

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1937-1938)

**Artikel:** Einige elementargeometrische Näherungskonstruktionen.  
**Autor:** Finsler, Paul  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-10999>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

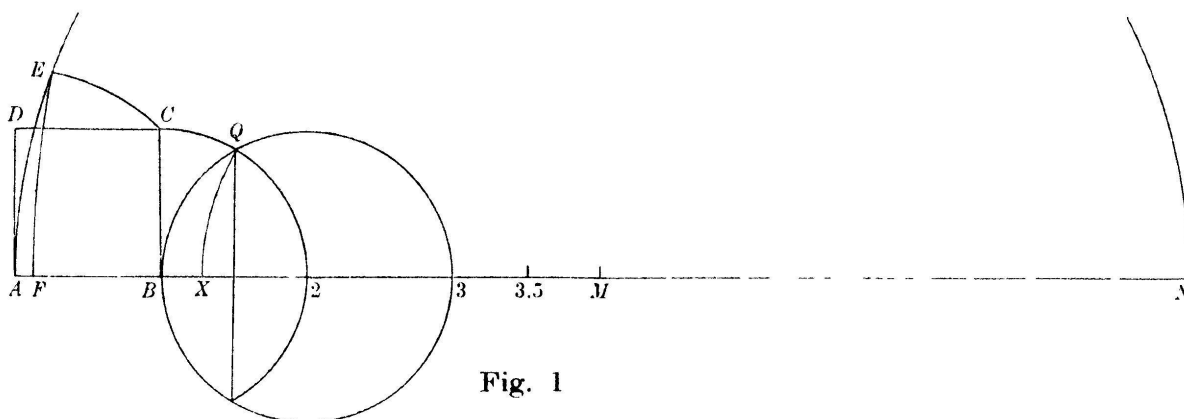
**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Einige elementargeometrische Näherungskonstruktionen

Von PAUL FINSLER, Zürich

Die folgenden Näherungskonstruktionen erscheinen bei einfacher Ausführung theoretisch oder praktisch als ausreichend genau<sup>1)</sup>. Im Anhang wird noch eine genaue Tangentenkonstruktion für Ellipsen gegeben, die für das Zeichnen der Ellipsen von Vorteil ist.

## 1. Würfelverdoppelung (Delisches Problem).



Eine wenigstens theoretisch sehr genaue und einfache Konstruktion zur Würfelverdoppelung ist die folgende:

$ABCD$  sei ein Seitenquadrat des gegebenen Würfels. Man verlängere die Kante  $AB = a$  bis  $M$  und  $N$ , so daß  $AM = MN = 4a$ . Wird dann  $ME = MA$  und  $AE = AC$  gemacht, sowie  $NF = NE$  mit  $F$  auf  $AB$ , so ist  $AF$  sehr nahe ein Zehntel der gesuchten Würfelkante von der Länge  $a\sqrt[3]{2}$ .

Der Fehler in  $AF$  ist etwa  $\frac{1}{50\,000\,000}$  von  $a$ , also der Fehler in  $10 AF$  ungefähr  $\frac{1}{5\,000\,000}$  von  $a$ . Es ist nämlich

$$AF : AB = 8 - \sqrt{62} = 0,125992126 \dots, \text{ dagegen} \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{10} \sqrt[3]{2} = 0,125992105 \dots$$

<sup>1)</sup> Man vergleiche etwa *Th. Vahlen*, Konstruktionen und Approximationen (Leipzig 1911).

Praktisch sehr leicht zu konstruieren sind die beiden Näherungswerte für  $a\sqrt[3]{2}$  (mit  $a = 1$ ):

$$3 - \sqrt{3} = 1,2679 \dots \quad \text{und} \quad (1.2)$$

$$3\frac{1}{2} - \sqrt{5} = 1,2639 \dots, \quad (1.3)$$

mit Fehlern von etwa  $\frac{1}{125}$  bzw.  $\frac{1}{250}$  von  $a$ . Subtrahiert man ihre Differenz von dem kleineren Wert, so ergibt sich das auch theoretisch gute Resultat

$$4 + \sqrt{3} - 2\sqrt{5} = 1,2599149 \dots, \quad (1.4)$$

das um etwa  $\frac{1}{160\,000}$  von  $a$  zu klein ist. In Fig. 1 ist  $\sqrt{3} = \overline{3Q}$ ,  $\sqrt{5} = \overline{3C}$ .

Weniger bequem, aber doch noch relativ einfach sind die Werte

$$\frac{3\frac{1}{3}}{\sqrt{7}} = 1,259882 \dots, \quad (1.5)$$

$$\frac{5}{7} (4 - \sqrt{5}) = 1,259951 \dots \quad \text{und} \quad (1.6)$$

$$4\frac{2}{11}\sqrt{5} - 8\frac{1}{11} = 1,25992063 \dots, \quad (1.7)$$

mit Fehlern von rund  $\frac{1}{25\,000}$ ,  $\frac{1}{33\,000}$  und  $\frac{1}{2\,400\,000}$  von  $a$ .<sup>2)</sup>

## 2. Reguläres Siebeneck.

Für die Seite

$$s_7 = 0,86776748 \dots$$

des einem Kreis vom Radius  $r = 1$  einbeschriebenen regulären Siebenecks ist als praktische Näherung die Hälfte der Seite  $s_3 = \sqrt{3}$  des regulären Dreiecks seit langem bekannt<sup>3)</sup>. Der Fehler der Näherung<sup>4)</sup> ist etwa  $\frac{1}{600}$  von  $r$ :

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,8660 \dots, \quad \delta = \frac{s_3}{2} - s_7 = -0,0017 \dots \quad (2.1)$$

<sup>2)</sup> Sehr einfach ist die Konstruktion von *E. Sorgner*, Archiv f. Math. u. Phys. (3) 25 (1917) für  $\sqrt{3} - \sqrt{2} = 1,25928 \dots$ ; komplizierter die für  $\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{10}\sqrt{3}} = 1,2599280 \dots$  ebenda; *A. Heiseler*, Acta Acad. Aboensis 8 (1935), konstruiert  $\frac{\sqrt{21}}{3} + \sqrt{3} - 2 = 1,25958 \dots$

<sup>3)</sup> Vgl. *Vahlen*, S. 298.

<sup>4)</sup>  $\delta$  soll stets die Differenz „Näherungswert — wahrer Wert“ für  $r = 1$  bedeuten.

$\frac{s_3}{2}$  ist die Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seite  $r$ . Als schärfere Näherung für  $s_7$  kann man Transversalen nehmen, die mit der Höhe passend gewählte spitze Winkel einschließen; darauf beruhen mehrere Konstruktionen<sup>5)</sup>.

Die folgende, auf dem rationalen Näherungswert<sup>6)</sup>

$$\frac{105}{121} = 1 - \left(\frac{4}{11}\right)^2 = 0,8677686\dots \quad (2.2)$$

beruhende Konstruktion scheint jedoch noch nicht bekannt zu sein:

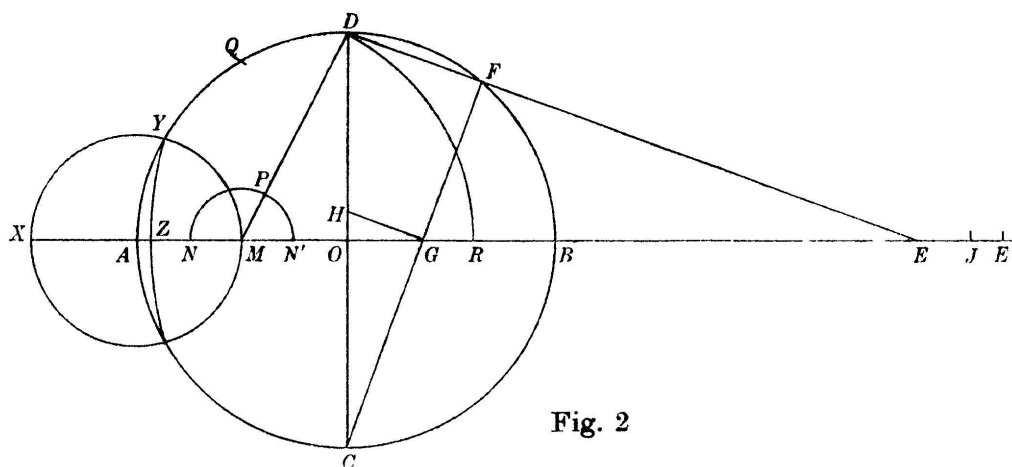


Fig. 2

$AOB$  und  $COD$  seien senkrechte Durchmesser des gegebenen Kreises.  $OB$  werde um  $BE = BN = (2 - \frac{1}{4})r$  verlängert.  $DE$  trifft den Kreis in  $F$ ,  $CF$  trifft  $OB$  in  $G$ , die durch  $G$  zu  $ED$  gezogene Parallele trifft  $OD$  in  $H$ . Dann ist  $DH$  sehr nahe gleich der gesuchten Seite  $s_7$ . Die Differenz ist

$$\delta = DH - s_7 = 0,0000011\dots,$$

also ungefähr  $\frac{1}{900\,000}$  von  $r$ .

Ist  $M$  die Mitte von  $AO$ ,  $N$  die Mitte von  $AM$ , so ist auch  $DP = DM$  —

<sup>5)</sup> *J. Plemelj*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 23 (1912), S. 309, bestimmt den genauen Winkel und gibt eine Näherung, die im Resultat mit (2.4) übereinstimmt. *T. R. Running*, The American Math. Monthly 30 (1923), S. 195, erhält sehr hohe Genauigkeiten. Weitere solche Konstruktionen bei *S. M. Drach*, Philosophical Magazine (4) 27 (1864), S. 320, *G. Wotherspoon*, The Math. Gazette 17 (1933), S. 50 und *B. Dose*, Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver. 44 (1934), S. 291.

<sup>6)</sup> Bei *H. Norton*, Philosophical Magazine (4) 27 (1864), S. 281, findet sich der Näherungswert  $\frac{105}{242}$  für  $\sin \frac{\pi}{7}$  in der Form  $\frac{3 \cdot 5}{2} : \frac{11 \cdot 11}{7}$ .

$MN$  eine einfache und brauchbare Näherung<sup>7)</sup>. Da  $DM - MA = s_{10}$  die Seite des regulären Zehneckes ist, so ist  $s_7$  nahe gleich  $s_{10} + \frac{r}{4}$ ; der Fehler ist ungefähr  $\frac{1}{4000}$  von  $r$ :

$$s_{10} + \frac{r}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{4} = 0,86803 \dots, \quad \delta = 0,00027 \dots \quad (2.3)$$

Ist  $N'$  die Mitte von  $MO$  und  $MR = MD$  mit  $R$  auf  $OB$ , so ist auch  $N'R = s_{10} + \frac{r}{4}$  nahe gleich  $s_7$ ,  $OR = s_{10}$  und  $DR = s_5$ .

Eine weitere Konstruktion ist die folgende:

Es seien wieder  $AOB$  und  $COD$  senkrechte Kreisdurchmesser. Die Verbindungslinie von  $B$  mit der Mitte von  $AC$  treffe  $OC$  in  $E$ ; die Verbindungslinie von  $A$  mit der Mitte von  $BE$  treffe  $OE$  in  $F$ . Auf  $OB$  werde  $OG = CE$ , und auf  $FD$  werde  $FH = CE$  gemacht. Dann ist  $GH$  nahe gleich  $s_7$ . Es wird:

$$GH = \frac{1}{9}\sqrt{61} = 0,867806 \dots, \quad \delta = 0,000038 \dots \quad (2.4)$$

### 3. Reguläres Neuneck.

Als einfache Näherung<sup>8)</sup> für die Seite

$$s_9 = 0,68404029 \dots$$

des regulären Neunecks kann das arithmetische Mittel aus der halben Dreiecksseite und dem halben Radius genommen werden:

---

<sup>7)</sup> Nach *R. C. Archibald*, *The American Math. Monthly* 28 (1921), S. 476, findet sich der Näherungswert  $\frac{1}{4}(2\sqrt{5} - 1)$  für  $s_7$  bei *Efremoff* (1892); ebenda weitere Angaben über Konstruktionen von *F. G. Röber* (1854), *K. Hagge* (1914) u. a. Eine Konstruktion für den Ausdruck  $\sqrt{\frac{1}{72}(61 - \sqrt{46})}$  mit  $\delta = 0,0000016 \dots$  nur mit dem Zirkel gibt *C. E. Youngman*, *The Math. Gazette* 17 (1933), S. 266. Weitere Ausdrücke für verschiedene  $s_n$ ,  $\pi$ ,  $\sqrt{\pi}$  usw. bei *V. G. Cavallaro*, *Giorn. Mat. Battaglini* 74 (1936), S. 71.

Zusatz bei der Korrektur: In *Giorn. Mat.* 66 (1928), S. 192; 68 (1930), S. 177; 72 (1934), S. 76 und der genannten Arbeit Bd. 74, die ich erst nachträglich einsehen konnte, gibt *Cavallaro* eine große Zahl von Näherungen, darunter in Bd. 66 die Werte (3.1) und (3.3) für  $s_9$ , sowie (5.2) für  $s_{13}$ ; in Band 72 den Wert (6.2) für  $\pi$  nach *C. Schor*, *Rassegna di Mat.* (1927).

<sup>8)</sup> *M. d'Ocagne* hat in *Revue générale des Sciences* 44 (1933), S. 625, eine Konstruktion unbekanntem Ursprungs mit  $\delta = 0,000039 \dots$ , und ebenda 45 (1934), S. 321 zwei von *J. Cordilha* herrührende Konstruktionen veröffentlicht mit  $\delta = 0,0000017 \dots$  und  $\delta = -0,0000000020 \dots$ . Die zu den letztern gehörigen Näherungswerte für  $s_9$  sind  $\frac{\sqrt{353}}{7} - 2$  und  $\frac{2\sqrt{658}}{75}$ . In der *Zeitschr. f. math. u. nat. Unterricht* 62 (1931), S. 364, gibt *Widder* eine Konstruktion mit  $\delta = 0,00008 \dots$ ; ebenda 68 (1937), S. 226, *Heyer* mit  $\delta = 0,0034 \dots$  und den Ausdruck  $\frac{2}{3}(\frac{1}{3} + 0,4\sqrt{3})$  mit  $\delta = 0,000062 \dots$ .

$$\frac{1}{2} \left( \frac{s_3}{2} + \frac{r}{2} \right) = 0,6830\dots, \quad \delta = -0,0010\dots \quad (3.1)$$

Größere Genauigkeit erhält man mit

$$\frac{1}{2} \left( s_7 + \frac{r}{2} \right) = 0,68388\dots, \quad \delta = -0,00016\dots, \quad (3.2)$$

wobei für  $s_7$  der obige Näherungswert (2.2) verwendet werden könnte. Besser ist es jedoch, den einfacheren Näherungswert (2.3) zu nehmen; dieser gibt das Resultat  $\frac{1}{2} NR$  in Fig. 2, d. h.

$$\frac{1}{2} \left( s_{10} + \frac{3}{4} r \right) = \frac{2\sqrt{5} + 1}{8} = 0,684017\dots, \quad \delta = -0,000023\dots \quad (3.3)$$

Wird in Fig. 2 auf der Geraden  $AB$   $BJ = BA = 2r$  und  $OE' = DJ$ , dann  $F'$  auf  $DE'$  und dem Kreis,  $G'$  auf  $CF'$  und  $OB$  angenommen, so erhält  $BG'$  den Wert

$$1 - \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,68377\dots, \quad \delta = -0,00027\dots \quad (3.4)$$

In Fig. 2 ist ferner  $BE = BN = \frac{7}{4}$ , also  $OB : BE = \frac{4}{7}$ ,  $BE : OE = \frac{7}{11}$  und  $NO : OE = \frac{3}{11}$ . Mit  $AQ = OQ = 1$  wird  $CQ = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$  und  $DQ = s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ . Damit kann man folgende Werte konstruieren:

$$\frac{11 - 12s_{12}}{7} = 1 \frac{4}{7} - 1 \frac{5}{7} \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,6840490\dots, \quad \delta = 0,0000087\dots, \quad (3.5)$$

$$4 \frac{7}{11} \sqrt{2 + \sqrt{3}} - 8 \frac{3}{11} = 0,68403948\dots, \quad \delta = -0,00000081\dots \quad (3.6)$$

#### 4. Reguläres Elfeck.

Für die Seite

$$s_{11} = 0,56346511\dots$$

des regulären Elfecks ist die Dürersche Näherung<sup>9)</sup>

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \left( \frac{3}{4} \right)^2 = 0,5625, \quad \delta = -0,00097\dots, \quad (4.1)$$

genauer und bequemer zu konstruieren als die Heronische  $\frac{14}{25}$ . Wird in Fig. 2 auf  $DN$  das Lot  $NS$  errichtet mit  $S$  auf  $OC$ , so ist  $OS$  die gesuchte Strecke<sup>10)</sup>.

<sup>9)</sup> Vgl. *Vahlen*, S. 297.

<sup>10)</sup> Noch einfacher ist die Konstruktion von *Graf Lavaulx*, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* 63 (1914); sie ergibt  $\frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{12}}{2}$  mit  $\delta = 0,0011\dots$

Eine einfache Konstruktion mit höherer Genauigkeit ist die folgende:

Man beschreibe (Fig. 2) um den Punkt  $A$  mit dem Radius  $AM = \frac{r}{2}$  einen Kreis, der die Gerade  $AOB$  noch in  $X$  und den gegebenen Kreis in  $Y$  trifft, und um den Punkt  $B$  mit  $BY$  einen Kreis, der die Strecke  $AO$  in  $Z$  trifft. Dann ist  $XZ$  nahe gleich  $s_{11}$ . Man erhält:

$$2 \frac{1}{2} - \sqrt{2^2 - \frac{1}{2^2}} = 0,563508\dots, \quad \delta = 0,000043\dots \quad (4.2)$$

Weiter lassen sich auch die folgenden Werte verwenden, wobei  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  wie oben bei (3.6) als  $CQ$ ,  $\frac{\sqrt{22}}{3}$  als  $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  als  $\frac{s_3}{2} = QM$  konstruiert werden kann:

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{5}{7}} = 0,563436\dots, \quad \delta = -0,000029\dots \quad (4.3)$$

$$\frac{5\sqrt{2} - 2}{9} = 0,563452\dots, \quad \delta = -0,000013\dots \quad (4.4)$$

$$\frac{7}{24} \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 0,5634567\dots, \quad \delta = -0,0000084\dots \quad (4.5)$$

$$\frac{\sqrt{22}}{3} - 1 = 0,5634719\dots, \quad \delta = 0,0000068\dots \quad (4.6)$$

$$\frac{4\sqrt{5} - 5}{7} = 0,5634674\dots, \quad \delta = 0,0000023\dots \quad (4.7)$$

$$3 \left( \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 7 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0,5634666\dots, \quad \delta = 0,0000015\dots \quad (4.8)$$

## 5. Reguläres Dreizehneck.

Für die Seite

$$s_{13} = 0,47863133\dots$$

des regulären Dreizehnecks ist

$$s_6 - s_{12} = 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,4824\dots, \quad \delta = 0,0038\dots \quad (5.1)$$

eine nicht sehr genaue, aber bequeme Näherung.

Eine schärfere, einfache Näherung ergibt sich mit

$$\frac{1}{2} \left( \frac{s_4}{2} + \frac{r}{4} \right) = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{2}}{4} = 0,478553\dots, \quad \delta = -0,000078\dots \quad (5.2)$$

Nur wenig genauer ist der Wert

$$\frac{4}{7} (4 - \sqrt{10}) = 0,478698\dots, \quad \delta = 0,000067\dots \quad (5.3)$$

Der Ausdruck

$$\frac{3}{5} \sqrt{\frac{7}{11}} = 0,4786344\dots, \quad \delta = 0,0000031\dots, \quad (5.4)$$

und der rationale Wert

$$\frac{56}{117} = \frac{7}{\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 1} = 0,4786325\dots, \quad \delta = 0,0000012\dots, \quad (5.5)$$

liefern größere Genauigkeit, sind aber weniger leicht zu konstruieren.

Die Werte  $\frac{2}{3} \sqrt{\frac{5}{7}}$  für  $s_{11}$  und  $\frac{3}{5} \sqrt{\frac{7}{11}}$  für  $s_{13}$  sind als numerische, mit den ersten Primzahlen gebildete Näherungen leicht zu merken.

## 6. Kreisumfang.

Für den Umfang

$$u = 2r \cdot 3,14159265\dots$$

eines Kreises vom Radius  $r$  gibt J. Cordilha (Rio de Janeiro) eine einfache und sehr genaue Konstruktion<sup>11)</sup>, die hier kurz wiedergegeben sei:

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten  $(4 - \frac{1}{4})r$  und  $\frac{1}{2}r$  wird die Hypotenuse um  $2\frac{1}{2}r$  verlängert. Die so erhaltene Strecke von der Länge

$$\frac{\sqrt{229} + 10}{4} r = 2r \cdot 3,14159324\dots \quad (6.1)$$

stimmt bis auf etwa  $\frac{6r}{5\,000\,000}$  mit der gesuchten überein.

Beim praktischen Zeichnen ist oft weniger die theoretische Genauigkeit als die Einfachheit und Güte der Konstruktion maßgebend. In diesem Sinne dürfte sich die folgende Konstruktion empfehlen:

<sup>11)</sup> Briefliche Mitteilung vom Mai 1932; in *Revue générale des Sciences* 44 (1933), S. 8, von *M. d'Ocagne* veröffentlicht. Für den halben Kreisumfang sind viele Konstruktionen bekannt, am besten wohl die von *Kochansky* mit  $\sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3} = 3,141533\dots$ . Eine einfache Konstruktion mit  $\frac{1}{3}(\sqrt{141} - \sqrt{6}) = 3,141617\dots$  gibt *A. Heiseler*<sup>2)</sup>, eine weitere mit  $2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}} + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 3,1415890\dots$  *G. G. Kerzdörfer*, *Zeitschr. f. math. u. nat. Unterricht* 69 (1938), S. 36. Schärfere Annäherungen finden sich bei *S. Ramanujan*, *Quarterly Journal of Math.* 45 (1914), *Collected Papers*, S. 34 f.

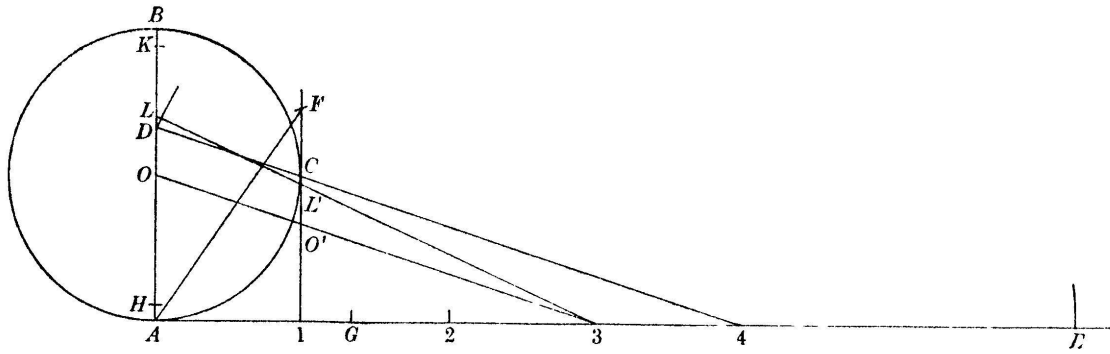


Fig. 3

Auf der in  $A$  an den Kreis gelegten Tangente wird der Radius  $r$  von  $A$  aus viermal abgetragen bis zum Punkt 4. Weiter ist  $\overline{IC} = OC = r$ , und die Gerade  $\overline{4C}$  trifft den Durchmesser  $AOB$  des Kreises in  $D$ . Auf der Tangente wird noch  $\overline{3E} = \overline{3D}$  abgetragen; dann ist  $AE$  nahe gleich dem Umfang des Kreises.

$AE$  ist hier also die Summe der größeren Kathete und der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $3r$  und  $\frac{4}{3}r$ . Es wird

$$AE = \left(3 + \frac{1}{3}\sqrt{97}\right)r = 2r \cdot 3,14148 \dots ; \quad (6.2)$$

der Fehler ist etwa  $\frac{6r}{26\,000}$ . Der Näherungswert für  $\pi$  genügt dabei der Gleichung

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

## 7. Kreisinhalt.

Ist der Kreisumfang als Strecke bekannt, so läßt sich auch die Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrats von der Länge

$$a = r \cdot 1,77245385 \dots$$

konstruieren. So schneidet der Halbkreis über der ersten Hälfte von  $AE$  (Fig. 3) die Verlängerung von  $\overline{IC}$  in  $F$  derart, daß  $AF$  nahe die gesuchte Quadratseite darstellt. Es ist

$$AF = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{97}}{6}} r = r \cdot 1,772421 \dots , \quad (7.1)$$

der Fehler nahe  $\frac{2r}{60\,000}$ .

Einfacher, wenn auch weniger genau, ist es, auf  $AE$  die Strecke  $AG = AD$  abzutragen, und die Strecke  $GD$  von  $B$  aus gegen  $A$  und von  $A$  aus gegen  $B$  bis  $H$  und  $K$ . Dann gibt die Strecke

$$HK = \left( \frac{8}{3} \sqrt{2} - 2 \right) r = r \cdot 1,7712\dots \quad (7.2)$$

die Quadratseite mit einem Fehler von etwa  $\frac{2r}{1600}$ , was noch als ausreichend betrachtet werden kann.

Etwas genauer ist die folgende Konstruktion:

Auf  $AB$  (Fig. 3) sei  $AL = AC = r\sqrt{2}$  abgetragen;  $1C$  werde von  $\overline{3L}$  in  $L'$ , von  $\overline{3O}$  in  $O'$  getroffen. Dann ist  $\overline{1O'} + L'L$  die Quadratseite mit einer Länge von

$$\frac{2 + \sqrt{11}}{3} r = r \cdot 1,77221\dots, \quad (7.3)$$

also einem Fehler von etwa  $\frac{2r}{8000}$ .

Eine Näherungskonstruktion für die vier Quadratecken mit nur einer Zirkelöffnung fand A. Kägi (Thayingen)<sup>12)</sup>:

In den Kreis vom Radius  $r$  wird mit Kreisen vom selben Radius, die durch den Mittelpunkt gehen, ein regelmäßiger Zwölferstern gezeichnet. Zwei senkrechte Symmetrieachsen werden von diesen Kreisen noch im Abstand  $s_3 = r\sqrt{3}$  vom Mittelpunkt getroffen. Die Ecken des Quadrats haben von diesen vier Punkten und den ihnen auf der andern Seite zunächst liegenden inneren Schnittpunkten des Zwölfersterns je den Abstand  $r$ . Die Seite des Quadrats von der Länge

$$\sqrt{2 + \sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{13}(84\sqrt{3} - 141)}} r = r \cdot 1,77319\dots \quad (7.4)$$

wird um etwa  $\frac{2r}{2700}$  zu groß.

## 8. Winkeldreiteilung.

Über die Dreiteilung des Winkels hat M. d'Ocagne eine eingehende Untersuchung angestellt<sup>13)</sup>. Die folgenden Bemerkungen mögen noch einige Zusammenhänge beleuchten.

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Konstruktionen ist die Winkelteilung noch von einem Parameter abhängig, nämlich von der

<sup>12)</sup> Briefliche Mitteilung vom November 1934.

<sup>13)</sup> Etude rationnelle du problème de la trisection de l'angle. L'Enseignement Mathématique 33 (1934), S. 49.

Größe des gegebenen Winkels  $\varphi$ . Bei der Beurteilung der Einfachheit einer solchen Konstruktion hat man zwischen der von dem Winkel  $\varphi$  unabhängigen *Vorbereitung* und der von  $\varphi$  abhängigen *Ausführung* der Konstruktion zu unterscheiden. Wenn es sich nicht nur um die Teilung eines einzigen, sondern beliebig vieler Winkel handelt, so ist besonders auf die Einfachheit der Ausführung zu achten, da die Vorbereitung nur einmal durchgeführt zu werden braucht.

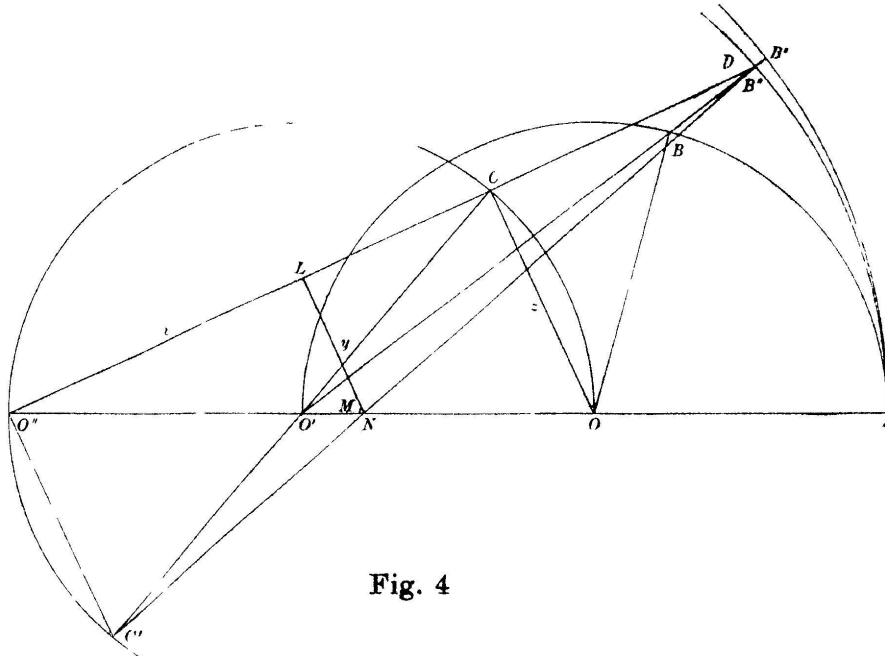


Fig. 4

Um den dritten Teil eines gegebenen Winkels  $\varphi = \sphericalangle BOA$  zu finden, kann man, da  $r \cdot \varphi = 3r \cdot \frac{\varphi}{3}$  ist, einen Schenkel des Winkels verdreifachen und die Länge des zugehörigen Bogens, oder als erste Näherung für kleine Winkel auch den Bogen selbst beibehalten. Ist also  $OB = OA = r$ , so verlängere man den Schenkel  $OA$  über den Scheitel  $O$  hinaus bis  $O'$  und  $O''$ , so daß  $O''O' = O'O = OA$  wird, und nehme als Näherung den Winkel  $BO''A$ .  $O''$  ist der „approximative Trisektionspunkt“<sup>14)</sup>.

Wird der Näherungswinkel jeweils mit  $\psi$ , der Fehler mit  $\delta$  bezeichnet, so wird

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi}{2 + \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{3 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \delta = -\frac{1}{3} \left( \frac{\varphi}{3} \right)^3 + \dots; \quad (8.1)$$

$$\varphi = 90^\circ \quad \delta = -3^\circ 26' 6''; \quad \varphi = 45^\circ \quad \delta = -21' 40''; \quad \varphi = 22\frac{1}{2}^\circ \quad \delta = -2' 36''.$$

Eine zweite Näherung erhält man durch „Strecken“ des Bogens  $AB$ . Die Gerade  $O'B$  trifft den durch  $A$  gehenden Kreis mit Mittelpunkt  $O'$

<sup>14)</sup> Vahlen, S. 82.

in  $B'$  so, daß der Bogen  $AB' = r\varphi$  wird. Der Winkel  $B'O''A$  ergibt dieselbe Näherung für  $\frac{\varphi}{3}$ , wie die letzte der von M. d'Ocagne<sup>15)</sup> angegebenen Konstruktionen<sup>15)</sup>. Es wird hier

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{1 + 2 \cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{4}}, \quad \delta = \frac{1}{24} \left( \frac{\varphi}{3} \right)^3 + \dots; \quad (8.2)$$

$$\varphi = 90^\circ \quad \delta = 21'40''; \quad \varphi = 45^\circ \quad \delta = 2'36''; \quad \varphi = 22\frac{1}{2}^\circ \quad \delta = 19''.$$

Man kann geometrisch oder durch Rechnung einsehen, daß der Fehler hier bis auf das Vorzeichen gleich groß ist, wie beim halben Winkel in (8.1), nämlich

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4 \sin \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha + \cos 2\alpha}, \quad \text{mit } \alpha = -\frac{\varphi}{3} \text{ in (8.1) und } \alpha = \frac{\varphi}{6} \text{ in (8.2).}$$

Auf dem Halbkreis über  $O''O$  liege der Punkt  $C$  so, daß der Winkel  $CO''O$  genau gleich  $\frac{\varphi}{3}$ , also der Winkel  $CO'O$  gleich  $\frac{2\varphi}{3}$  wird. Verlängert man  $O''C$  um  $CD = OA$ , so ist  $\sphericalangle CO'D = \frac{\varphi}{6}$ , also  $\sphericalangle DO'A = \frac{\varphi}{2}$ , und  $D$  liegt folglich auf  $O'B'$ . Ändert sich  $\varphi$ , so beschreibt  $D$  eine Kreis-konchoide (Pascalsche Schnecke), mit deren Hilfe also die folgende exakte Dreiteilung möglich ist:

<sup>15)</sup> S. u. S. 257, sowie M. d'Ocagne, Comptes Rendues 200 (1935), S. 31. Ein Fehler vom doppelten Betrag ergibt sich bei einer Konstruktion, die sich nach M. Simon, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (Leipzig 1906), S. 84, bei E. Cominotto (1895) findet und anscheinend schon Huygens bekannt war: „Man verlängert den halbierenden Radius um sich selbst und verbindet den Endpunkt mit dem diametralen Punkt des einen Schenkels, so schneidet diese Gerade vom andern Schenkel aus nahezu  $\frac{1}{3}$  ab.“ Der Fehler beträgt jedoch bei  $\varphi = 60^\circ$  nur  $-12\frac{1}{2}'$ , nicht wie dort angegeben über  $2^\circ$ . Die konstruierte Gerade bildet mit dem ersten Schenkel nahe den Winkel  $\frac{\varphi}{3}$ , mit demselben Fehler wie bei (8.2). Vgl. auch F. Vogel, Zeitschr. f. math. u. nat. Unterricht 62 (1931), S. 145, wo auch für andere Konstruktionen ausführlichere Fehlertabellen gegeben sind.

Während das Strecken des Bogens  $AB$  in den Bogen  $AB'$  vom Radius  $2r$  exakt durchführbar ist, kann das weitere Strecken in einen Bogen vom Radius  $3r$  genähert ausgeführt werden. Dies führt zu der von A. Heiseler<sup>2)</sup> bearbeiteten Konstruktion von K. Lindqvist.

Eine weniger einfache Konstruktion von Frau Wüster veröffentlicht A. Meese, Zeitschr. f. math. u. nat. Unterricht 66 (1935), S. 169. Die im Jahrbuch über d. Fortschr. d. Math. 62 (1936), S. 697 besprochene Arbeit von J. Tandberg, Elementär mat. Fys. Kemi 19, S. 145, ist mir nicht zugänglich.

Man projiziere  $B$  von  $O'$  aus auf die Konchoide nach  $D$ , dann ist  $\sphericalangle DO''A = \frac{1}{3} \sphericalangle BOA$ .

Es ist zu bemerken, daß bei dieser Konstruktion für kleinere Winkel gerade der Teil der Konchoide verwendet wird, welcher in der Nähe des äußeren Scheitels gelegen und dort sehr nahe kreisförmig ist. Wenn man diesen Teil durch passende Kreisbogen ersetzt, so erhält man gute Näherungskonstruktionen.

Man wird dabei Kreise wählen, welche die Kurve in  $A$  berühren, deren Mittelpunkt  $M$  also auf  $O''A$  zu liegen kommt. Wählt man  $M$  in  $O'$ , so erhält man wieder die obige zweite Näherung. Man kann aber  $M$  auch so wählen, daß der Fehler der Näherung für  $\varphi = 90^\circ$  verschwindet. Der Kreis geht dann durch den Schnitt der in  $O''$  unter dem Winkel  $30^\circ$  und in  $O'$  unter dem Winkel  $45^\circ$  angetragenen Geraden. Dies ergibt die von O. Perron<sup>16)</sup> und von M. d'Ocagne<sup>13)</sup> besprochene „Konstruktion von Kopf“, deren hohe Genauigkeit somit verständlich ist.

Wünscht man in ähnlicher Weise für kleine Winkel die bestmögliche Näherung zu erhalten, so wird man die „interpolierende“ Approximation durch eine „oskulierende“ ersetzen, also den Punkt  $M$  in den Krümmungsmittelpunkt des Punktes  $A$  der Konchoide legen.

Dieser Krümmungsmittelpunkt  $M$  kann so gefunden werden: Bei der Änderung von  $\varphi$  befindet sich das jeweilige Drehzentrum für den rechten Winkel  $O''CO$  im Spiegelbild  $C'$  von  $C$  bezüglich  $O'$ ;  $C'D$  ist also Normale der Kurve in  $D$ . Der Schnitt von  $C'D$  mit  $O''O$  sei mit  $N$ , der Fußpunkt des von  $N$  auf  $O''C$  gefällten Lotes mit  $L$ ,  $O''L$  mit  $x$ ,  $LN$  mit  $y$  und  $O''C' = CO$  mit  $z$  bezeichnet. Der gesuchte Krümmungsmittelpunkt  $M$  ergibt sich als Grenzlage von  $N$  und daher auch als Grenzlage von  $L$ , wenn  $\varphi$  gegen Null strebt. Nun ist

$$\frac{x}{O''C} = \frac{y}{z} \text{ und } \frac{x}{O''D} = \frac{z - y}{z}, \text{ also } x = \frac{O''C \cdot O''D}{O''C + O''D},$$

und dies strebt gegen  $\frac{6}{5}r$ .  $M$  teilt also die Strecke  $O'O$  im Verhältnis  $1 : 4$ , und es ergibt sich folgende Konstruktion:

Auf einer Geraden seien in Abständen von je 5 Einheiten die Punkte  $O''$ ,  $O'$ ,  $O$  und  $A$  markiert, während  $O'M$  gleich einer, also  $MO$  gleich 4 Einheiten gemacht sei. Man zeichne um  $O$  als Mittelpunkt den Kreis  $ABO'$ , und um  $M$  als Mittelpunkt den Kreis  $AB''$ . Liegt dann  $B''$  auf der Geraden  $O'B$ , so ist der Winkel  $B''O''A = \psi$  sehr nahe ein Drittel des Winkels  $BOA$ . Es wird

---

<sup>16)</sup> Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissensch. (1933), S. 439.

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\left(15 - \sqrt{81 + 80 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}\right) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{9 - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \quad , \quad \delta = \frac{1}{108} \left(\frac{\varphi}{3}\right)^5 + \dots \quad (8.3)$$

Die folgende Tabelle zeigt den Fehler, der für kleine Winkel sehr gering ist und auch bei  $\varphi = 60^\circ$  noch unter dem der Kopfschen Konstruktion bleibt. Dieser letztere Fehler ist (nach Perron<sup>16)</sup>) zum Vergleich mit angeben.

Winkel $\varphi$ :	$0^\circ$	$12^\circ$	$24^\circ$	$36^\circ$	$48^\circ$	$60^\circ$
Fehler $\delta$ :	$0''$	$0,0032''$	$0,10''$	$0,77''$	$3,28''$	$10,07''$
bei Kopf:	$0''$	$0,18''$	$1,38''$	$4,23''$	$8,57''$	$13,08''$
Winkel $\varphi$ :	$72^\circ$	$84^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	$22\frac{1}{2}^\circ$	
Fehler $\delta$ :	$25,25''$	$55,07''$	$78,16''$	$2,37''$	$0,074''$	
bei Kopf:	$14,76''$	$8,47''$	$0''$			

Um auch für größere Winkel eine theoretisch sehr genaue Konstruktion zu erhalten, kann man berücksichtigen, daß sich jedes ganze Vielfache von  $45^\circ$  exakt und einfach dritteln läßt, da der Winkel von  $15^\circ$  als Differenz von  $60^\circ - 45^\circ$  leicht konstruierbar ist; man braucht dann die obige Konstruktion nur noch auf die Differenz zwischen dem gegebenen Winkel  $\varphi$  und dem nächstgelegenen ganzzahligen Vielfachen von  $45^\circ$ , also nur auf einen Winkel von höchstens  $22\frac{1}{2}^\circ$  anzuwenden. Ist also

$$\varphi = n \cdot 45^\circ \pm \chi \quad , \quad 0 \leq \chi \leq 22\frac{1}{2}^\circ \quad , \quad \text{so wird}$$

$$\frac{\varphi}{3} = n \cdot 15^\circ \pm \frac{\chi}{3}$$

gesetzt. Damit hat man eine einfache Konstruktion für die Dreiteilung, bei welcher der theoretische Fehler für beliebig große Winkel stets unterhalb von  $0,075''$  verbleibt.

Weitere Verschärfungen ergeben sich unten bei der  $n$ -Teilung.

## 9. Winkel- $n$ -Teilung.

Bei der  $n$ -Teilung<sup>17)</sup> eines gegebenen Winkels, bei der übrigens  $n$  keine ganze Zahl zu sein braucht, kann man in analoger Weise vorgehen, wie bei der Dreiteilung.

---

<sup>17)</sup> Einen Näherungsausdruck für  $\cos \frac{\varphi}{n}$  gibt Laguerre, Comptes Rendues 90 (1880), Oeuvres I, S. 106.

Es kann  $n > 1$  vorausgesetzt werden. Ist nämlich  $\nu < 1$  und der Winkel  $\frac{\varphi}{\nu}$  zu konstruieren, so setze man  $\frac{1}{\nu} = m + \frac{1}{n}$ , wobei  $m$  eine ganze Zahl und  $n > 1$  sein soll, und konstruiere  $\frac{\varphi}{\nu} = m\varphi + \frac{\varphi}{n}$ .

Wegen  $r\varphi = nr \cdot \frac{\varphi}{n}$  ergibt sich eine erste Näherung für den Winkel  $\frac{\varphi}{n}$  bei kleinen Winkeln, wenn man den Bogen  $r\varphi$  beibehält und den einen Schenkel ver- $n$ -facht. Ist also  $OB = OA = r$  und  $\bar{O}A = nr$ , wobei  $O$  auf  $\bar{O}A$  liegen soll, so gibt der Winkel  $B\bar{O}A = \psi$  die Näherung für den  $n$ -ten Teil des Winkels  $BOA$ . Es wird

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi}{n - 1 + \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{n - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}, \quad \delta = - \frac{(n-1)(n-2)}{6} \left(\frac{\varphi}{n}\right)^3 + \dots \quad (9.1)$$

Eine bessere Näherung erhält man für  $n > 1,6$  wieder durch passendes „Strecken“ des Bogens  $AB$ . Beschreibt man mit dem Durchmesser  $O'OA$  des Kreises vom Radius  $r$  um  $O'$  als Mittelpunkt einen Kreis vom Radius  $2r$  und projiziert den Punkt  $B$  von  $O'$  aus auf den zweiten Kreis nach  $B'$ , so hat der Bogen  $AB'$  wieder die Länge  $r\varphi$ . Von diesem Bogen ausgehend erhält man in gleicher Weise auf einem Kreis vom Radius  $4r$  den „zweimal gestreckten“ Bogen  $AB''$ , und durch  $k$ -maliges Wiederholen auf einem Kreis vom Radius  $2^k r$  den „ $k$ -mal gestreckten“ Bogen  $AB^{(k)}$  von derselben Länge  $r\varphi$ . Dabei wird  $k$  nach (9.2) am besten so gewählt, daß

$$1,6 \cdot 2^{k-1} \leq n \leq 1,6 \cdot 2^k,$$

daß also  $2^k$  nahe bei  $n$  und der letzte Mittelpunkt nahe bei  $\bar{O}$  gelegen ist. Der Winkel  $B^{(k)}\bar{O}A = \psi$  liefert dann die gesuchte Näherung für den Winkel  $\frac{\varphi}{n}$ .

Das Resultat ist genau, wenn  $n = 2^k$  ist; in diesem Fall liefert aber auch schon  $(k - 1)$ -malige Wiederholung eine genaue Lösung; der letzte Kreis ist dann überflüssig.

Allgemein wird

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2^k \sin \frac{\varphi}{2^k}}{n - 2^k \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2^k}\right)} = \frac{2^k \sin \frac{\varphi}{2^k}}{n - 2^{k+1} \sin^2 \frac{\varphi}{2^{k+1}}}, \quad \delta = - \frac{(n - 2^k)(n - 2^{k+1})}{6 \cdot 2^{2k}} \left(\frac{\varphi}{n}\right)^3 + \dots \quad (9.2)$$

Hieraus folgt, daß der Betrag des Fehlers für kleine Winkel bei festem  $n$  am kleinsten wird, wenn  $k$  der oben angegebenen Bedingung gemäß gewählt wird.

So erhält man z. B. bei der Fünfteilung mit zweimaliger Streckung ( $n = 5, k = 2$ ) den Fehler  $\delta = \frac{1}{32} \left(\frac{\varphi}{5}\right)^3 + \dots$ , während sich für  $n = 5, k = 1$   $\delta = -\frac{1}{8} \left(\frac{\varphi}{5}\right)^3 + \dots$  ergibt.  $k = 0$  entspricht der Konstruktion (9.1); für  $n = 5, k = 0$  wird  $\delta = -2 \left(\frac{\varphi}{5}\right)^3 + \dots$ .

Es ergibt sich für

	$\varphi =$	$180^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	$22\frac{1}{2}^\circ$
$n = 5, k = 0:$	$\delta =$	$-36^\circ 0' 0''$	$-3^\circ 57' 50''$	$-27' 25''$	$-3' 21''$
$n = 5, k = 1:$	$\delta =$	$-2^\circ 18' 36''$	$-14' 9''$	$-1' 41''$	$-13''$
$n = 5, k = 2:$	$\delta =$	$27' 25''$	$3' 21''$	$25''$	$3,1''$

Der genaue Wert des Fehlers in (9.2) ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{m \sin (n - m) \alpha - (n - m) \sin m \alpha}{m \cos (n - m) \alpha + (n - m) \cos m \alpha}, \quad \alpha = \frac{\varphi}{nm}, \quad m = 2^k.$$

Es folgt, daß der Fehler, wenn  $n$  die Form  $2^\kappa + 1$  besitzt ( $\kappa = 1, 2, 3 \dots$ ), für  $k = \kappa$  den entgegengesetzten Wert hat, wie für  $k = 0$  bei einem  $2^\kappa$ -mal kleineren Winkel. Man kann dies auch geometrisch einsehen.

Dieselbe Näherung wie bei (9.2) kann man auch in etwas anderer Weise erhalten. Bestimmt man auf dem Durchmesser  $O'OA$  des Kreises vom Radius  $r$  den Punkt  $\tilde{O}$  so, daß  $\tilde{OA} = \frac{nr}{2^k}$  wird, und auf dem Bogen  $AB$  des Kreises durch  $k$ -maliges Halbieren den Punkt  $B_k$  so, daß  $\sphericalangle B_k OA = \frac{\varphi}{2^k}$ , so gibt der Winkel  $B_k \tilde{O} A = \psi$  die gewünschte Näherung für den Winkel  $\frac{\varphi}{n}$ . Die Formeln (9.2) gelten auch für diese Konstruktion. Für  $n = 3, k = 1$  erhält man die oben bei (8.2) erwähnte Konstruktion von M. d'Ocagne.

Um eine Annäherung von höherer Ordnung zu erhalten, denke man sich zunächst an  $\overline{OA}$  bzw.  $\tilde{OA}$  den genauen Winkel  $\frac{\varphi}{n}$  angetragen und den freien Schenkel desselben mit dem freien Schenkel des wie oben konstruierten Winkels  $\frac{\varphi}{2^k}$  zum Schnitt gebracht. Ändert sich  $\varphi$ , so beschreibt

der Schnittpunkt  $D$  eine Kurve, welche in der Nähe ihres Scheitels  $A$  nahe kreisförmig verläuft und deshalb mit guter Näherung durch ihren Krümmungskreis in  $A$  ersetzt werden kann.

Den zugehörigen Krümmungsradius  $\rho$  kann man so bestimmen: Es werde  $2^k = m$  gesetzt, und  $0:0$ ,  $0:m$ ,  $0:n$  und  $\varepsilon:\eta$  seien rechtwinklige Koordinaten der Punkte  $A, O, \bar{O}$  und  $D$ , wobei also  $\sphericalangle DOA = \frac{\varphi}{m}$  und

$\sphericalangle D\bar{O}A = \frac{\varphi}{n}$  sein soll. Aus  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{m} = \frac{\varepsilon}{m-\eta}$  und  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{n} = \frac{\varepsilon}{n-\eta}$  ergibt

sich  $\frac{\varphi}{m} = \frac{\varepsilon}{m} + \frac{\varepsilon\eta}{m^2} - \frac{\varepsilon^3}{3m^3} + \dots$  und  $\frac{\varphi}{n} = \frac{\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon\eta}{n^2} - \frac{\varepsilon^3}{3n^3} + \dots$ ,

und daraus  $\frac{n}{m} = \frac{n}{m} \left[ 1 + \frac{n-m}{nm} \left( \eta - \varepsilon^2 \frac{n+m}{3nm} \right) + \dots \right]$ , also

$\eta = \varepsilon^2 \frac{n+m}{3nm} + \dots$ . Der Krümmungsradius ist somit

$$\rho = \lim \frac{\varepsilon^2}{2\eta} = \frac{3nm}{2(n+m)}.$$

Wenn nun der Krümmungskreis in  $A$  die Schenkel des Winkels  $\frac{\varphi}{2^k}$  in  $A$  und  $\bar{B}$  trifft, so ist  $\psi = \sphericalangle \bar{B}OA$  der gesuchte Näherungswinkel.

Es wird mit  $2^k = m$ :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{n(n+m) - (n-m) \sqrt{9n^2 + 4(n+m)(2n-m)} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{m}}{n^2(2m-n) - (n+m)(n-m)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{m}} \cdot \frac{m}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{m}, \quad (9.3)$$

$$\delta = \frac{(n^2 - m^2)(2n-m)(2m-n)}{135m^4} \left( \frac{\varphi}{n} \right)^5 + \dots$$

Bei festem  $n$  wird der Fehler  $\delta$  für kleine Winkel absolut am kleinsten, wenn  $k$  so gewählt wird, daß

$$\frac{-3 + \sqrt{281}}{17} 2^{k-1} \leq n \leq \frac{-3 + \sqrt{281}}{17} 2^k \quad \text{wird, oder genähert}$$

$$0,81 \cdot 2^{k-1} \leq n \leq 0,81 \cdot 2^k.$$

Um theoretisch möglichst geringe Fehler zu erhalten, muß man hier also  $k$  im allgemeinen um 1 größer wählen als bei (9.2).

Es ergibt sich so die folgende sehr genaue Konstruktion für die  $n$ -Teilung eines beliebigen Winkels:

Man bestimme die ganze Zahl  $k$  so, daß  $0,81 \cdot 2^{k-1} \leq n \leq 0,81 \cdot 2^k$  wird, und setze  $2^k = m$ . Auf einer Geraden werde mit beliebiger Einheit  $OA = m$ ,  $\bar{O}A = n$  und  $MA = \frac{3mn}{2(m+n)}$  abgetragen. Ist dann  $\sphericalangle \bar{BOA}$  mit  $M\bar{B} = MA$  der durch  $k$ -maliges Halbieren (oder  $k$ -maliges „Strecken“) gefundene Winkel  $\frac{\varphi}{m}$ , so ist der Winkel  $\bar{BOA} = \psi$  sehr nahe gleich  $\frac{\varphi}{n}$ . Für  $\psi$  und den Fehler  $\delta$  gelten die Formeln (9.3).

Speziell ergeben sich für die Dreiteilung die Werte  $n = 3$ ,  $k = 2$ ,  $m = 4$ , also  $OA = 4$ ,  $\bar{O}A = 3$ ,  $MA = 2\frac{1}{7}$ . Damit wird

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\left(21 + \sqrt{81 + 56 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}}\right) \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}}{45 - 7 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}}, \quad \delta = -\frac{7}{3456} \left(\frac{\varphi}{3}\right)^5 + \dots; \quad (9.3.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi = 180^\circ & \quad \delta = -9' 17''; & \varphi = 90^\circ & \quad \delta = -16,7''; & \varphi = 45^\circ & \quad \delta = -0,52''; \\ \varphi = 22\frac{1}{2}^\circ & \quad \delta = -0,016''. \end{aligned}$$

Der Betrag des Fehlers ist etwa  $4\frac{1}{2}$ -mal kleiner als bei der Konstruktion (8.3), die dem Wert  $k = 1$  entspricht. Durch die am Schluß von 8 angegebene Hilfskonstruktion kann jetzt erreicht werden, daß er für beliebige Winkel unterhalb von  $0,02''$  verbleibt.

Bei der Fünfteilung würde  $k = 3$  die genauesten Werte liefern. Mit  $k = 2$  erhält man einen etwa 3mal größeren Fehler, aber einfachere Zahlenwerte für die Konstruktion, was wohl meist vorzuziehen ist. Es wird mit  $n = 5$ ,  $k = 2$ ,  $m = 4$ :  $OA = 4$ ,  $\bar{O}A = 5$ ,  $MA = 3\frac{1}{3}$  und

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\left(15 - \sqrt{25 + 24 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}}\right) \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{4}}{25 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{4}}, \quad \delta = \frac{3}{640} \left(\frac{\varphi}{5}\right)^5 + \dots; \quad (9.3.5)$$

$$\begin{aligned} \varphi = 180^\circ & \quad \delta = 1' 39''; & \varphi = 90^\circ & \quad \delta = 2,99''; & \varphi = 45^\circ & \quad \delta = 0,093''; \\ \varphi = 22\frac{1}{2}^\circ & \quad \delta = 0,0029''. \end{aligned}$$

Bei  $\varphi = 180^\circ$  liefert die Konstruktion für  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{5}$  den rationalen Näherungswert  $\operatorname{tg} \psi = \frac{8}{11}$ .

Da die Seite des regulären Zehnecks leicht konstruierbar ist, so läßt sich auch der Winkel von  $45^\circ - 36^\circ = 9^\circ$  finden, also der Winkel von  $45^\circ$  genau fünfteilen. Wendet man dann die Näherungskonstruktion

wieder nur auf die Differenz zwischen dem gegebenen Winkel  $\varphi$  und dem nächstgelegenen ganzzahligen Vielfachen von  $45^\circ$  an, so hat man eine Konstruktion, bei welcher der theoretische Fehler von  $\frac{\varphi}{5}$  für beliebig große Winkel stets unterhalb von  $0,003''$  verbleibt.

Bei der *Siebenteilung* ist wieder der Wert  $k = 3$  dem nur wenig genaueren  $k = 4$  vorzuziehen. Es wird mit  $n = 7, k = 3, m = 8 : OA = 8, \bar{OA} = 7, MA = 5\frac{3}{5}$  und

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\left(35 + \sqrt{49 + 40 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{8}}\right) \cdot 4 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{8}}{147 - 5 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{8}}, \quad \delta = -\frac{3}{2048} \left(\frac{\varphi}{7}\right)^5 + \dots; \quad (9.3.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi = 180^\circ \quad \delta = -5,58''; \quad \varphi = 90^\circ \quad \delta = -0,17''; \quad \varphi = 45^\circ \quad \delta = -0,0054''; \\ \varphi = 22\frac{1}{2}^\circ \quad \delta = -0,00017''. \end{aligned}$$

Es mag noch interessieren, in welcher Weise die Größe des relativen Fehlers bei festem  $k$  von der Zahl  $n$  abhängig ist. Setzt man  $\frac{n}{2^k} = \nu$  und nimmt nur das Glied niederster Ordnung in  $\varphi$ , wobei  $\left(\frac{\varphi}{n}\right)^5$  durch  $\psi^5$  ersetzt werden kann, so ist der Ausdruck  $\delta = \frac{(\nu^2 - 1)(2\nu - 1)(2 - \nu)}{135} \psi^5$  als Funktion von  $\nu$  zu untersuchen. Er besitzt die vier Nullstellen  $\nu = -1, \frac{1}{2}, 1$  und  $2$ , und drei Extreme, nämlich bei

$$\nu_1 = -0,511727 \dots, \quad \nu_2 = 0,743071 \dots \quad \text{und} \quad \nu_3 = 1,643656 \dots,$$

mit den Werten

$$\delta_1 = 0,0277887 \dots \psi^5, \quad \delta_2 = -0,0020271 \dots \psi^5 \quad \text{und} \quad \delta_3 = 0,0102735 \dots \psi^5.$$

Die oben gegebene Bedingung für  $k$  liefert das Intervall  $0,405 \dots \leq \nu \leq 0,81 \dots$ . Durch passende Wahl von  $k$  kann also für jedes  $n > 1$  erreicht werden, daß  $\nu$  in dieses Intervall fällt und so der Fehler möglichst gering wird.

Man erkennt, daß in bezug auf die Größe des relativen Fehlers die Verhältnisse bei  $n = 3$ , also für die Dreiteilung, nahezu am ungünstigsten liegen. Mit  $n = 3, k = 2$  erhält man  $\nu = 0,75$  und  $\delta = -0,0020255 \dots \psi^5$ , was sich von dem Extremwert  $\delta_2$  kaum unterscheidet. Auch bei  $n = 3, k = 1$  kommt man mit  $\nu = 1,5$  und  $\delta = 0,00926 \dots \psi^5$  dem Extremwert  $\delta_3$  ziemlich nahe.

Durch eine einfache Hilfskonstruktion kann die theoretische Genauig-

keit noch rasch gesteigert werden. Da der Fehler in (9.3) von der Größenordnung  $\varphi^5$  ist, so braucht man die Konstruktion nur auf den halben Winkel anzuwenden und dann das Resultat wieder zu verdoppeln, um den Fehler auf etwa den 16. Teil zu reduzieren. Wird analog zuerst  $q$ -mal halbiert und zum Schluß wieder  $q$ -mal verdoppelt, so sinkt der Fehler rund auf den  $16^q$ -ten Teil. Man erhält so die Werte:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2^q} = \frac{\left( n(n+2^k) - (n-2^k) \sqrt{9n^2 + 4(n+2^k)(2n-2^k)} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2^{k+q}} \right) 2^{k-1} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2^{k+q}}}{n^2 (2^{k+1} - n) - (n+2^k)(n-2^k)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2^{k+q}}}, \quad (9.4)$$

$$\delta = \frac{(n^2 - 2^{2k})(2n - 2^k)(2^{k+1} - n)}{135 \cdot 2^4 (k+q)} \left( \frac{\varphi}{n} \right)^5 + \dots, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

Dabei kann  $q$  als ganze Zahl beliebig groß genommen werden.

Es ist einleuchtend, daß die angegebenen hohen Genauigkeiten (außer etwa bei sehr großen Winkeln) beim praktischen Zeichnen nicht voll ausgenutzt werden können. Insbesondere ist hier die zuletzt genannte Hilfskonstruktion nicht zu empfehlen, da bei dem schließlichen Vervielfachen des Winkels auch die unvermeidlichen Zeichenfehler vervielfacht werden. Bei numerischer Berechnung mit hinreichend vielen Stellen lassen sich aber die Fehler nachprüfen, und rein theoretisch erhält man in (9.4) bei passendem  $k$  und wachsendem  $q$  eine Approximation der „nicht konstruierbaren“ Winkel durch „konstruierbare“, bei welcher der Betrag des Fehlers wegen  $\delta_2 < \frac{1}{490}$  mindestens in der Ordnung  $\frac{1}{490 \cdot 16^q} \left( \frac{\varphi}{n} \right)^5$  gegen Null geht.

### Anhang. Ellipse.

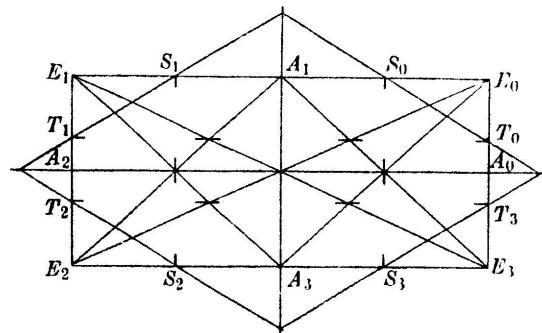


Fig. 5

Beim Zeichnen einer Ellipse, deren Achsen  $A_2 A_0 = 2a$  und  $A_3 A_1 = 2b$  mit  $a > b$  gegeben sind, verwendet man gerne die Krümmungskreise in den Scheiteln. Die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte ergeben sich

bekanntlich, wenn man von den Ecken des umbeschriebenen, achsenparallelen Rechtecks  $E_0E_1E_2E_3$  Lote auf die gegenüberliegenden Diagonalen fällt und sie mit den Achsen zum Schnitt bringt.

Die zwischen den Krümmungskreisen verlaufenden Ellipsenbogen erhält man schärfer, wenn noch je eine passende Tangente samt Berührungspunkt bekannt ist. Es werden hierfür die Tangenten empfohlen, deren Berührungspunkte auf den Diagonalen des umbeschriebenen Rechtecks gelegen sind. Diese Tangenten sind leicht zu konstruieren; sie liegen jedoch etwas zu nahe den größeren Krümmungskreisen und nützen deshalb nicht sehr viel. Eine günstigere Lage haben die Tangenten, deren Berührungspunkte auf den Diagonalen der kleineren Rechtecke  $E_0A_1A_3E_3$  und  $A_1E_1E_2A_3$  liegen. Man findet sie leicht, indem man die Schnittpunkte dieser Diagonalen unter sich parallel der kleinen und ihre Schnittpunkte mit den zuerst genannten Diagonalen parallel der großen Achse auf die äußeren Rechteckseiten projiziert und die erhaltenen Punkte  $S_iT_i$  verbindet. Als Probe ergeben sich die Achsenabschnitte  $a + \frac{a}{4}$  und  $b + \frac{2b}{3}$ , während z. B.  $A_1S_0 = S_0E_0 = \frac{a}{2}$  und  $A_0T_0 = \frac{1}{2}T_0E_0 = \frac{b}{3}$  wird.

Von den Krümmungskreisen abgesehen ist die Konstruktion affiner Natur, d. h. sie kann auch angewendet werden, wenn statt der Achsen nur ein Paar konjugierter Durchmesser gegeben sind und die Rechtecke entsprechend durch Parallelogramme ersetzt werden. In Parallelkoordinaten kann die Gleichung der Ellipse in der Form  $x^2 + y^2 = 1$ , die der Tangenten in der Form  $\pm 4x \pm 3y = 5$  geschrieben werden, womit sich die gemachten Angaben leicht bestätigen.

(Eingegangen den 2. März 1938.)