Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 10 (1937-1938)

Artikel: Über die Zerlegung regulärer Streckenkomplexe ungerader Ordnung.

Autor: Baebler, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-11002

Über die Zerlegung regulärer Streckenkomplexe ungerader Ordnung

Von F. Baebler, Göttingen

Die vorliegende Arbeit ist angeregt durch eine Bemerkung von D. König[1]) und geht zurück auf eine Abhandlung von J. Petersen[2]). Eine Frage der Invariantentheorie veranlaßte ihn zur Untersuchung der Voraussetzungen, unter welchen man einen regulären Streckenkomplex sicher in reguläre Faktoren zerfällen kann. Dabei nennt er einen Komplex K regulär n. Grades, wenn von jedem seiner Knotenpunkte genau n Kanten ausgehen und regulären Faktor einen regulären Teilkomplex, der genau alle Knotenpunkte und nur Kanten aus K enthält. Die Bezeichnung Faktor wurde im Zusammenhang mit der algebraischen Frage gewählt.

Petersen stellte fest, daß man jeden regulären Komplex vom Grad $2\,i$ mindestens in i Teilkomplexe (Faktoren) vom 2. Grad zerlegen kann. Die Zerlegung ist im allgemeinen nicht eindeutig. Bezüglich der Komplexe ungeraden Grades zeigten sich wesentlich kompliziertere Verhältnisse. Da gibt es nicht zerlegbare (primitive) Komplexe jeden Grades. Petersen hat einzig die Komplexe dritten Grades untersucht und eine Bedingung angegeben, die eine Zerlegung gewährleistet. Sie besteht darin, daß jede Kante des zusammenhängenden, endlichen Komplexes mit höchstens einer Ausnahme in einem Kreis, d. h. in einem doppelpunktfreien, geschlossenen Kantenzug des Komplexes enthalten sein muß. Er hat die Vermutung ausgesprochen, daß auch bei Komplexen höherer Ordnung analoge Verhältnisse vorliegen.

Später ist der von Petersen gegebene Beweis mehrfach erheblich vereinfacht und umgeformt worden[3]). Man erreichte die Vereinfachungen hauptsächlich dadurch, daß man gewisse Eigenschaften der regulären Komplexe dritten Grades feststellte, welche die Verwendung der vollständigen Induktion gestatten. Bei Komplexen höheren Grades scheinen sich jedoch den entsprechenden Feststellungen große Schwierigkeiten entgegenzustellen.

---

[1]) *D. König*, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Bd. XVI aus Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern, S. 156 und 195.

[2]) *Julius Petersen*, Theorie der regulären Graphs, Acta Mathematica Bd. 14.

[3]) *D. König*, S. 186. Dort findet man, S. 182—192, einen schönen Beweis des Satzes von Petersen.

Das folgende ist in verschiedenem Sinne eigentlich eine Fortsetzung der Arbeit von Petersen. Einmal sind sein hauptsächliches Resultat und die von ihm ausgesprochene Vermutung als Spezialfälle im Ergebnis dieser Arbeit enthalten, und zweitens stellt, wie ich nachträglich bemerkte, die Methode in mancher Beziehung eine Modifikation der von Petersen eingeschlagenen dar. Sie besteht im übrigen in der Sicherstellung eines Verfahrens, welches gestattet, die Zerlegung eines gegebenen Komplexes wirklich durchzuführen[4]).

In jedem Beweis des Satzes von Petersen wird zunächst vorausgesetzt, daß jede Kante des betrachteten, endlichen, zusammenhängenden und regulären Streckenkomplexes dritten Grades K in einem Kreise liege. Die Ausnahme einer einzigen verursacht dann hinterher keine Schwierigkeiten. Diese Voraussetzung kann man auch so aussprechen: Man muß mindestens zwei Kanten des Komplexes entfernen, damit aus ihm zwei nicht miteinander zusammenhängende Teile entstehen, die zusammen alle Knotenpunkte enthalten. (Als Teil soll auch ein isolierter Knotenpunkt ohne Kanten gelten.)

Analog setze ich von einem beliebigen, endlichen, zusammenhängenden und regulären Streckenkomplex K_n ungeraden Grades n voraus, sein Zusammenhang könne auf keine Weise durch die Entfernung von weniger als ϱ Kanten zerstört werden ($1 < \varrho$). Einen solchen Komplex, behaupte ich, kann man immer in zwei reguläre Komplexe (Faktoren) zerspalten, von denen jeder sämtliche Knotenpunkte enthält, und so, daß der Grad des einen entweder ϱ oder $\varrho - 1$ ist, je nachdem ϱ selbst gerade oder ungerade ist.

Diese Behauptung wird bewiesen durch die Begründung eines Verfahrens, mittels dessen es gelingt, von einem Komplex einen regulären Faktor $(2\,\varrho_1 + 2)$. Grades abzuspalten, wenn man vorher bereits einen solchen $2\,\varrho_1$. Grades abgespalten hat $(0 \leqslant 2\,\varrho_1 < \varrho - 1)$.

Für die Anschaulichkeit und die Ausdrucksweise ist es vorteilhaft, wenn man sich die Kanten des Komplexes K_n gefärbt denkt. Seien also diejenigen des abgespaltenen Faktors vom Grade $2\,\varrho_1$ schwarz, die übrigen rot.

Man erweitert nun den so gefärbten Komplex, indem man jeden seiner Knotenpunkte durch ein Dreieck mit schwarzen Seiten ersetzt, dessen Ecken in beliebiger Reihenfolge mit den Indizes 1, 2, 3 versehen sind.

---

[4]) Will man nur das von Petersen herrührende Resultat beweisen, so kann man sich auch auf dem in dieser Arbeit eingeschlagenen Wege der vollständigen Induktion bedienen. Man hat dabei noch den Vorteil, den Satz von Frink bloß bezüglich sehr spezieller Verhältnisse zu brauchen, so daß für seinen Beweis wenige Zeilen genügen.

(Wenn künftig von einem Dreieck des Komplexes die Rede ist, so ist immer ein solches gemeint.) Mit den Ecken eines jeden Dreiecks werden diejenigen Kanten aus K_n verknüpft, welche von dem ihm entsprechenden Knotenpunkt ausgehen (Fig. I[5]). Dabei verbindet man 1 und 2 mit je ϱ_1 schwarzen und $\frac{n-2\varrho_1-1}{2}$ roten; die einzige noch übrigbleibende rote Kante läßt man von 3 ausgehen. Im übrigen ist die Auswahl beliebig. Schließlich führt man noch $n-3$ neue Kanten ein, und zwar sowohl von 1 als auch von 2 aus je ϱ_1 schwarze und $\frac{n-2\varrho_1-3}{2}$ rote nach 3. Der auf diese Weise aus K_n abgeleitete Komplex K_n^* ist regulär n. Grades, zusammenhängend, endlich und in zwei Faktoren zerlegt, einen schwarzen vom Grad $\mu = 2\varrho_1 + 2$ und einen roten vom Grad $\nu = n - 2\varrho_1 - 2$.

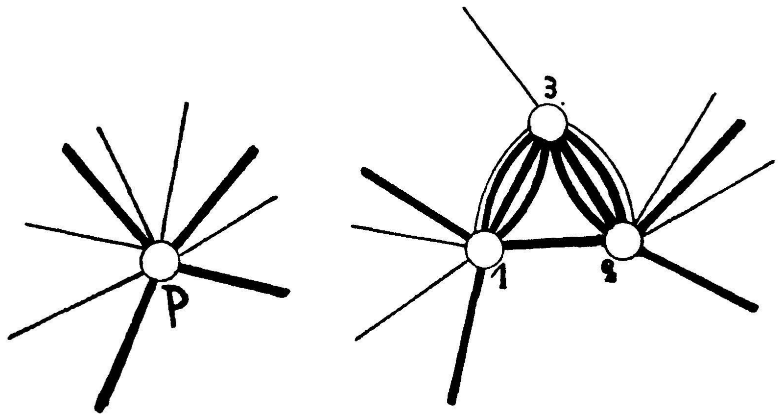

Fig. I.

Wie man modifizieren wird, wenn von K_n noch kein Faktor abgespalten ist, ist ohne weiteres klar.

Das oben angedeutete Verfahren besteht darin, daß man vom Komplex K_n^* sukzessive wieder zum Komplex K_n zurückkehrt, indem man die Zerfällung in die Faktoren μ. und ν. Grades beibehält. Zu diesem Zweck färbt man zunächst gewisse geeignete Kantenmengen so um, daß die Zerlegung in einen schwarzen Faktor vom Grade μ und einen roten vom Grade ν bis auf gewisse Ausnahmen erhalten bleibt. Dabei sollen nach der Umfärbung von möglichst vielen Dreiecken aus genau $2\varrho_1 + 2$ schwarze, früher K_n angehörige Kanten, von allen übrigen genau $2\varrho_1$ solche ausgehen. Hinterher läßt man die erstgenannten Dreiecke in Punkte schrumpfen. Der entstehende Komplex ist regulär vom n. Grad und in zwei Faktoren vom μ. und ν. Grad zerlegt. In diesem Schrumpfkomplex verfährt man bezüglich der noch vorhandenen Drei-

[5]) In allen Figuren sind die Kanten des schwarzen Faktors stark, die des roten schwach gezeichnet.

ecke genau wie eben, mit der Einschränkung, daß die Anzahl der von den Schrumpfpunkten ausgehenden schwarzen Kanten nicht geändert werden darf.

Die von Petersen stammende Methode des Umfärbens besteht darin, daß man eine rote Kante, die man umfärben will, in einen geschlossenen Kantenzug einspannt, welcher, mit dieser Kante beginnend, so in einem Zuge durchlaufen werden kann, daß abwechselnd schwarze und rote Kanten aufeinander folgen, wobei jede nur einmal durchlaufen wird. Ein solcher Kantenzug soll kurz *Wechselzug* genannt werden (Fig. II). Ändert man die Farben aller Kanten eines Wechselzuges, so ist der Komplex wieder in der richtigen Weise zerlegt.

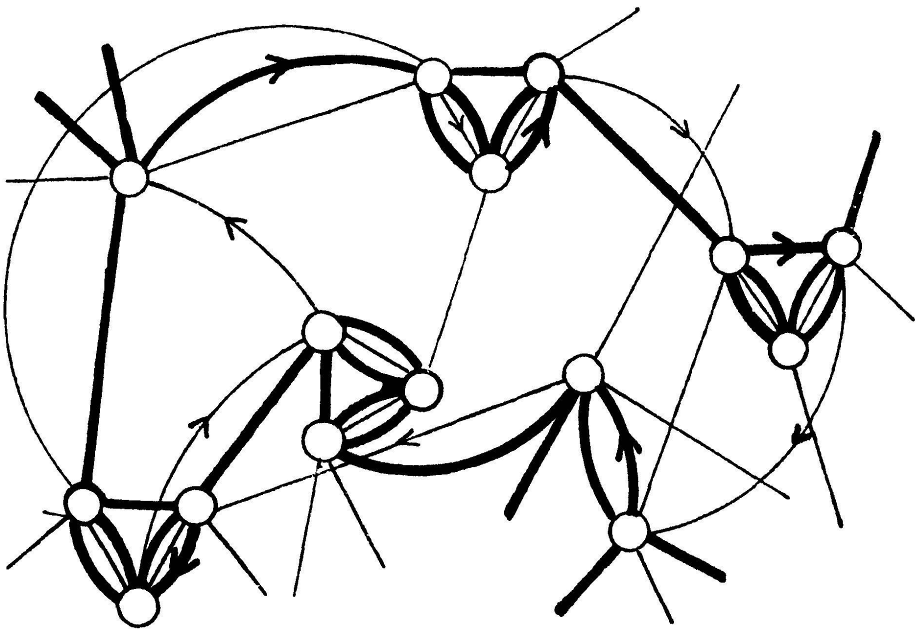

Fig. II.

Bemerkung. Für unseren Zweck ist es sogar erlaubt, zwei rote Kanten, die von einer Ecke eines Dreiecks ausgehen, hintereinander zu durchlaufen, falls der Wechselzug dieses sonst immer mit einer schwarzen Kante erreicht und mit einer roten verläßt oder umgekehrt. Ebenso darf auch die letzte Kante des Wechselzuges rot sein, wie die erste. Der durch Umfärbung und nachträgliche Schrumpfung entstehende Komplex hat dann doch die richtige Zerlegung.

Will man ein bestimmtes Dreieck schrumpfen lassen, so hat man also einen Wechselzug zu konstruieren, der mit einer roten Kante von ihm ausgeht, und der schließlich ebenfalls mit einer roten Kante zu ihm zurückkehrt.

Den Beweis für die Existenz solcher Wechselzüge beginnen wir mit folgenden Bemerkungen:

Erreicht man auf einem Wechselzug ein Dreieck mit einer schwarzen, so muß man es längs einer roten Kante wieder verlassen.

Erreicht man es mit einer roten, so kann die Fortsetzung aus dem Dreieck hinaus rot oder schwarz sein, wenigstens für $\nu > 3$.

Es ist möglich, daß man längs eines Wechselzuges ein bestimmtes Dreieck zweimal oder häufiger durchläuft, indem man es mit einer roten Kante erreicht und mit einer roten wieder verläßt. Unter den auf diese Weise zusammengehörigen Kantenpaaren ist bezüglich der Durchlaufung ein erstes und ein letztes. Läßt man das ganze Stück des Wechselzuges zwischen der Eintrittskante des ersten und der Austrittskante des letzten Paares weg, so hat man immer noch einen Wechselzug (vgl. die Bemerkung oben). Nur derart reduzierte Wechselzüge sollen in Betracht gezogen werden.

Für die Konstruktion von Wechselzügen wird es nötig sein, die Kanten- und Knotenpunktmengen zu kennen, die man auf *Wechselwegen*[6]) erreichen kann, welche mit einer festen, roten, von einem Dreieck ausgehenden Kante beginnen.

D_0 sei ein beliebiges unter diesen Dreiecken. Man verläßt es längs einer von der Ecke $1 = A$ ausgehenden roten Kante k_0. Diese, mit ihren beiden Endpunkten, bezeichnen wir als *Teilkomplex 1. Stufe*, k_0 ohne A als *1. Schritt* und den neu erreichten Knotenpunkt als *Punkt 1. Stufe*. Letzteren verläßt man gleichzeitig längs aller von ihm ausgehenden $\mu = 2\,\varrho_1 + 2$ schwarzen Kanten. Die neu erreichten Knotenpunkte, falls solche vorhanden sind, sind die Punkte 2. Stufe. Die Gesamtheit aller bisher erreichten Knotenpunkte und durchlaufenen Kanten ist der Teilkomplex 2. Stufe, die μ schwarzen Kanten der 2. Schritt. Von jedem Punkt der 2. Stufe gehen $\nu = n - 2\,\varrho_1 - 2$ rote Kanten aus, die man sich wieder alle gleichzeitig durchlaufen denkt. Sie zerfallen im allgemeinen in drei Kategorien:

1. *fortschreitende*, d. h. solche, die zu neuen Punkten führen;

2. *rückläufige*, das sind solche, die zum Punkt der ersten Stufe zurückführen (für $\nu > 3$);

3. *schließende*, das sind diejenigen, welche zwei Punkte der 2. Stufe verbinden.

Jede rückläufige Kante gibt im allgemeinen zu neuen Wechselwegen Anlaß, wenigstens für $\nu > 3$.

---

[6]) Das sind Wege, auf denen sich abwechselnd schwarze und rote Kanten folgen, jede nur einmal durchlaufen.

Sind keine Kanten der 3. Kategorie vorhanden, so ist die Definition des 3. Schrittes, der Punkte 3. Stufe und des Teilkomplexes 3. Stufe völlig analog den vorhergehenden. Dasselbe gilt für die nachfolgenden Stufen, Teilkomplexe und Schritte, so lange keine schließenden Kanten auftreten.

Für Schritte gerader Stufen bestehen die drei Kanten-Kategorien im allgemeinen für alle ν, die Bemerkung über die neuen Wechselwege mittels rückläufiger Kanten für alle $\nu > 3$.

Für $\nu = 3$ ergibt, wie man sofort sieht, im allgemeinen nur ein Teil der rückläufigen Kanten der geraden Schritte neue Wechselwege.

Um eine bestimmte Vorstellung zu haben, nehmen wir an, die erste schließende Kante verlaufe zwischen Punkten einer ungeraden Stufe — nennen wir sie die m. —; sie seien also schwarz (Fig. III). Greifen wir eine beliebige unter ihnen s_0 heraus, und denken wir sie als einzige des $(m+1)$. Schrittes durchlaufen. Ihre Endpunkte seien P_1 und P_2. Die Menge der Wechselwege vom Anfangspunkt nach P_1 werde mit $\mathfrak{M}_1$, die entsprechende für P_2 mit $\mathfrak{M}_2$ bezeichnet. Jeder Wechselweg aus $\mathfrak{M}_1$ kann längs s_0 nach P_2 und von dort aus rückwärts längs aller Wechselwege aus $\mathfrak{M}_2$ fortgesetzt werden und umgekehrt. Alle Kanten dieser Mengen werden auf diese Weise auf Wechselwegen, die mit k_0 beginnen, *in beiden Richtungen* durchlaufbar. *Jeder ihrer Knotenpunkte kann sowohl mit einer roten, als auch mit einer schwarzen Kante erreicht werden.* Es kann aber sein, daß zu einem oder mehreren Knotenpunkten Q aus $\mathfrak{M}_2$ kein Wechselweg $A P_1 P_2 Q$ existiert, auf dem nicht eine oder mehrere Kanten mehrmals durchlaufen werden. Analoges gilt für $\mathfrak{M}_1$. Solche Punkte schließt man mittels folgender Überlegung von der Betrachtung aus:

Unter den Kanten der Wegemengen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gibt es solche, die in jedem Wege enthalten sind. Numeriert man diese Kanten auf jedem Weg der Reihe nach so, wie man sie beim Durchlaufen von A aus trifft, so erhält man eine von ihnen, l_0, auf allen Wegen die höchste Nummer. Ihr Endpunkt höherer Stufe sei P_0. Diejenige Kantenmenge, die auf allen Wegen nach l_0 durchlaufen wird, bildet mit s_0 zusammen einen zusammenhängenden, abgeschlossenen Komplex G[7]). Abgeschlossen ist ein Komplex, wenn von jedem seiner Knotenpunkte mindestens zwei Kanten ausgehen. Zu jedem Knotenpunkt aus G führen mindestens zwei Wechselwege mit folgenden Eigenschaften:

Sie beginnen mit der Kante k_0, und auf jedem von ihnen wird jede Kante nur einmal durchlaufen. Der eine endigt mit einer roten, der andere mit einer schwarzen Kante.

[7]) In Fig. III sind die zu G gehörigen Kanten ausgezogen, die übrigen gestrichelt.

Den ganzen Komplex G zieht man nun in den Punkt P_0 zusammen. P_0 wird *Reduktionspunkt* genannt. Von diesem läßt man nachträglich alle die Kanten ausgehen, welche G mit außerhalb gelegenen Punkten verbinden. Diese Kanten zerfallen im allgemeinen in zwei Kategorien:

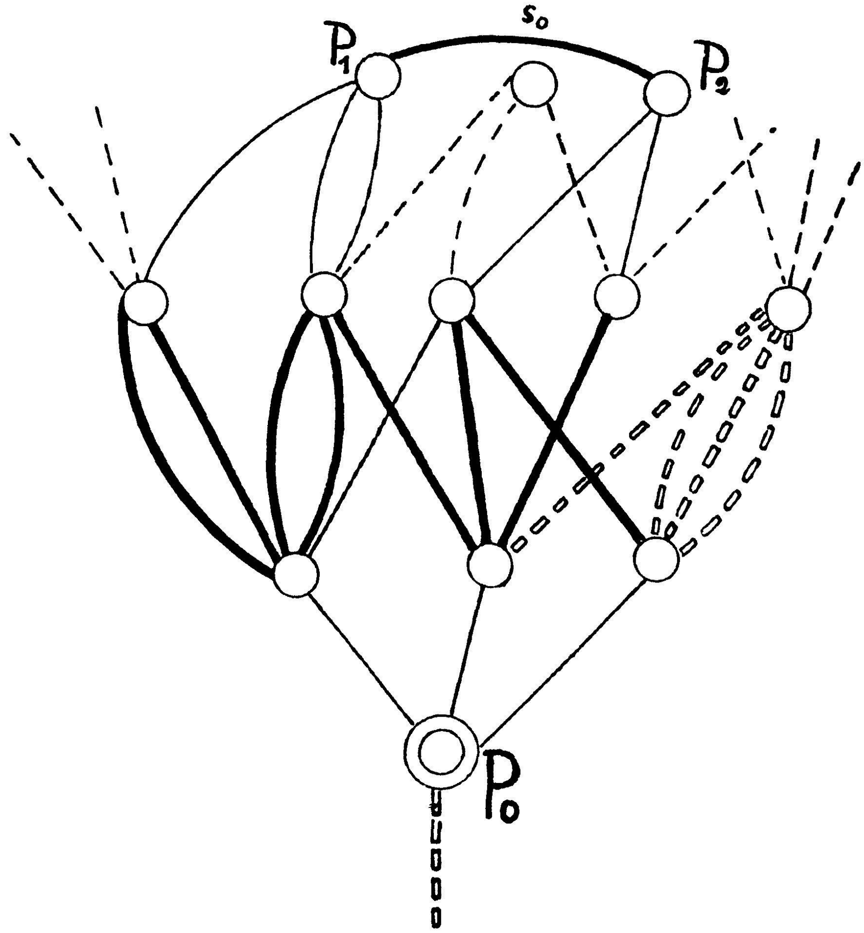

Fig. III.

1. solche, die einem der m ersten Schritte angehören;
2. solche, bei denen das nicht der Fall ist.

Alle sind sie auf Wechselwegen *in der Richtung von P_0 weg* durchlaufbar, mit Ausnahme derjenigen, durch die P_0 bestimmt wurde.

Es kann nicht sein, daß eine Kante der ersten Kategorie auch in der Richtung auf P_0 hin durchlaufen werden kann. Sie hätte zu einem Wechselweg der Menge $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ Anlaß gegeben, der l_0 nicht enthält.

Die roten unter ihnen werden zum m. Schritt mitgerechnet. Die auf ihnen neu erreichten Punkte und auch P_0, falls schwarze Kanten von ihm ausgehen, bilden mit den nicht in P_0 einbezogenen früheren, zusammen die neue m. Stufe. Die aus P_0 hinausführenden schwarzen Kanten zählt man zum $(m+1)$. Schritt.

Während unter den von P_0 ausgehenden roten Kanten also nur rückläufige, d. h. solche nach Punkten früherer Stufen ungeraden Ranges, und fortschreitende, d. h. solche nach der bisherigen m. Stufe und neuen Punkten existieren, gibt es unter den Kanten des $(m+1)$. Schrittes im allgemeinen wieder fortschreitende, rückläufige und schließende. Unter die letzteren fallen auch die schwarzen von P_0 aus nach Punkten der m. Stufe.

Aus ihnen greift man wieder eine beliebige heraus und wiederholt den eben beschriebenen Prozeß. Dabei kann:

1. ein neuer Reduktionspunkt Q_0 entstehen,

2. der bereits vorhandene von neuem Reduktionspunkt für ein erweitertes Kantensystem werden, oder

3. dieser mit anderen Punkten und Kantenmengen in einen Punkt einer Stufe niedrigeren Ranges zusammengezogen werden.

Im zweiten und dritten Fall ist dem bereits Gesagten nichts beizufügen. Wie man die neue m. Stufe und den neuen $(m+1)$. Schritt erklärt, ergibt sich von selbst.

Sind zwei Reduktionspunkte vorhanden, so haben sie höchstens eine Verbindungskante (vgl. S. 281, Zeile 10 u. f.).

Im Fall 1 kommen zu den übrig gebliebenen Punkten m. Stufe noch die neuen, welche man auf den roten Kanten von Q_0 aus erreicht, eventuell der Punkt Q_0 selbst; zu den nicht einbezogenen Kanten des bisherigen $(m+1)$. Schrittes, die schwarzen, welche von Q_0 ausgehen.

So fortfahrend, muß man nach endlich vielen Prozessen zu einem Komplex mit folgenden Eigenschaften kommen:

1. Jede seiner Kanten ist vom Anfangspunkt A aus auf mindestens einem Wechselwege zu durchlaufen, der mit k_0 beginnt und nur aus Kanten des Komplexes besteht.

2. Er enthält keine schließende Kante; keine kann in beiden Richtungen durchlaufen werden.

3. Er enthält eine Anzahl von Knotenpunkten, welche ganze Systeme von Kanten und Knotenpunkten repräsentieren, die Reduktionspunkte. (Vielleicht sind alle seine Knotenpunkte solche.)

4. Alle Wechselwege, auf denen man einen Reduktionspunkt erreicht, führen längs ein und derselben Kante in ihn hinein.

5. Zwei Reduktionspunkte können also höchstens durch eine einzige Kante verbunden sein.

Wir nennen diesen Komplex den *reduzierten Komplex* $(m+1)$. Stufe, seine Reduktionspunkte die Reduktionspunkte $(m+1)$. Stufe. Der zu ihm gehörige $(m+1)$. Schritt heißt gleichfalls reduziert, und, falls nicht alle seine Kanten rückläufig sind, erhält man Punkte einer neuen, der

$(m+1)$. Stufe. Von ihr gehen die Kanten des vorläufigen $(m+2)$. Schrittes aus. Wieder können schließende darunter sein. Dann wiederholt man die eben für die m. Stufe und den $(m+1)$. Schritt beschriebenen Prozesse. Das Ergebnis sind die reduzierten Gebilde $(m+2)$. Stufe.

So fortfahrend, muß man in endlich vielen Etappen zu einem reduzierten Komplex kommen, dessen letzter Schritt aus lauter rückläufigen Kanten besteht. Wir wollen ihn *Schlußkomplex* nennen. Er enthält die Gesamtheit aller vom Ausgangspunkt A aus führenden Wechselwege, die mit k_0 beginnen.

Gibt es auf ihnen keine rote Kante, die in der Richtung auf die Ecken des Dreiecks D_0 hin durchlaufen wird, so ist es nicht möglich, die Ausgangskante k_0 in einen Wechselzug einzuspannen. Wir werden zeigen, daß ein solcher Schlußkomplex nicht existieren kann.

Zunächst wenden wir uns seinen Reduktionspunkten zu. Je nachdem die in irgendeinen von ihnen hineinführende Kante schwarz oder rot ist, nennen wir ihn S- oder R-Punkt. Von einem R-Punkt können rote und schwarze Kanten wegführen, oder bloß rote oder bloß schwarze. Im letzteren Falle ist ihre Anzahl gerade, da der schwarze Faktor in ϱ_1+1 Kreissysteme zerfällt, von denen jedes alle Knotenpunkte des ursprünglichen Komplexes genau einmal enthält.

Aus demselben Grunde muß aus jedem S-Punkt eine ungerade Anzahl von schwarzen Kanten hinausführen, also mindestens eine.

Es kann keinen reduzierten Teilkomplex geben, derart, daß von einem seiner Reduktionspunkte aus zugleich eine schwarze und eine rote Kante nach demselben Knotenpunkt hinführt. Sie könnten in beiden Richtungen durchlaufen werden. *Falls der Grad des roten Faktors in K_n^*, $\nu > 3$ ist, sind daher immer alle Ecken eines Dreiecks gleichzeitig in einen Reduktionspunkt einbezogen.*

Für $\nu = 3$ sind alle Reduktionspunkte R-Punkte. Es ist hier durchaus möglich, daß bloß ein Teil der Ecken *eines*[8]) Dreiecks in einen solchen einbezogen ist. Dann verbinden mindestens ϱ_1+2 bzw. $2\,\varrho_1+2$ Kanten den R-Punkt mit der oder den nicht einbezogenen Ecken, je nachdem er 1; 2; 1 und 3; 2 und 3, bzw. 1 und 2 enthält. Die Anzahl der Kanten, welche die nicht einbezogenen mit anderen Knotenpunkten verknüpfen, ist höchstens ϱ_1+2, bzw. 1. Wäre das ganze Dreieck Teil des Reduktionspunktes, so müßten diesen auf Grund der Voraussetzungen über den Zusammenhang von K_n mindestens $\varrho \geqslant n-1 \geqslant 2\varrho_1+2$ Kanten mit

[8]) Bei mehreren, nur teilweise einbezogenen Dreiecken ist die untenstehende Ungl. selbstverständlich.

den übrigen Knotenpunkten verbinden. Unter diesen könnten eventuell die zuletzt angeführten sein. Es muß daher außer ihnen immer noch mindestens $\varrho^* \geqslant \varrho_1$ bzw. $\varrho' \geqslant 0$ Kanten geben, die vom R-Punkt zu anderen Knotenpunkten laufen. *Daher ist die Anzahl der von einem R-Punkt ausgehenden Kanten unter allen Umständen mindestens* $\varrho \geqslant 2\varrho_1 + 2 = \mu$.

Ist ein Reduktionspunkt R-Punkt, und führen nur schwarze Kanten aus ihm hinaus, so ist ihre Anzahl gerade und $\geqslant \mu = 2\varrho_1 + 2$.

Ehe wir zu den folgenden Abzählungen übergehen, erinnern wir uns nochmals an die hauptsächlichen Eigenschaften des Schlußkomplexes: Es sind die Punkte 1—5, S. 282, zu denen noch 4 neue hinzukommen, nämlich:

6. Von jedem Reduktionspunkt gehen mindestens $\varrho \geqslant 2\varrho_1 + 2$ Kanten aus. Ist er R-Punkt mit einer einzigen roten Kante, so ist die Anzahl der schwarzen gerade.
7. Alle Kanten des letzten Schrittes sind rückläufig.
8. Er enthält keine rote Kante, die ins Anfangsdreieck D_0 hineinführt.
9. Keine Ecke von D_0 ist in einen Reduktionspunkt einbezogen (Folge von Punkt 8).

Diejenigen Knotenpunkte, welche nicht reduziert sind, heißen regulär.

Nach diesen Feststellungen beginnen wir von neuem beim Punkt A (Ecke 1 des Dreiecks D_0) und verlassen dasselbe längs der aus ihm hinausführenden roten Kante k_0. Ist ihr Endpunkt regulär oder ein R-Punkt, von dem nur schwarze Kanten wegführen, so nennen wir ihn den *Punkt der ersten Front*, die Kante selbst ohne Anfangspunkt den ersten Schritt. Ist er dagegen ein R-Punkt, von welchem auch rote Kanten ausgehen, so setzt man den Weg gleichzeitig längs allen diesen fort. Im Endpunkt jeder dieser Kanten macht man Halt, wenn er regulär oder R-Punkt mit einer einzigen roten Kante ist. Dagegen setzt man den Weg fort, wenn er R-Punkt mit mehreren roten Kanten ist, und zwar gleichzeitig längs aller noch nicht durchlaufenen unter ihnen. Bezüglich der auf dieser Etappe erreichten Punkte verfährt man gleich wie vorher und so fort. Auf jedem Weg wird man schließlich in einem regulären oder in einem R-Punkt mit einer einzigen roten Kante Halt machen, vielleicht auf verschiedenen Wegen im gleichen. Alle diese Punkte und die bereits durchlaufenen R-Punkte, sofern auch schwarze Kanten von ihnen ausgehen, machen jetzt die erste Front aus, die durchlaufene Kantenmenge den ersten Schritt.

Die Punkte der ersten Front werden gleichzeitig längs aller schwarzen Kanten verlassen, die von ihnen ausgehen. Ist der Endpunkt einer Kante regulär, so macht man Halt, ist er ein S-Punkt, so verläßt man ihn längs aller schwarzen Kanten, die von ihm fortführen. So fortfahrend, erreicht man schließlich auf jedem Weg einen regulären Punkt, auf verschiedenen vielleicht denselben. Die Gesamtheit dieser Punkte, noch vermehrt um die durchlaufenen S-Punkte, von denen auch rote Kanten ausgehen, ist die zweite Front, die Gesamtheit der durchlaufenen schwarzen Kanten der zweite Schritt.

Auf dieselbe Weise erreicht man mittels des dritten Schrittes die dritte Front, mittels des vierten die vierte und so weiter, bis der ganze Schlußkomplex durchlaufen ist.

Der erste Schritt enthält keine rückläufige Kante (Punkt 8, S. 284).

Im zweiten Schritt aber können die $R_2 = \varrho_1$ schwarzen mit A verknüpften Kanten rückläufig sein, welche nicht nach den Ecken 2 und 3 führen. *R_2 wird die 2. Rücklaufzahl genannt.*

Mit den Z_1 regulären Punkten der ersten Front sind im Schlußkomplex $\nu \cdot Z_1$ rote Kanten verknüpft. Y_1 von ihnen mögen schon im ersten Schritt vorkommen. Dann ist $\nu Z_1 - Y_1 = R_3$ die 3. Rücklaufzahl. Eine beliebige, die i. Front habe Z_i reguläre Punkte. R_i sei die i. Rücklaufszahl; K_{i0} die Anzahl der rückläufigen Kanten des i. Schrittes; Y_i seiner Kanten laufen nach den Z_i regulären Punkten. Dann wird die $(i+2)$. Rücklaufzahl definiert als

$$R_{i+2} = \begin{cases} R_i - K_{i0} + \mu Z_i - Y_i & \text{für gerades } i \\ R_i - K_{i0} + \nu Z_i - Y_i & \text{für ungerades } i\,. \end{cases}$$

Dabei ist zu bemerken, daß für die 4. Rücklaufzahl noch die $\varrho_1 + 1$ schwarzen Kanten hinzuzufügen sind, welche die Ecke 3 von D_0 mit der Ecke 1 verbinden. Die Kante $\overline{12}$ kann wegen 8 (S. 284) nicht durchlaufen werden.

Diejenigen Kanten eines jeden Schrittes, in deren Endpunkt man Halt macht, heißen seine Schlußkanten.

Die erste Front enthält mindestens einen Punkt, der zweite Schritt daher mindestens $M_2 = 2\,\varrho_1 + 2$ Schlußkanten. *Es ist also*

$$M_2 > R_2\,, \text{ sogar } M_2 > R_2 + \varrho_1 + 1\,.$$

Sei i gerade. Die $(i-2)$. Front enthalte Z_{i-2} reguläre und z_{i-2} S-Punkte; die letzteren seien irgendwie numeriert.

Die kleinste überhaupt mögliche Anzahl der Schlußkanten des $(i-1)$. Schrittes ist dann

$$A_{i-1} = \nu \cdot Z_{i-2} + \sum_{\lambda=1}^{z_{i-2}} a_{i-2,\lambda}\,,$$

wobei a_{i-2}, die Anzahl der von dem λ. S-Punkt ausgehenden roten Kanten ist.

Die Anzahl der Punkte der $(i-1)$. Front ist dann mindestens

$$M_{i-1} = \frac{A_{i-1} - R_{i-1}}{\nu} \text{ bzw. } M_{i-1} = \left[\frac{A_{i-1} - R_{i-1}}{\nu}\right] + 1 \,, \tag{1}$$

je nachdem der Quotient ganz ist oder nicht. Diese Mindestzahl kommt ja dann zustande, wenn möglichst viele Punkte der Front gleichzeitig auf möglichst vielen, eben ν roten Schlußkanten erreicht werden. Die Mindestzahl der Schlußkanten des i. Schrittes ist dann

Ich setze voraus:

$$\text{I.} \quad m_i = \mu M_{i-1} \,.$$

$$\text{II.} \quad m_i > R_i$$

und behaupte, daß dann auch gilt:

$$m_{i+2} > R_{i+2} \,;$$

wobei m_{i+2} in derselben Weise aus der i. Front abgeleitet ist, wie m_i aus der $(i-2)$.

Die wirkliche Anzahl der Schlußkanten für den $(i-1)$. Schritt sei

$$K_{i-1} = K_{i-1\,0} + K^*_{i-1\,1} + K_{i-1\,1} + 2\,K_{i-1\,2} + \cdots + \nu K_{i-1\,\nu} \,, \tag{2}$$

wobei K_{i-10} die Anzahl der rückläufigen Kanten ist; $K_{i-1\sigma}$ die Anzahl der regulären Punkte der $(i-1)$. Front, in die je σ Kanten hineinführen, und $K^*_{i-1\,1}$ die Anzahl ihrer R-Punkte mit einer einzigen roten Kante. Die $(i-1)$. Front hat

$$P_{i-1} = K_{i-1\,1} + K_{i-2\,2} + \cdots + K_{i-1} + K^*_{i-1\,\nu} + z_{i-1} = Z_{i-1} + K^*_{i-1\,1} + z_{i-1}$$
Punkte. (3)

z_{i-1} ist die Anzahl der R-Punkte im $(i-1)$. Schritt, von denen schwarze und rote Kanten ausgehen. Sie seien irgendwie numeriert. $a_{i-1\,\lambda}$ bezeichnet dann die Anzahl der schwarzen Kanten, die vom λ. unter ihnen ausgehen. Wegen (2) ist

$$R_{i+1} = R_{i-1} - K_{i-1\,0} + (\nu-1) K_{i-1\,1} + (\nu-2) K_{i-0\,2} + \cdots + K_{i-1\,\nu-1} \tag{4}$$

Aus (3) folgt für die Anzahl der Schlußkanten des i. Schrittes

$$K_i \geqq \mu\,(Z_{i-1} + K^*{}_{i-11}) + \sum_{\lambda=1}^{z_{i-1}} a_{i-1\,\lambda} \,. \tag{5}$$

Diese Anzahl zerlegt sich entsprechend (2)

$$K_i = K_{i0} + K_{i1} + 2K_{i2} + \cdots + \mu K_{i\mu}\,, \tag{6}$$

und man erhält als Anzahl der Punkte der i. Front

$$P_i = K_{i1} + K_{i2} + \cdots + K_{i\mu} + z_i = Z_i + z_i\,. \tag{7}$$

Ferner ist

$$R_{i+2} = R_i - K_{i0} + (\mu - 1)K_{i1} + (\mu - 2)K_{i2} + \cdots + K_{i\mu-1}\,. \tag{8}$$

Aus (7) folgt für die minimale Anzahl der Schlußkanten des $(i+1)$. Schrittes

$$A_{i+1} = \nu \cdot Z_i + \sum_{\lambda=1}^{z_i} \alpha_{i\lambda}\,.$$

Daher ist die minimale Anzahl der Punkte der $(i+1)$. Front

$$M_{i+1} \geqslant \frac{A_{i+1} - R_{i+1}}{\nu} = Z_i + \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=1}^{z_i} a_{i\lambda} - \frac{R_{i-1}}{\nu} - (K_{i-1\,1} + \cdots + K_{i-1\,\nu} + K^*_{i-1\,1})$$
$$+ \frac{1}{\nu}(K_{i-1\,0} + K_{i-1\,1} + 2K_{i-1\,2} + \cdots + \nu K_{i-1\,\nu} + \nu K^*_{i\ 11})$$
$$\geqslant Z_i - (Z_{i-1} + K^*_{i-11}) + \frac{K_{i-1} - R_{i-1}}{\nu}\,. \quad \text{(Gl. 2)}$$

$$M_{i+1} \geqq Z_i - (Z_{i-1} + K^*_{i-1\,1}) + M_{i-1} \quad \text{(Gl. 1)}$$

$$m_{i+2} = \mu M_{i+1} \geqslant \mu Z_i - K_i + m_i \quad \text{(Gl. 5 und I)}$$

$$m_{i+2} > (\mu - 1)K_{i1} + (\mu - 2)K_{i2} + \cdots + K_{i\mu-1} - K_{i0} + R_i \quad \text{(Gl. 6, 7, II)}\,,$$

also: $$m_{i+2} > R_{i+2} \quad \text{(Gl. 8)}\,.$$

Für den 1. und 2. Schritt ist die Induktionsvoraussetzung erfüllt. Das abgeleitete Resultat steht aber im Widerspruch mit der Endlichkeit des Schlußkomplexes. Dieser Widerspruch löst sich sofort, wenn man Wechselzüge zuläßt, welche die Kante k_0 enthalten. Damit ist deren Existenz bewiesen.

Für $\nu = 3$ sind alle R_i für ungerade i Null und keine Punkte mit mehr als einer roten Kante und keine S-Punkte vorhanden. Dadurch vereinfacht sich die vorstehende Abzählung etwas, aber es wird darin nichts Wesentliches geändert.

(Eingegangen den 11. März 1938.)