher bemerkenswert, weil sie auch für analytische Funktionen von zwei Variablen gelten[2]).

---

[1]) Siehe über die Theorie meinen Vortrag am Intern. Math. Kongreß, Oslo, C. R. du congrès int. des math., Oslo, 1936, t. I. p. 75. Bisherige Literatur in: *Rud. Fueter:* Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Comm. Math. Helv. t. 9, p. 321.

[2]) Wie mich Herr *de Rham* aufmerksam macht, können nach *E. Cartan* alle Integralformeln durch „dérivation extérieure" erhalten werden. *E. Cartan:* Leçons sur les invariants intégraux, Paris, Hermann et fils, 1922, chapitre VII, p. 65. Dieser Weg würde wohl in meinem Falle große Schwierigkeiten bieten, die gerade durch die Einführung der Quaternionen vermieden werden. Nur durch letztere ist es möglich, das Resultat in so überaus eleganter Weise zu formulieren. Die Formeln III und IV sind überraschend einfach.

2. Integrale über Hyperflächenstücke.

Es sei R ein endliches, sich nirgends durchdringendes, orientierbares Hyperflächenstück, das durch die (zweidimensionale) Oberfläche O begrenzt werde. Wir setzen alle diese Gebilde als stückweise analytisch voraus. Es sei c ein Punkt in R, und R gegeben durch:

$$z = c + f(t_1, t_2, t_3) \ , \qquad (R)$$

wo $c = \sum_{(k)} c_k i_k$, $f(t_1, t_2, t_3) = \sum_{(k)} f_k(t_1, t_2, t_3) i_k$ ist; die reellen Variablen seien die Koordinaten des Raumteiles T. Wir setzen fest, daß $f(0, 0, 0) = 0$ ist, d. h. daß für $t_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, $z = c$ wird. Die Oberfläche O von R wird durch die Oberfläche von T gegeben:

$$t_l = t_l(\tau_1, \tau_2), \quad l = 1, 2, 3 \ , \qquad (O)$$

wo die τ_k reell und Koordinaten eines Ebenenstückes E sind.

Wir legen durch c ein beliebiges Kurvenstück $\mathfrak{C}$:

$$z = c(t), t \text{ reell und } -\varepsilon \leqq t \leqq +\varepsilon, \text{ wo } c(0) = c \text{ ist.} \qquad (\mathfrak{C})$$

Durch jeden Punkt von $\mathfrak{C}$ legen wir die Parallelhyperfläche R_t zu R, wobei $c(t)$ dem Punkt c entspreche:

$$z = c(t) + f(t_1, t_2, t_3); \quad -\varepsilon \leqq t \leqq +\varepsilon; \quad t_1, t_2, t_3 \text{ in } T. \qquad (R_t)$$

Alle R_t zusammen bilden den Hyperraum H; jedes R_t wird durch O_t begrenzt, das erhalten wird, indem man in R_t für $t_l, l = 1, 2, 3$, die Werte von (O) einsetzt. H wird begrenzt durch alle O_t, $-\varepsilon \leqq t \leqq +\varepsilon$, und durch $R_{-\varepsilon}$ und $R_{+\varepsilon}$.

Jetzt sei u eine in jedem Punkte der abgeschlossenen Hyperfläche R rechts-, v links-reguläre Funktion. Dann ist u, v auch noch regulär im Innern einer Hyperkugel um jeden Punkt von R. Man kann somit ε so klein wählen, daß u, v in jedem Punkte des abgeschlossenen Hyperraumes H regulär sind. H_τ sei der Hyperteilraum von H, der begrenzt ist durch:

$$R_{-\varepsilon}, O_t \text{ für } -\varepsilon \leqq t \leqq \tau, R_\tau \ .$$

Nach dem ersten Hauptsatze ist dann:

$$\int_{(R_{-\varepsilon})} u dZ v - \int_{R_\tau} u dZ v + \int_{-\varepsilon}^{\tau} \int_{(O_t)} u dY v = 0 \ .$$

Dabei ist nach **1**:

$$dZ = Z\,dt_1\,dt_2\,dt_3\,, \quad \text{wo} \quad Z = \begin{vmatrix} 1 & \dot{i}_1 & \dot{i}_2 & \dot{i}_3 \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial t_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial t_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial t_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial t_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial t_2} \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial t_3} & \dfrac{\partial f_1}{\partial t_3} & \dfrac{\partial f_2}{\partial t_3} & \dfrac{\partial f_3}{\partial t_3} \end{vmatrix}$$

ist. Die t_k seien so gewählt, daß Z der Vektorrichtung von $\mathfrak{C}$, $-\varepsilon \to +\varepsilon$, entspricht. Weiter ist:

$$dY = Y\,d\tau_1\,d\tau_2\,dt \quad , \quad \text{wo} \quad Y = \pm \begin{vmatrix} 1 & \dot{i}_1 & \dot{i}_2 & \dot{i}_3 \\ c_0'(t) & c_1'(t) & c_2'(t) & c_3'(t) \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial \tau_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \tau_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \tau_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \tau_1} \\ \dfrac{\partial f_0}{\partial \tau_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \tau_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \tau_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial \tau_2} \end{vmatrix}$$

Das Vorzeichen ist so zu wählen, daß die Normale ins Innere von H_t gerichtet ist. Da die obige Gleichung für jedes τ zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ gilt, darf man sie nach τ differenzieren:

$$-\frac{d}{d\tau}\int\limits_{(R_\tau)} u\,dZ\,v + \int\limits_{(O_\tau)} u\,Y\,v\,d\tau_1\,d\tau_2 = 0\,.$$

Wegen der Stetigkeit und Endlichkeit der Funktionen dürfen wir unter dem Integralzeichen differenzieren. Da Z nicht von τ abhängt, wird:

$$\frac{d}{d\tau}(u\,dZ\,v) = \frac{du}{d\tau}\,dZ\,v + u\,dZ\,\frac{dv}{d\tau}\,.$$

Nun ist:

$$\frac{du}{d\tau} = \sum_{(k)} u^{(k)}\,c_k'(\tau)\,, \quad \frac{dv}{d\tau} = \sum_{(k)} v^{(k)}\,c_k'(\tau)\,; \quad u^{(k)} = \frac{\partial u}{\partial x_k}\,, \quad v^{(k)} = \frac{\partial v}{\partial x_k}\,;$$

setzt man dies ein, so wird:

$$\frac{d}{d\tau}(u\,dZ\,v) = \sum_{(k)} \left(u^{(k)}\,dZ\,v + u\,dZ\,v^{(k)}\right) c_k'(\tau)\,.$$

Anderseits ist:

$$Y = \sum_{(k)} Y_k c_k'(t) , \quad \text{wo:}$$

$$Y_0 = \mp \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \tau_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \tau_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \tau_2} \end{vmatrix} , \quad Y_1 = \pm \begin{vmatrix} 1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial f_0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial \tau_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \tau_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \tau_2} \end{vmatrix} ,$$

$$Y_2 = \mp \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_3 \\ \frac{\partial f_0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial \tau_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \tau_2} \end{vmatrix} , \quad Y_3 = \pm \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_2 \\ \frac{\partial f_0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial \tau_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \tau_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \tau_2} \end{vmatrix} \quad \text{ist.}$$

Setzt man dies ein, so erhält man die Formel:

$$-\sum_{(k)} \int_{(R_\tau)} (u^{(k)} dZv + udZv^{(k)}) c_k'(\tau) + \sum_{(k)} \int_{(O_\tau)} uY_k v c_k'(\tau) d\tau_1 d\tau_2 = 0 .$$

Man darf hier $\tau = 0$ setzen. R_τ geht dann in R, O_τ in O über. Ferner sind die $c_k'(0)$ vollständig beliebig. Somit zerfällt die Formel in folgende vier Integralsätze:

$$\underline{\int_{(R)} (u^{(k)} dZv + udZv^{(k)}) = \int_{(O)} uY_k v d\tau_1 d\tau_2 , \; k = 0, 1, 2, 3} \; . \qquad \text{(III)}$$

Y_k ist der Vektor, der in O senkrecht auf der Grenzfläche des Hyperraumes steht, der durch Bewegung von R parallel zur x_k-Axe entsteht, und der ins Innere dieses Hyperraumes geht.

Ist R irgend eine *geschlossene* Hyperfläche, auf der u und v überall regulär und eindeutig sind, so folgt, gleichgültig wie u, v im Innern sind,

$$\int_{(R)} (u^{(k)} dZv + udZv^{(k)}) = 0, \; k = 0, 1, 2, 3 \; . \qquad \text{(IIIa)}$$

3. Integrale über Flächenstücke.

Es sei O ein endliches, sich nirgends durchdringendes (zweidimensionales) Flächenstück, das durch die Kurve C begrenzt werde. Auch hier werden alle diese Gebilde als stückweise analytisch vorausgesetzt. c sei ein Punkt auf O, und O gegeben durch:

$$z = c + f(t_1, t_2) , \qquad (O)$$

wo $c = \sum\limits_{(k)} c_k i_k$, und $f = \sum\limits_{(k)} f_k(t_1, t_2) i_k$ ist; die reellen Variablen t_k seien Koordinaten eines Ebenenstückes E. Wir setzen fest, daß $f(0, 0) = 0$ ist, d. h. daß für $t_k = 0$, $k = 1, 2$, $z = c$ wird. C wird durch die Grenzkurve von E gegeben:

$$t_l = t_l(t), \; l = 1, 2 \, . \tag{C}$$

Wir legen durch c ein beliebiges Flächenstück Ω:

$$z = \varphi(\tau_1, \tau_2), \quad \text{wo} \quad \varphi(0, 0) = c \text{ sei.} \tag{Ω}$$

c sei ein innerer Punkt von Ω, und τ_1, τ_2 sollen die Werte durchlaufen: $-\varepsilon \leqq \tau_n \leqq +\varepsilon$, $n = 1, 2$ (Quadrat in der Ebene der τ). Durch jeden Punkt von Ω legen wir die Parallelfläche $O_{\tau_1 \tau_2}$ zu O, wobei c dem $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ entspreche:

$$z = \varphi(\tau_1, \tau_2) + f(t_1, t_2), \; -\varepsilon \leqq \begin{matrix}\tau_1 \\ \tau_2\end{matrix} \leqq +\varepsilon, \; t_1, t_2 \text{ in } E. \tag{$O_{\tau_1 \tau_2}$}$$

Alle $O_{\tau_1 \tau_2}$ zusammen bilden einen Hyperraum H. Jedes $O_{\tau_1 \tau_2}$ wird durch die Kurve $C_{\tau_1 \tau_2}$ begrenzt, die erhalten wird, wenn man in $O_{\tau_1 \tau_2}$ für t_1 und t_2 die Werte von (C) einsetzt. H wird begrenzt durch alle

$$C_{\tau_1 \tau_2}, \; -\varepsilon \leqq \tau_n \leqq +\varepsilon, \; n = 1, 2 \, ,$$

und durch

$$O_{-\varepsilon \tau_2}, \; O_{+\varepsilon \tau_2}, \; O_{\tau_1 - \varepsilon}, \; O_{\tau_1 + \varepsilon} \text{ für alle } \tau_1, \text{ resp. } \tau_2 \text{ zwischen } -\varepsilon \text{ und } +\varepsilon \, .$$

Jetzt sei u eine in jedem Punkte des abgeschlossenen Flächenstückes O rechts-, v linksreguläre Funktion. Man kann ε so klein wählen, daß u und v in allen Punkten des abgeschlossenen Hyperraumes H regulär sind.

Es sei $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ ein Punkt von Ω, und $H_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2}$ der Hyperteilraum von H, für den:

$$-\varepsilon \leqq \tau_1 \leqq \mathfrak{t}_1, \; -\varepsilon \leqq \tau_2 \leqq \mathfrak{t}_2$$

ist. Die Umgrenzung von $H_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2}$ ist:

alle $C_{\tau_1 \tau_2}$, für die $-\varepsilon \leqq \tau_1 \leqq \mathfrak{t}_1$, $-\varepsilon \leqq \tau_2 \leqq \mathfrak{t}_2$ ist,

$$O_{-\varepsilon \tau_2}, \; O_{\mathfrak{t}_1 \tau_2}, \; -\varepsilon \leqq \tau_2 \leqq \mathfrak{t}_2, \; O_{\tau_1 - \varepsilon}, \; O_{\tau_1 \mathfrak{t}_2}, \; -\varepsilon \leqq \tau_1 \leqq \mathfrak{t}_1 \; .$$

Nach dem I. Hauptsatze ist daher für $H_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2}$:

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\mathfrak{t}_1} \int\limits_{-\varepsilon}^{\mathfrak{t}_2} \int\limits_{(C_{\tau_1 \tau_2})} u Y v \, d\tau_1 \, d\tau_2 \, dt + \int\limits_{-\varepsilon}^{\mathfrak{t}_2} \int\limits_{(O_{\tau_1 \tau_2})} u Z'' v \, d\tau_2 \, dt_1 \, dt_2 \Big|_{\tau_1 = -\varepsilon}^{\tau_1 = \mathfrak{t}_1} + \int\limits_{-\varepsilon}^{\mathfrak{t}_1} \int\limits_{O_{\tau_1 \tau_2}} u Z' v \, d\tau_1 \, dt_1 \, dt_2 \Big|_{\tau_2 = -\varepsilon}^{\tau_2 = \mathfrak{t}_2} = 0 \, .$$

Diese Gleichung gilt für alle $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ innerhalb den angegebenen Grenzen. Wir dürfen sie daher partiell nach $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ differenzieren; es folgt:

$$\int\limits_{(C_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2})} u Y v\, dt + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{t}_1} \int\limits_{(O_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2})} u Z'' v\, dt_1 dt_2 + \frac{\partial}{\partial \mathfrak{t}_2} \int\limits_{(O_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2})} u Z' v\, dt_1 dt_2 = 0 \quad .$$

Dabei ist:

$$Y = \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \tau_2} \\ \frac{\partial f_0}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_3}{\partial t} \end{vmatrix}, \quad Z' = \pm \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial t_2} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \frac{\partial f_2}{\partial t_2} & \frac{\partial f_3}{\partial t_2} \end{vmatrix}, \quad Z'' = \pm \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{d f_0}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \tau_2} \\ \frac{\partial f_0}{\partial t_2} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \frac{\partial f_2}{\partial t_2} & \frac{\partial f_3}{\partial t_2} \end{vmatrix},$$

wo für $\tau_1 : \mathfrak{t}_1$ und $\tau_2 : \mathfrak{t}_2$ einzusetzen ist.

Da die Normale ins Innere gerichtet sein muß, ist in Z' und Z'' dasselbe Vorzeichen zu nehmen, d. h. entweder beidemal das obere oder beidemal das untere. Denn für den Spezialfall $z = c + t_1 + i_1 t_2$, für O, und $z = c + \tau_1 i_2 + \tau_2 i_3$ für Ω ist der Wert $Z' = \mp i_3, Z'' = \mp i_2$, also die Behauptung richtig. Durch stetige Transformation kann man aber den allgemeinen Fall auf diesen zurückführen.

In Z', Z'' hängt nur die Zeile der $\frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau_l}$ von $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$ ab. Differenziert man daher Z' nach $\mathfrak{t}_2$, Z'' nach $\mathfrak{t}_1$ partiell, so ist:

$$\frac{\partial Z'}{\partial \mathfrak{t}_2} + \frac{\partial Z''}{\partial \mathfrak{t}_1} = 0 \quad .$$

Somit wird, wie in Fall 2:

$$\int\limits_{(C_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2})} u Y v\, dt + \sum_{(k)} \int\limits_{(O_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2})} \left\{ (u^{(k)} Z'' v + u Z'' v^{(k)}) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau_1} + \right.$$
$$\left. + (u^{(k)} Z' v + u Z' v^{(k)}) \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau_2} \right\} dt_1 dt_2 = 0 \quad .$$

Es sei jetzt:

$$F_{kh} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau_1} & \frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial \tau_2} & \frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau_2} \end{vmatrix} \quad .$$

Dann ist $Y = \sum_{(k,h)} Y_{kh} F_{kh}$, $h \neq k$, wo über die 6 Kombinationen 01, 02, 03, 12, 13, 23 zu summieren ist; ferner sei $Z' = \sum_{(h)} Z_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau_1}$, $Z'' = -\sum_{(h)} Z_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau_2}$, wo die Z_h Unterdeterminanten von Z', resp. Z'' sind:

$$Z_0 = \mp \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \frac{\partial f_2}{\partial t_2} & \frac{\partial f_3}{\partial t_2} \end{vmatrix}, Z_1 = \pm \begin{vmatrix} 1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial f_0}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial t_2} & \frac{\partial f_2}{\partial t_2} & \frac{\partial f_3}{\partial t_2} \end{vmatrix}, Z_2 = \mp \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_3 \\ \frac{\partial f_0}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial t_2} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \frac{\partial f_3}{\partial t_2} \end{vmatrix}, Z_3 = \pm \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_2 \\ \frac{\partial f_0}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_1} \\ \frac{\partial f_0}{\partial t_2} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \frac{\partial f_2}{\partial t_2} \end{vmatrix}.$$

Dann lautet die obige Gleichung:

$$\sum_{(k,h)} F_{kh} \int_{(C_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2})} u Y_{kh} v \, dt - \sum_{(k)} \sum_{(h)} \int_{(O_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2})} (u^{(k)} Z_h v + u Z_h v^{(k)}) F_{kh} \, dt_1 \, dt_2 = 0 .$$

Nun ist $F_{hk} = -F_{kh}$. Daher wird:

$$\sum_{(k,h)} \Big[\int_{(C_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2})} u Y_{kh} v \, dt \, F_{kh} - \int_{(O_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2})} (u^{(k)} Z_h v + u Z_h v^{(k)} - u^{(h)} Z_k v - u Z_k v^{(h)}) \, dt_1 dt_2 F_{kh} \Big] = 0.$$

Hier setzt man $\mathfrak{t}_1 = 0$, $\mathfrak{t}_2 = 0$. Dann geht $O_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2}$ in O, $C_{\mathfrak{t}_1 \mathfrak{t}_2}$ in C über. Da die 6 Größen F_{kh} für $\mathfrak{t}_1 = 0$, $\mathfrak{t}_2 = 0$ ganz beliebig angenommen werden dürfen, so zerfällt unsere Gleichung in die 6 Formeln:

$$\int_{(C)} u Y_{kh} v \, dt - \int_{(O)} (u^{(k)} Z_h v + u Z_h v^{(k)} - u^{(h)} Z_k v - u Z_k v^{(h)}) \, dt_1 dt_2 = 0 \quad \text{(IV)}$$

$$h \neq k, \left.\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, 3 .$$

Zwischen den Z_k findet die Relation statt:

$$Z_0 + i_2 Z_1 i_3 + i_3 Z_2 i_1 + i_1 Z_3 i_2 = 0 .$$

Die Y_{kh} haben folgende Werte:

$$Y_{01} = \begin{vmatrix} i_2 & i_3 \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_3}{\partial t} \end{vmatrix}, \quad Y_{02} = -\begin{vmatrix} i_1 & i_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_3}{\partial t} \end{vmatrix}, \quad Y_{03} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix},$$

$$Y_{12} = \begin{vmatrix} 1 & i_3 \\ \frac{\partial f_0}{\partial t} & \frac{\partial f_3}{\partial t} \end{vmatrix}, \quad Y_{13} = -\begin{vmatrix} 1 & i_2 \\ \frac{\partial f_0}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial t} \end{vmatrix}, \quad Y_{23} = \begin{vmatrix} 1 & i_1 \\ \frac{\partial f_0}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

Y_{hk} ist der Vektor, der in C senkrecht auf der Grenzfläche des Hyperraumes steht, der durch Bewegung von O, parallel zur hk-Koordinatenebene entsteht, und der ins Innere dieses Hyperraumes geht.

Hat O keine Grenzkurve, wie etwa im Falle einer zweidimensionalen Kugel, so wird aus IV:

$$\underline{\int\limits_{(O)} (u^{(k)} Z_h v + u Z_h v^{(k)})\, dt_1 dt_2 = \int\limits_{(O)} (u^{(h)} Z_k v + u Z_k v^{(h)})\, dt_1 dt_2} \quad \text{(IV a)}$$

$$h \neq k\,, \left.\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}\right\} = 0\,, 1\,, 2\,, 3\,.$$

4. Anwendungen

Von den mannigfaltigen Anwendungen der Formeln in **2.** und **3.** seien nur folgende kurz angegeben:

a) Nimmt man in IIIa $v = 1$, so folgt:

$$\int\limits_{(R)} u^{(k)} dZ = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3\,.$$

Diese Formel ist unabhängig von dem Verhalten von u im Innern H der geschlossenen Hyperfläche R. Nur muß u in jedem Punkte von R eindeutig und rechtsregulär sein.

Ist somit $w = f(z)$ Summe von Ableitungen nach den x_k von Funktionen u_l, die auf R rechtsregulär und eindeutig sind:

$$w = f(z) = u_0^{(0)} + u_1^{(1)} + u_2^{(2)} + u_3^{(3)}\,,$$

so ist stets:

$$\int\limits_{(R)} f(z)\, dZ = 0\,.$$

wobei es gleichgültig ist, wie die u_l im Innern H von R sich verhalten. Man darf daher für *eine beliebige Funktion $w = f(z)$, die auf R rechtsregulär und eindeutig ist,*

$$\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(R)} f(z)\, dZ$$

das Residuum von $f(z)$ im Innern H von R nennen. Das Residuum ist stets null, wenn sich $f(z)$ in der vorigen Weise als Summe von Ableitungen von eindeutigen rechts-regulären Funktionen auf R darstellen läßt. Von dieser Tatsache gilt auch die Umkehrung, wie man beweisen kann: Ist das Residuum von $w = f(z)$ in H null, so ist $f(z)$ Summe von Funktionen

$\sum\limits_{(k)} u_k^{(k)}$, wo die u_k auf der Grenzhyperfläche R von H rechts-regulär und eindeutig sind.

b) Bei den Reihenentwicklungen einer rechts-regulären Funktion $w = f(z)$ spielen die Funktionen $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ und $q_{n_1 n_2 n_3}(z)$ eine entscheidende Rolle[3]). Die erstern übernehmen die Aufgabe der Potenzfunktion z^n in der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen bei positivem n, die letztern bei negativem n. Die p-Funktionen genügen den Differentialformeln:

$$\frac{\partial p_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_1} = p_{n_1-1\, n_2 n_3}(z)\,, \quad \frac{\partial p_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_2} = p_{n_1 n_2-1\, n_3}(z)\,, \quad \frac{\partial p_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_3} = p_{n_1 n_2 n_3-1}(z)\,.$$

Für die q-Funktionen kann man aus ihnen die Formeln beweisen:

$$\frac{\partial q_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_1} = -q_{n_1+1\, n_2 n_3}(z)\,, \quad \frac{\partial q_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_2} = -q_{n_1 n_2+1\, n_3}(z)\,, \quad \frac{\partial q_{n_1 n_2 n_3}(z)}{\partial x_3} = -q_{n_1 n_2 n_3+1}(z)\,.$$

Zum Beweise benutzt man die für alle $|z| < |\zeta|$, $\zeta = \sum\limits_{(k)} \xi_k i_k$, gleichmäßig und absolut konvergente Reihe:

$$\Delta\left((\zeta - z)^{-1}\right) = q_{000}(\zeta - z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} p_{n_1 n_2 n_3}(z)\, q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)\,, \quad |z| < |\zeta|\ ;$$

Offenbar ist:

$$\frac{\partial \Delta\left((\zeta - z)^{-1}\right)}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Delta\left((\zeta - z)^{-1}\right)}{\partial \xi_k}\,, \quad k = 1, 2, 3\ .$$

Daher ergibt die Differentiation der Reihe z. B. nach x_1, ξ_1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} p_{n_1-1\, n_2 n_3}(z)\, q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(n=n_1+n_2+n_3)} p_{n_1 n_2 n_3}(z) \frac{\partial q_{n_1 n_2 n_3}(\zeta)}{\partial \xi_1}\,.$$

Da die Entwicklung nach den p-Funktionen *eindeutig* ist[4]), folgen die Differentialformeln.

Die p-Funktionen sind im endlichen überall rechts- und links-regulär, die q-Funktionen ebenfalls mit Ausnahme des Punktes 0. Ist R irgend

---

[3]) Siehe deren Einführung in *Rud. Fueter:* Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Comm. Math. Helv. t. 8, p. 371, uff.

[4]) Siehe meine unter [1]) genannte Arbeit, p. 324.

eine geschlossene Hyperfläche, die im Innern 0 enthält, so darf man in IIIa

$$u = q_{n_1 n_2 n_3}(z) \;, \quad v = p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(z) \;,$$

setzen. Wegen der Differentialformeln ergibt dann IIIa:

$$\begin{aligned}\int\limits_{(R)} q_{n_1 n_2 n_3}(z)\, dZ\, p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(z) &= \int\limits_{(R)} q_{n_1-1 n_2 n_3}(z)\, dZ\, p_{n_1-1 n_2 n_3}(z) \;, \text{ falls } n_1 > 0 \text{ ist} ,\\ &= \int\limits_{(R)} q_{n_1 n_2-1 n_3}(z)\, dZ\, p_{\nu_1 \nu_2-1 \nu_3}(z) \;, \text{ falls } n_2 > 0 \text{ ist} ,\\ &= \int\limits_{(R)} q_{n_1 n_2 n_3-1}(z)\, dZ\, p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3-1}(z) \;, \text{ falls } n_3 > 0 \text{ ist} .\end{aligned}$$

Hieraus kann man sehr einfach durch sukzessive Anwendung in Verbindung mit Hauptsatz I die Formel beweisen:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{(R)} q_{n_1 n_2 n_3}(z)\, dZ\, p_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}(z) = \begin{cases} 1 \;, \text{ wenn } n_k = \nu_k \;, \; k = 1\;,\; 2\;,\; 3\;; \\ 0 \;, \text{ wenn für wenigstens ein } k\; n_k \neq \nu_k \text{ ist} . \end{cases}$$

Man hat nur für $n_k = \nu_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, die Formel direkt zu berechnen.

(Eingegangen den 15. Juni 1938.)