

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1937-1938)

Artikel: Größte Polygone mit gegebenen Seitenvektoren.
Autor: Mayer, Anton E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-11003>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Größte Polygone mit gegebenen Seitenvektoren

Von ANTON E. MAYER, Wien

Die vorliegende Arbeit befaßt sich — zunächst ganz beiläufig formuliert — damit, gegebene Vektoren zu einem möglichst weit gespannten Polygon zusammenzusetzen; ich werde ein Maß der stets erreichbaren Weite ermitteln.

Vorerst wird die Aufgabe genau umschrieben und auf eine Anwendung in der Variationsrechnung hingewiesen (§ 1). Es zeigt sich (§ 2), daß es unwesentlich ist, ob wir nur offene oder nur geschlossene Polygone zulassen oder beliebige Polygone. Die Bestimmung des gesuchten Maßes (§ 4) gelingt, nachdem gewisse den Polygonen zugeordnete Polyeder herangezogen wurden (§ 3). Auf eine Erörterung der numerischen Werte des Ergebnisses (§ 5) folgen schließlich nähere Angaben über ebene Polygone (§ 6). Ein Anhang betrifft eine Verallgemeinerung der in § 3 eingeführten Polyeder, die sogenannten Längenmengen.

§ 1. Bezeichnungen. Problemstellung

Wir bezeichnen mit p_0, p_1, \dots Punkte des n -dimensionalen euklidischen Raumes \mathcal{R}_n und zugleich die vom Ursprung o nach diesen Punkten zielenden Vektoren, mit p_0p_1 die Strecke, deren Enden p_0 und p_1 sind.

Unter einem *Polygon* $P = p_0p_1 \dots p_r$ möge die geordnete, endliche Menge $p_0p_1, p_1p_2, \dots, p_{r-1}p_r$ *aneinanderschließender Strecken* verstanden werden. Diese Strecken sollen *Seiten*, die Punkte p_0, p_1, \dots, p_r *Ecken* des Polygons P heißen. Bei einem *geschlossenen* Polygon ist $p_0 = p_r$, bei einem *offenen* $p_0 \neq p_r$. Wir nennen $p_i - p_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$) einen *Seitenvektor* von P , ferner $p_j - p_k$ ($j, k = 0, 1, 2, \dots, r$) einen *Diagonalvektor*. Zu den Diagonalvektoren gehören also auch die Seitenvektoren und der Nullvektor.

Ist $|\mathfrak{x}|$ die Länge des Vektors \mathfrak{x} , so besitzt P die *Länge* $l(P) = \sum |p_i - p_{i-1}|$ und den *Durchmesser* $d(P) = \max |p_j - p_k|$.

Zwei Polygone P und P' heißen *kovektoriell*¹⁾ und wir schreiben dann $P \parallel P'$, wenn die Seitenvektoren des einen eine Permutation der Seitenvektoren des anderen bilden. In diesem Fall ist auch $l(P) = l(P')$.

Für jedes Polygon P sei

$$D(P) = \text{obere Schranke } d(P') .$$

¹⁾ K. Menger, Die metrische Methode in der Variationsrechnung, Ergebn. math. Kolloqu. 8 (1937), S. 1—32 (bes. 25).

Wir definieren nun

$$\varrho(P) = \text{obere Schranke}_{P' \parallel P} \frac{d(P')}{l(P')} . \quad (1)$$

Wegen der Längengleichheit kovektorieller Polygone ist $\varrho(P) = D(P)/l(P)$.

Die eingangs angedeutete Aufgabe kann jetzt folgendermaßen präzisiert werden: *Man bestimme für den \mathcal{R}_n die Konstante*

$$\varrho(n) = \text{untere Schranke}_{P \text{ im } \mathcal{R}_n} \varrho(P) . \quad (2)$$

Das Problem verdient vielleicht an sich geometrisches Interesse; daneben ist jedenfalls eine Anwendung von $\varrho(n)$ bemerkenswert. Bei der Verwertung der metrischen Geometrie für die Variationsrechnung, wie sie K. Menger durchgeführt hat, geht nämlich $\varrho(n)$ explizit in ein Existenztheorem für Extremanten ein, falls der Integrand nicht überall stetig ist²⁾. In diesem Zusammenhang hat Herr Menger die Berechnung von $\varrho(n)$ angeregt³⁾.

Vertauscht man in (1) oder (2) oder in beiden Definitionen „untere Schranke“ und „obere Schranke“, so lässt sich jedesmal die Schranke sofort angeben. In anderer Weise können jedoch von unserer Aufgabe durchaus nicht-triviale *Umkehrungen* abgeleitet werden, bei denen es sich um das Aneinanderfügen von Vektoren auf möglichst engem Raum handelt. Dies ist für die Theorie der bedingt konvergenten Reihen wichtig⁴⁾.

²⁾ Menger¹⁾, S. 29. Die dort mit \varkappa bezeichnete Zahl ist unser $\varrho(n)$. — Zur Einführung in die Mengersche Theorie der Variationsrechnung: K. Menger, La géométrie des distances et ses relations avec les autres branches des mathématiques, Enseignement math. **35** (1936), S. 348—372; ders., Metric methods in calculus of variations, Proceed. national Acad. Sci. **23** (1937), S. 244—250. Eine lehrbuchmäßige Darstellung bereitet Herr Chr. Pauc für die Actualités sci. et industr. vor.

³⁾ Siehe auch die vorläufige Mitteilung: A. E. Mayer, Über den größten Durchmesser kovektorieller Polygone im \mathcal{R}_k , Ergebn. math. Kolloqu. **8** (1937), S. 37.

⁴⁾ Genannt seien die folgenden geometrisch eingestellten Arbeiten: E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journ. reine u. angew. Math. **143** (1913), S. 128—175 (bes. 171, 172); W. Groß, Bedingt konvergente Reihen, Monatshefte Math. u. Phys. **28** (1917), S. 221—237 (bes. 229); V. Bergström, Ein neuer Beweis eines Satzes von E. Steinitz, Abhandl. math. Semin. Hamburg **8** (1931), S. 148—152; ders., Zwei Sätze über ebene Vektorpolygone, ebenda S. 206—214; H. Hadwiger, Ein Satz über geschlossene Vektorpolygone des Hilbertschen Raumes, Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 732—738.

§ 2. Geschlossene und offene Polygone

Jedem Polygon $P = p_0 p_1 \dots p_r$ kann ein *geschlossenes Polygon* $\mathfrak{S}P = p_0 p_1 \dots p_r p_0$ zugeordnet werden. Die Transformation \mathfrak{S} ist selbstredend nur dann wesentlich, wenn nicht schon P geschlossen ist.

Fügt man zu den Seitenvektoren von P den von ihrer Reihenfolge unabhängigen Vektor $s = p_0 - p_r = -\sum(p_i - p_{i-1})$ hinzu, so entsteht die Menge der Seitenvektoren von $\mathfrak{S}P$. Weil kovektorielle Polygone sich bloß in der Reihenfolge der Seitenvektoren unterscheiden, ergibt sich also $\mathfrak{S}P \parallel \mathfrak{S}P'$, sobald $P \parallel P'$ ist.

Wird, umgekehrt, von einem Polygon $Q \parallel \mathfrak{S}P$ die (bzw. eine) Seite entfernt, deren Vektor s ist, so bleiben aneinanderschließende Strecken, das heißt ein Polygon P' übrig, da ja zugleich mit $\mathfrak{S}P$ auch Q geschlossen war. Wir finden somit, daß $Q = \mathfrak{S}P'$ ist, wobei im Hinblick auf die Seitenvektoren $P' \parallel P$ sein muß.

Folglich erzeugt \mathfrak{S} aus den mit P kovektoriellen Polygone alle mit $\mathfrak{S}P$ kovektoriellen Polygone und, da \mathfrak{S} den Durchmesser unverändert läßt, ist $D(\mathfrak{S}P) = D(P)$. Die Länge wird aber im allgemeinen durch \mathfrak{S} vergrößert: $l(\mathfrak{S}P) = l(P) + |s|$. Es ergibt sich also

$$\varrho(\mathfrak{S}P) \leq \varrho(P).$$

Weil $\varrho(n)$ als untere Schranke erklärt wurde, genügt es somit, bei der Ermittlung von $\varrho(n)$ *bloß geschlossene Polygone* zu betrachten. Wollte man, im Gegenteil, in der Definition von $\varrho(n)$ *ausschließlich offene Polygone* zulassen, so erhielte man kein anderes Resultat. Zum Beweis führen wir die Transformation \mathfrak{T} ein, die dem Polygon P das Polygon $\mathfrak{T}P = p_0 p_1 \dots p_r p_t$ entsprechen läßt, wo $p_t = (1-t)p_0 + t p_r$ ist ($0 < t \leq 1$), demnach der Vektor $p_t - p_r = (1-t)s$. Wenn, wie wir nun annehmen, P ein offenes Polygon ist, so ist auch $\mathfrak{T}P$ offen.

Weil die Seitenvektoren kovektorieller Polygone paarweise gleich sind und s von der Reihenfolge der Seitenvektoren nicht abhängt, hat man wie bei der Transformation \mathfrak{S} : Aus $P \parallel P'$ folgt $\mathfrak{T}P \parallel \mathfrak{T}P'$. Ersichtlicherweise beeinflußt \mathfrak{T} den Durchmesser nicht; mithin ist $D(\mathfrak{T}P) \geq D(P)$.

Wird andererseits in einem Polygon $R \parallel \mathfrak{T}P$ eine Seite, deren Vektor $(1-t)s$ ist, getilgt, so können, weil R offen ist, zwei Polygone P^* , P^{**} übrig bleiben, deren Seitenvektoren, zusammengenommen, die Seitenvektorenmenge von P erzeugen. Verschiebt man in diesem Fall etwa das Polygon P^{**} um den Vektor $(t-1)s$, so bildet es nach der Verschiebung gemeinsam mit P^* ein Polygon, das mit P kovektoriell ist. Da R die Seitenvektorensumme $-ts$ hat, ergänzt P^{**} auch nach der Verschiebung

um $t\mathbf{s}$ das Polygon P^* zu einem mit P kovektoriellen Polygon. Dies liefert den Hilfssatz: *Der Diagonalvektor \mathbf{d} von R ist selbst zugleich Diagonalvektor für ein mit P kovektorielles Polygon oder sowohl $\mathbf{d} + (t-1)\mathbf{s}$ wie $\mathbf{d} + t\mathbf{s}$ sind Diagonalvektoren in Polygonen, die mit P kovektoriell sind.* Das gilt auch dann, wenn bei der Eliminierung der Seite mit dem Vektor $(1-t)\mathbf{s}$ aus dem Polygon R statt zweier Polygone P^* , P^{**} bloß ein einziges verbleibt.

Aus dem Hilfssatz folgt, weil $\mathbf{d} + (t-1)\mathbf{s}$ oder $\mathbf{d} + t\mathbf{s}$ oder alle beide länger als \mathbf{d} sind, $D(\mathfrak{T}P) \leq D(P)$ und, mit Rücksicht auf obenstehende entgegengesetzte Ungleichung, $D(\mathfrak{T}P) = D(P) = D(\mathfrak{S}P)$. Da $l(\mathfrak{T}P) = l(P) + (1-t)|\mathbf{s}|$ ist, haben wir

$$\varrho(\mathfrak{T}P) \rightarrow \varrho(\mathfrak{S}P) \quad \text{für } t \rightarrow 0 .$$

Hieraus ist zu ersehen, daß $\varrho(P)$ für offene wie für geschlossene Polygone dieselbe untere Schranke hat.

§ 3. Polygone und zugeordnete Polyeder

Gemäß § 2 darf P fortan als geschlossenes Polygon vorausgesetzt werden. Es gilt, $D(P)$ zu ermitteln. Da $D(P)$ als obere Schranke für die Länge der Diagonalvektoren von sämtlichen Polygonen $P' \parallel P$ aufgefaßt werden kann, ist es nur natürlich, wenn wir einen beliebigen solchen Vektor $\mathbf{p}'_j - \mathbf{p}'_k$ näher betrachten. Er ist *in zweierlei Weise die Summe aus Seitenvektoren von P'* . Die Punkte $\mathbf{p}'_j, \mathbf{p}'_k$ zerlegen nämlich das geschlossene Polygon P' in zwei Teilpolygone, wofern $j \neq k$. Also ist $\mathbf{p}'_j - \mathbf{p}'_k$ die Summe der Seitenvektoren des einen und zugleich negative Summe der Seitenvektoren des anderen Teilstückes. Demnach gestattet $2(\mathbf{p}'_j - \mathbf{p}'_k)$, übrigens sogar für $j = k$, folgende Darstellung:

$$\sum \varepsilon_i (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}) , \quad \varepsilon_i = +1 \text{ oder } -1 . \quad (3)$$

Und umgekehrt; falls $2\mathbf{d}$ in der Gestalt (3) geschrieben werden kann, ist \mathbf{d} Diagonalvektor in einem Polygon $P' \parallel P$. Ordnet man nämlich die Seitenvektoren von P derart, daß alle in (3) mit positivem Vorzeichen versehenen den etwa noch übrigen vorangehen, so sind sie in dieser Reihenfolge die Seitenvektoren eines Polygons P' mit dem Diagonalvektor \mathbf{d} .

Der längste unter den der Darstellung (3) fähigen Vektoren hat somit die Länge $2D(P)$.

Die Menge aller in (3) angeschriebenen Punkte ist enthalten in der Menge

$$\mathfrak{P} = \sum \eta_i (\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_{i-1}), \quad -1 \leq \eta_i \leq +1.$$

Die Menge \mathfrak{P} geht aus den Strecken hervor, deren jede einen der Punkte $(\mathfrak{p}_1 - \mathfrak{p}_0), \dots, (\mathfrak{p}_r - \mathfrak{p}_{r-1})$ mit dem an \mathfrak{o} gespiegelten Punkt verbindet, und zwar vermöge *Addition* (spezieller Linearkombination) im Sinne der Theorie der konvexen Körper, das heißt entsprechend der folgenden Definition: *Sind $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_r$ voneinander unabhängig variable Punkte aus $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_r$, so werde als Summe dieser Mengen die Menge $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{M}_i$ aller durch $\sum (\mathfrak{x}_i - \mathfrak{o})$ darstellbaren Punkte bezeichnet⁵⁾.*

Seiner Entstehung zufolge ist \mathfrak{P} ein konvexes *Polyeder*⁶⁾ mit Mittelpunkt. Wegen der Symmetrie bezüglich des Ursprungs \mathfrak{o} ist die größte Entfernung zwischen \mathfrak{o} und einem Punkt aus \mathfrak{P} halb so lang wie der Durchmesser $d(\mathfrak{P})$ des Polyeders \mathfrak{P} .

Der Punkt

$$\mathfrak{x} = \sum \eta_i (\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}_{i-1}), \quad \begin{aligned} -1 &< \eta_{i_0} &< +1, \\ -1 &\leq \eta_{i \neq i_0} \leq +1, \end{aligned}$$

liegt zwischen jenen Punkten, für die $\eta_{i \neq i_0}$ unverändert, aber $\eta_{i_0} = -1$ bzw. $+1$ ist. Daher ist \mathfrak{x} nicht *extremer Punkt* von \mathfrak{P} , kann somit nicht maximale Entfernung von \mathfrak{o} haben. Folglich kommen *die Punkte aus \mathfrak{P} , die von \mathfrak{o} am weitesten abstehen, unter den in (3) angegebenen Punkten vor*, so daß

$$2D(P) = \frac{1}{2} d(\mathfrak{P}) \quad (4)$$

ist.

§ 4. Die mittlere Breite

Wir führen nun ein Funktional von \mathfrak{P} ein, das nur von der Länge $l(P)$ abhängt.

Ist \mathbf{e} ein fester Einheitsvektor, \mathbf{u} ein variabler Einheitsvektor, so hat die Strecke $\mathbf{o}\mathbf{e}$ in der Richtung von \mathbf{u} die *Breite* $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}|$, was den Betrag des skalaren Produkts bezeichnen möge, und daher die *mittlere Breite*

$$b(\mathfrak{o}\mathbf{e}) = \frac{1}{\omega_n} \int |\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}| d\omega_u. \quad (5)$$

⁵⁾ Vgl. T. Bonnesen u. W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper (Ergebn. Math. u. Grenzgeb. 3, H. 1), Berlin 1934, S. 29, 30.

⁶⁾ Wir folgen hier und auch sonst der Terminologie von Bonnesen u. Fenchel⁵⁾.

Hierin bedeutet ω_n die Oberfläche der Einheitskugel des \mathcal{R}_n ($n \geq 2$) und das Integral ist über die Oberfläche der Einheitskugel zu erstrecken; $d\omega_u$ bezeichnet das Oberflächenelement mit der Normalenrichtung u . Das Integral ist das doppelte ($n - 1$)-dimensionale Volumen der orthogonalen Projektion der Einheitskugel auf eine Ebene senkrecht zur Richtung von u , also gleich $2\pi_{n-1}$, wenn π_n das Volumen der Einheitskugel im \mathcal{R}_n ist⁷⁾.

Bei der Addition konvexer Körper gemäß der in § 3 wiedergegebenen Definition werden auch ihre Stützfunktionen addiert⁵⁾. Mit anderen Worten: Jede Stützebene an $M = \sum M_i$ entsteht durch Addition der parallelen Stützebenen an die Körper M_i . Daher ist der Abstand jener beiden Stützebenen an M , die zum beliebigen Einheitsvektor u , senkrecht sind, also *die Breite von M in der Richtung von u zugleich die Summe* (im gewöhnlichen Sinn) *der Breiten der Körper M_i* in ebendieser Richtung. Hieraus folgt *dasselbe für die mittleren Breiten*, wobei wie in (5) zu mitteln ist.

Weil \mathfrak{P} durch Addition aus Strecken erzeugt wurde, die doppelt so lang wie die Seiten des Polygons P sind, und in Anbetracht der vorhin berechneten mittleren Breite einer Einheitsstrecke resultiert für \mathfrak{P} die mittlere Breite

$$b(\mathfrak{P}) = \frac{2\pi_{n-1}}{\omega_n} 2l(P) . \quad (6)$$

Aus (4) und (6) schließen wir:

$$\varrho(P) = \frac{D(P)}{l(P)} = \frac{1}{4} \frac{d(\mathfrak{P})}{l(P)} = \frac{\pi_{n-1}}{\omega_n} \frac{d(\mathfrak{P})}{b(\mathfrak{P})} . \quad (7)$$

Der Durchmesser ist auch die größte Breite; also ist $d(\mathfrak{P}) \geq b(\mathfrak{P})$ und somit

$$\varrho(n) \geq \frac{\pi_{n-1}}{\omega_n} . \quad (8)$$

Noch eine andere *Minorante* von $\varrho(n)$ werde erwähnt. Wenn die mittlere Breite b , das ist die über *alle Richtungen* arithmetisch gemittelte Breite, durch das arithmetische Mittel b^* der Breiten in den *Richtungen der Koordinatenachsen* ersetzt wird, gilt⁸⁾

$$b^*(\text{or } e) \geq \frac{1}{n} . \quad (5^*)$$

⁷⁾ Bonnesen u. Fenchel⁵⁾, S. 48.

⁸⁾ Man ersieht (5*) augenblicklich aus der Dreiecksungleichung [allgemeiner bei H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig u. Berlin 1910, S. 4].

Hieraus kann ganz so wie vorhin gefolgert werden⁹⁾:

$$b^*(\mathfrak{P}) \geq \frac{2}{n} l(P) , \quad (6*)$$

$$\varrho(P) \geq \frac{1}{2n} \frac{d(\mathfrak{P})}{b^*(\mathfrak{P})} , \quad (7*)$$

$$\varrho(n) \geq \frac{1}{2n} . \quad (8*)$$

Eine *Majorante* von $\varrho(n)$ läßt sich beispielsweise von jedem Polygon P ableiten, dessen Seitenvektoren die positiven und negativen achsenparallelen Einheitsvektoren sind (P ist geschlossen). Hier ist $l(P) = 2n$, ferner \mathfrak{P} das n -dimensionale Analogon des Würfels mit der Kantenlänge 4, daher $d(\mathfrak{P}) = 4\sqrt[n]{n}$. Aus (7) folgt jetzt $\varrho(P) = 1/2\sqrt[n]{n}$, mithin

$$\varrho(n) \leq \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} . \quad (9)$$

Ich behaupte, daß in (8) das Gleichheitszeichen zu Recht besteht [in (8*) und (9) bloß für $n = 1$]. Dies wäre mittels (7) sofort bewiesen, wenn es ein geschlossenes Polygon P gäbe, für das $d(\mathfrak{P}) = b(\mathfrak{P})$ ist. Weil die Breite eines beschränkten Körpers eine stetige Funktion der Richtung ist, könnte die letzte Gleichung nur gelten, falls \mathfrak{P} in jeder Richtung die Breite $d(\mathfrak{P})$ besäße. Wegen der zentrischen Symmetrie hätten dann die Stützebenen an \mathfrak{P} den konstanten Abstand $\frac{1}{2}d(\mathfrak{P})$ von \mathfrak{o} und \mathfrak{P} wäre eine *Kugel*¹⁰⁾. Das ist in mehrdimensionalen Räumen unvereinbar damit, daß \mathfrak{P} , wie wir wissen, ein *Polyeder* ist. Demzufolge muß $d(\mathfrak{P}) > b(\mathfrak{P})$ und $\varrho(P) > \varkappa_{n-1}/\omega_n$ sein¹¹⁾.

[Im \mathcal{R}_1 ist allerdings jeder konvexe Körper eine Kugel. Weil dort $d(\mathfrak{P}) = 2l(P)$, ist immer $\varrho(P) = \frac{1}{2} = \varrho(1)$.]

Um dennoch in (8) die Gleichheit beweisen zu können, sieht man sich für $n \geq 2$ zur Betrachtung einer Folge

⁹⁾ Einen unmittelbaren Beweis von (8*) erbringt *Menger*¹⁾, S. 26 [für geschlossene Polygone].

¹⁰⁾ *E. Meißner*, Über Punktmenzen konstanter Breite, Vierteljahrsschr. naturforsch. Ges. Zürich **56** (1911), S. 42—50 (bes. 47).

¹¹⁾ Die Summen (Linearkombinationen) von Strecken sind im \mathcal{R}_3 konvexe Polyeder mit zentrisch symmetrischen Seitenflächen [*W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie **2** (Affine Diff.-Geom., bearb. von *K. Reidemeister*), Berlin 1923, S. 250]. Unter den bekannteren Vielflächen dieser Art ergab sich der kleinste Wert von d/b beim 62-flächigen archimedischen Dreikantpolyeder [vgl. *M. Brückner*, Vielecke und Vielfläche, Leipzig 1900, S. 133, 138], nämlich

$$\frac{d(\mathfrak{P})}{b(\mathfrak{P})} = \frac{2}{15} \sqrt{31 + 12\sqrt{5}} = 1,0140 .$$

$$P_0, P_1, \dots, P_\nu, \dots \text{ ad inf.}$$

von Polygonen genötigt. Mit Hilfe von Symmetrisierungen läßt es sich einrichten, daß die zugehörigen *Polyeder*

$$\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_\nu, \dots \text{ ad inf.}$$

gegen eine Kugel \mathfrak{Q} konvergieren. Dabei konvergieren $d(\mathfrak{P}_\nu)$ und $b(\mathfrak{P}_\nu)$ als stetige Funktionale gegen den Durchmesser von \mathfrak{Q} . Also geht gemäß (7)

$$\varrho(P_\nu) \rightarrow \frac{\varkappa_{n-1}}{\omega_n},$$

womit die angekündigte Verschärfung von (8) erreicht ist.

§ 5. Abschätzungen

Wird aus den bekannten Formeln für \varkappa_n und ω_n in die Gleichung (8) eingesetzt, so hat man endgültig

$$\varrho(n) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

(10)

Dies liefert auch für $n=1$ den richtigen Wert $\varrho(1) = \frac{1}{2}$, ferner für $n=2, 3, 4, 5$ die Zahlen $\varrho(n) = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3\pi}, \frac{3}{16}$.

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \varrho(n) &\text{ ist rational für ungerades } n, \\ \pi\varrho(n) &\text{ ist rational für gerades } n, \end{aligned} \quad (11)$$

wie die geläufigsten Eigenschaften der Gammafunktion erkennen lassen, nämlich

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (12)$$

Jedes Polygon P des \mathcal{R}_n kann auch in den \mathcal{R}_{n+1} eingebettet werden, wobei $D(P)$ und $l(P)$ erhalten bleiben. Diese Bemerkung ergibt im Verein damit, daß $\varrho(n)$ als untere Schranke erklärt ist,

$$\varrho(n+1) \leq \varrho(n) \leq \varrho(n-1).$$

Wegen (11) scheiden die Gleichheitszeichen aus und daher ist auch

$$\varrho(n)\varrho(n+1) < \varrho^2(n) < \varrho(n-1)\varrho(n).$$

Hieraus und aus (10) folgt mit Rücksicht auf die in (12) wiedergegebene Funktionalgleichung:

$$\frac{1}{2n\pi} < \varrho^2(n) < \frac{1}{2(n-1)\pi}, \quad (13)$$

was von $n = 3$ an genauer als (8*) und (9) ist.

Es liegt nahe, $\varrho^2(n)$ mit dem harmonischen Mittel $1/(2n-1)\pi$ der beiden Abschätzungen (13) zu vergleichen, zumal dieser Zwischenwert ebenso leicht numerisch ermittelt werden kann und übrigens auch für $n=1$ definiert ist, wohingegen die rechten Seiten der letzten drei Ungleichungen für $n=1$ versagen. Zieht man die Stirlingsche Reihe zu Rate, so gelangt man dazu, daß

$$\varrho^2(n) < \frac{1}{(2n-1)\pi} \quad (14)$$

ist. In der neuen Majorante haben wir zugleich eine *sehr genaue Approximation für großes n* gewonnen; ihr Fehler ist nurmehr $O(n^{-3})$, während der Spielraum in (13) noch $O(n^{-2})$ war¹²⁾.

§ 6. Weiteres über ebene Polygone

Faßt man alle aus einem Polygon durch Translationen hervorgehenden Polygone in eine Klasse zusammen, so gehören die mit P kovektoriellen Polygone endlichvielen Klassen an, weil die Seitenvektoren von P nur

¹²⁾ Herrn W. Fenchel verdanke ich den Hinweis darauf, daß (13) auch aus der folgenden Produktentwicklung [N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, S. 117] resultiert:

$$\varrho^2(n) = \frac{1}{2n\pi} \frac{n+1}{n} \frac{n+1}{n+2} \frac{n+3}{n+2} \frac{n+3}{n+4} \dots . \quad (*)$$

In der Tat kann so zusammengefaßt werden:

$$\varrho^2(n) = \frac{1}{2n\pi} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \left(1 + \frac{1}{(n+2)(n+4)}\right) \dots ,$$

oder

$$\varrho^2(n) = \frac{1}{2(n-1)\pi} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \dots .$$

Wir wollen hier noch deutlich machen, wie fein Ungleichung (14) ist. Das Teilprodukt von (*) mit $2(\nu+1)$ Faktoren ist gleich

$$\frac{1}{(2n-1)\pi} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{(n+2\nu-2)(n+2\nu)}\right) \left(1 + \frac{1}{n+2\nu}\right) ;$$

es wird — man ziehe den zweiten zum letzten Klammerausdruck — mit wachsendem n größer als $1/(2n-1)\pi$. Während also schon der erste bzw. die ersten zwei Faktoren von (*) die Abschätzungen (13) liefern, findet man bei (14) mit keinem Teilprodukt das Auslangen für alle n .

endlichviele Permutationen zulassen. Unter den mit P kovektoriellen Polygonen besitzen daher die Polygone mindestens einer Klasse den Durchmesser $D(P)$. Im vorangehenden war von diesen Polygonen größten Durchmessers nicht die Rede; die Einführung des Polyeders \mathfrak{P} hatte ja gerade den Erfolg, daß es nur noch auf die Seitenvektoren von P ankam, nicht mehr auf deren Reihenfolge.

Anscheinend ist es gar nicht leicht, für den \mathcal{R}_n eine Vorschrift anzugeben, nach der man ein mit P kovektorielles Polygon maximalen Durchmessers ermitteln könnte, ohne zuvor andere kovektorielle Polygone konstruiert zu haben. Im \mathcal{R}_1 freilich liegt eine solche Regel auf der Hand. Wir behandeln nun den \mathcal{R}_2 .

Werden die Seitenvektoren eines ebenen geschlossenen Polygons P im Sinne wachsender oder abnehmender Richtungswinkel geordnet, so sind sie in der neuen Reihenfolge die Seitenvektoren eines *konvexen Polygons* \mathfrak{RP} bzw. \mathfrak{QP} . Beide haben denselben Durchmesser $d(\mathfrak{RP}) = d(\mathfrak{QP})$. Denn \mathfrak{RP} und \mathfrak{QP} sind im wesentlichen zueinander zentrisch symmetrisch, nämlich wenn man davon abstrahiert, daß \mathfrak{RP} positiven, \mathfrak{QP} aber negativen Umlaufsinn hat (sofern P nicht linear war), und wenn über etwa vorhandene gleichgerichtete Seitenvektoren von P eine geeignete Verabredung getroffen wird, z. B. daß sie der Größe nach zu reihen sind (etwa in \mathfrak{RP} wachsend, in \mathfrak{QP} abnehmend), was selbstredend den Durchmesser nicht beeinflußt. Alle konvexen mit P kovektoriellen Polygone können offenbar aus \mathfrak{RP} oder \mathfrak{QP} mittels Schiebungen erzeugt werden, abgesehen vom Umordnen paralleler Vektoren.

Wir behaupten, übereinstimmend mit einer Vermutung von K. Menger:
Unter den mit P kovektoriellen Polygonen besitzen die konvexen¹³⁾ den Durchmesser $D(P)$.

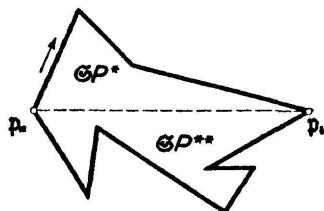


Fig. 1

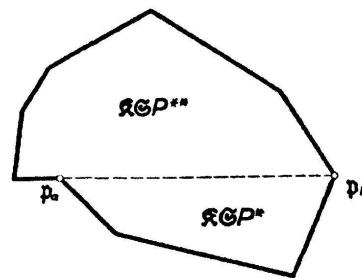


Fig. 2

¹³⁾ Dies ergibt für den \mathcal{R}_2 neuerlich $D(P)/l(P) > 1/\pi$, da eine entsprechende Ungleichung bei konvexen Bereichen bekannt ist [siehe A. Rosenthal u. O. Szász, Eine Extremaleigenschaft der Kurven konstanter Breite, Jahresber. dtsch. Math.-Vereinig. 25 (1917), S. 278—282; K. Reinhardt, Extremale Polygone gegebenen Durchmessers, ebenda 31 (1922), S. 251—270].

Hier könnten auch offene Polygone zugelassen werden. Dies ist aus § 2 ersichtlich, wenn man bedenkt, daß die dort eingeführte Transformation \mathfrak{S} konvexe offene Polygone in konvexe geschlossene überführt.

Der Beweis unserer Behauptung geht von einem *längsten* Diagonalenvektor $p_b - p_a$ des Polygons P aus. Die Ecken p_a, p_b zerlegen P in zwei offene Polygone P^*, P^{**} . Wir bilden $\mathfrak{S}P^*$ und $\mathfrak{S}P^{**}$ (Fig. 1), hierauf $\mathfrak{R}\mathfrak{S}P^*$ und $\mathfrak{R}\mathfrak{S}P^{**}$ und schieben diese konvexen Polygone derart aneinander, daß p_a, p_b aufeinanderfolgende Ecken von beiden sind (Fig. 2). Wird jetzt die Strecke $p_a p_b$ aus $\mathfrak{R}\mathfrak{S}P^*$ und $\mathfrak{R}\mathfrak{S}P^{**}$ getilgt, so bleibt ein Polygon $P_1 || P$ zurück.

Beim Übergang von P zu P_1 nimmt der Durchmesser zu oder wenigstens nicht ab: $d(P) = |p_b - p_a| \leq d(P_1)$. Weil $\mathfrak{R}\mathfrak{S}P^*$ und $\mathfrak{R}\mathfrak{S}P^{**}$ konvex sind, gehen an die von P_1 umgrenzte Fläche $[P_1]$ *Stützstrecken* jedenfalls durch alle jene Randpunkte, die nicht auf der p_a und p_b verbindenden Geraden g liegen. Wenn P^* oder P^{**} ein lineares Polygon war, ist $p_a p_b$ eine Randstrecke von $[P_1]$, und nur in diesem Fall. Wäre im besonderen $|p_b - p_a| = d(P_1)$, so besäße $[P_1]$ überdies in p_a und p_b *Stützgeraden* normal zu g ; mithin wäre P_1 *konvex*.

Die Konstruktion, die P in P_1 umgewandelt hat, wenden wir nunmehr auf P_1 an, auf das solcherart erzeugte Polygon P_2 neuerlich und so fort. Dabei entsteht eine Folge P_1, P_2, \dots kovektorieller Polygone mit positivem Umlaufsinn und nicht abnehmendem Durchmesser: $d(P_1) \leq d(P_2) \leq \dots$. Hier muß, weil die Durchmesser aller mit P kovektoriellen Polygone bloß eine endliche Menge bilden, *nach endlichvielen Schritten das Gleichheitszeichen* gelten. Dem vorigen Absatz gemäß kommt daher in der Folge P_1, P_2, \dots das konvexe Polygon $\mathfrak{R}P$ vor, was zu beweisen war.

Unter den mit P kovektoriellen Polygone weisen nicht immer bloß die konvexen den Durchmesser $D(P)$ auf. Sogar alle miteinander kovektoriellen Polygone können gleiche Durchmesser haben (Fig. 3).

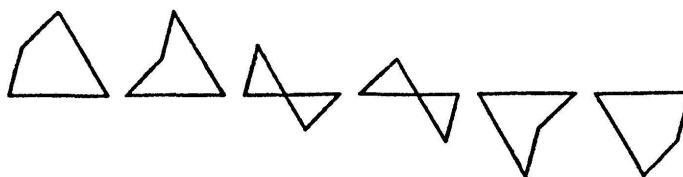


Fig. 3

Anhang : Über Längenmengen

In diesem Anhang darf $P = p_0 p_1 \dots p_r$, wieder ein offenes oder geschlossenes Polygon sein. Wie in § 3 kann man *das Polyeder*

$$\mathfrak{P} = \sum \eta_i (p_i - p_{i-1}), \quad -1 \leq \eta_i \leq +1, \quad (15)$$

dem Polygon P zuordnen¹⁴⁾). Für \mathfrak{P} gilt Gleichung (6), weil bei der Ableitung dieser Formel von der (dort allerdings vorausgesetzten) Geschlossenheit des Polygons kein Gebrauch gemacht wurde. Das Folgende gipfelt in einer Verallgemeinerung von (6).

Wir gehen nun zu einem Polygon P_1 über, das mit höchstens einer Ausnahme dieselben Ecken wie P hat, und zwar mittels einer der folgenden Substitutionen ($0 \leq \lambda, \mu \leq 1$):

1. p_0 wird durch $(1 - \lambda)p_0 + \lambda p_1$ ersetzt.
2. p_r wird durch $(1 - \lambda)p_r + \lambda p_{r-1}$ ersetzt.
3. An Stelle von p_{i_0} treten die beiden Punkte $p' = (1 - \lambda)p_{i_0} + \lambda p_{i_0-1}$ und $p'' = (1 - \mu)p_{i_0} + \mu p_{i_0+1}$.

Das P_1 zugeordnete Polyeder \mathfrak{P}_1 unterscheidet sich von \mathfrak{P} durch eine der nachstehenden Änderungen der Vektorsumme (15):

1. η_1 wird durch $(1 - \lambda)\eta_1$ ersetzt.
2. η_r wird durch $(1 - \lambda)\eta_r$ ersetzt.
3. An Stelle von $\eta_{i_0}(p_{i_0} - p_{i_0-1}) + \eta_{i_0+1}(p_{i_0+1} - p_{i_0})$ tritt

$$\eta'(p' - p_{i_0-1}) + \eta^*(p'' - p') + \eta''(p_{i_0+1} - p''), \\ -1 \leq \eta', \eta^*, \eta'' \leq +1$$

Dies ist äquivalent damit, daß η_{i_0} durch $(1 - \lambda)\eta' + \lambda\eta^*$ ersetzt wird. und η_{i_0+1} durch $(1 - \mu)\eta'' + \mu\eta^*$.

Somit ist in jedem Falle $\mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}$.

Durch Iteration des Verfahrens, das P_1 aus P erzeugt hat, kann man zu jedem Polygon gelangen, das P so eingeschrieben ist, daß seine Ecken beim Durchlaufen von P der Reihe nach angetroffen werden. Unter dieser Bedingung besteht also der Hilfssatz: *Dem eingeschriebenen Polygon entspricht eine Teilmenge von \mathfrak{P} als zugeordnetes Polyeder.*

War hier vom Durchlaufen die Rede — wurde, mit anderen Worten, das ursprüngliche Polygon als besonderes eindeutiges Streckenbild betrachtet, so liege nunmehr ein beliebiges *eindeutiges Streckenbild* C vor. Im folgenden nennen wir P ein *eingeschriebenes Polygon*, wenn seine Ecken C angehören und auch bei der Durchlaufung von C in jener Reihenfolge getroffen werden, die sie auf P besitzen.

Jetzt definieren wir mit K. Menger als *Längenmenge* \mathfrak{C} des eindeutigen

¹⁴⁾ Bis auf eine Translation stimmt \mathfrak{P} mit einem von Steinitz⁴⁾, S. 161, auch für abzählbar-unendliche Vektormengen eingeführten konvexen Körper überein [dort mit $2\bar{\Gamma}'$ bezeichnet].

Streckenbildes C die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsmenge, die von den zugeordneten Polyedern aller eingeschriebenen Polygone erzeugt wird¹⁵⁾. Im besonderen besagt diese Definition, dem Hilfssatz zufolge, daß die Längenmenge des Polygons P mit dem zugeordneten Polyeder \mathfrak{P} übereinstimmt.

Falls C ein *Bogen* (topologisches Streckenbild) ist, benötigt man für die Konstruktion von \mathfrak{C} nicht alle eingeschriebenen Polygone; vielmehr genügt es, eine Folge eingeschriebener Polygone

$$P_0, P_1, \dots, P_\nu, \dots \text{ ad inf.} \quad (16)$$

so zu ermitteln, daß die Ecken von P_ν auch Ecken von $P_{\nu+1}$ sind und jeder Punkt aus C Ecke eines Polygons der Folge oder Häufungspunkt von Ecken ist. *Für derartige, ausgezeichnete Polygonfolgen gilt: \mathfrak{C} ist die abgeschlossene Hülle der Vereinigungsmenge für die Folge zugeordneter Polyeder¹⁶⁾.*

Zum Beweise müssen wir zeigen: Wird die Kugelumgebung \mathfrak{U} mit dem Radius $\sigma > 0$ um einen Punkt c von \mathfrak{C} vorgegeben, so existiert ein zu \mathfrak{U} nicht fremdes Polyeder \mathfrak{P}_ν .

Entsprechend der Definition von \mathfrak{C} gibt es ein C eingeschriebenes Polygon $P = p_0 \dots p_r$, dessen zugeordnetes Polyeder \mathfrak{P} mit der Umgebung vom Radius $\tau < \sigma$ ($\tau > 0$) um c einen nicht leeren Durchschnitt hat. Da die Ecken von P Punkte von C sind, läßt sich voraussetzungsgemäß aus der Folge (16) ein Polygon P_ν derart auswählen, daß erstens bei jeder Ecke von P in einer Entfernung $< \frac{\sigma - \tau}{2r}$ je eine Ecke von P_ν liegt und daß zweitens die Übertragung der bogenmäßigen Ordnung der Ecken von P auf die benachbarten Ecken von P_ν diese wieder bogenmäßig ordnet. Dann kommt jedem Seitenvektor von P ein Diagonalvektor von P_ν dermaßen nahe, daß sich nächst jedem Punkt von \mathfrak{P} ein Punkt von \mathfrak{P}_ν befindet, nämlich in einem Abstand $< \sigma - \tau$. Folglich hat \mathfrak{P}_ν mit \mathfrak{U} mindestens einen Punkt gemein.

¹⁵⁾ K. Menger, Zur Begründung einer Theorie der Bogenlänge in Gruppen, *Ergebn. math. Kolloqu.* 5 (1933), S. 1—6. Abweichend von der dort aufgestellten, in sehr allgemeinen Räumen anwendbaren Definition habe ich erstens die Längenmenge mit Hilfe von \mathfrak{P} statt mittels (3) erklärt, im Anschluß an A. Vilim, *Längenmengen* (Diss. Univ. Wien 1934, ungedruckt). Aus einem Bogen des \mathcal{R}_n entsteht beidemale die gleiche, weil konvexe [siehe ¹⁷⁾], Längenmenge. Zweitens lasse ich alle eingeschriebenen Polygone zu, und nicht bloß jene, die mit C Anfang und Ende gemein haben. Auch das ist — man beachte den Hilfssatz — irrelevant [vgl. die Frage bei Menger¹⁵⁾, daselbst Fußnote³⁾].

¹⁶⁾ Menger¹⁵⁾, S. 4.

Weil, im Hinblick auf unseren Hilfssatz, die Mengenfolge

$$\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_v, \dots \text{ ad inf.}$$

monoton wächst, ist das soeben Bewiesene gleichwertig mit: $\lim \mathfrak{P}_v = \mathfrak{C}$.

Die Mengenfolge ist gleichmäßig beschränkt, sobald der Bogen C *rektifizierbar* ist, und nur in diesem Fall; denn nach (6) ist $d(\mathfrak{P}_v) \geq b(\mathfrak{P}_v) = 4 \varrho(n) l(P_v)$, während andererseits $\frac{1}{2} d(\mathfrak{P}_v) \leq l(P_v)$ ist. Die gleichmäßige Beschränkung bewirkt, daß \mathfrak{C} ein *beschränkter konvexer Körper* ist¹⁷⁾. Dann konvergiert, als stetiges Funktional, die mittlere Breite $b(\mathfrak{P}_v)$ gegen die mittlere Breite $b(\mathfrak{C})$ von \mathfrak{C} . Weil zugleich $l(P_v)$ gegen die Bogenlänge $l(C)$ geht, ergibt sich anhand von (6)

$$b(\mathfrak{C}) = \lim b(\mathfrak{P}_v) = 4 \frac{\kappa_{n-1}}{\omega_n} \lim l(P_v) = 4 \frac{\kappa_{n-1}}{\omega_n} l(C) , \quad (17)$$

also die *Ausdehnung der Gültigkeit von (6) auch auf nicht polyedrische Längenmengen*¹⁸⁾.

Übrigens lehrt (17), daß Bögen mit gleicher Längenmenge auch gleiche Bogenlänge haben¹⁹⁾.

¹⁷⁾ K. Menger, Eine Bemerkung über Längenmengen, *Ergebn. math. Kolloqu.* 6 (1935), S. 1—2. Vgl. auch H. Terasaka, Ein Satz über Längenmengen, ebenda S. 3—4.

¹⁸⁾ Im \mathcal{R}_2 folgt hieraus leicht, daß die vierfache Länge eines Bogens der Umfang seiner Längenmenge ist [Menger¹⁵), S. 6; vgl. Steinitz⁴), S. 163, Fußnote].

¹⁹⁾ Für den \mathcal{R}_2 bemerkt dies Menger¹⁵), S. 6.

(Eingegangen den 14. März 1938.)