Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 10 (1937-1938)

Artikel: Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert.

Autor: Ostrowski, Alexander

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10996

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die Absolutabweichung einer differentiierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert

Von Alexander Ostrowski, Basel

Ist die Funktion $h(x)$ im Intervall $< a, b >$ stetig, so kann ihre Abweichung von ihrem Integralmittelwert $\frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)dx$ dennoch beliebig nah an die Differenz zwischen ihrem Maximum und Minimum heranreichen.

Dies wird nun anders, wenn man die beschränkte Differentiierbarkeit von $h(x)$ voraussetzt. Ist etwa in unserm Intervall $|h'(x)| \leqq m$, so kann die Differenz zwischen dem Maximum und dem Minimum von $h(x)$ den Wert $(b-a)\,m$ nicht übersteigen, kann aber diesen Wert sehr wohl erreichen.

Die Absolutabweichung von $h(x)$ von ihrem Integralmittelwert überschreitet aber in diesem Falle $\frac{1}{2}(b-a)\,m$ nicht, ja, im Mittelpunkt des Intervalls gilt sogar für die Absolutabweichung die Schranke $\frac{1}{4}(b-a)\,m$.

Genauer gilt folgendes:

Es sei $h(x)$ im Intervall $J: a < x < b$ stetig und differentiierbar, und es sei in J durchweg

$$|h'(x)| \leqq m, \quad m > 0\,. \tag{1}$$

Dann gilt für jedes x aus J:

$$\left| h(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b h(x)\,dx \right| \leqq \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right)(b-a)\,m\,. \tag{2}$$

Offenbar nimmt hier der erste Faktor rechts in der Mitte von J den Wert $\frac{1}{4}$ an und steigt sodann monoton gegen den Wert $\frac{1}{2}$, den er in den beiden Endpunkten von J annimmt.

Beim Beweis der obigen Behauptung darf offenbar angenommen werden, daß der Integralmittelwert von $h(x)$ verschwindet, da man sonst nur $h(x)$ um diesen Mittelwert zu verkleinern braucht. Ferner darf $m = 1$ angenommen werden, da man sonst $h(x)$ durch $\frac{h(x)}{m}$ ersetzen kann, und endlich darf das Intervall J als das Intervall $(0, 1)$ vorausgesetzt werden, da man sonst $h(x)$ durch $\frac{h(a + x(b-a))}{b-a}$ ersetzen kann.

Wir dürfen daher unsere Annahmen über $h(x)$ durch

$$\int_0^1 h(x)dx = 0\,, \quad |h'(x)| \leqq 1\,, \quad (0 < x < 1) \tag{3}$$

ersetzen, und die zu beweisende Behauptung reduziert sich auf

$$|\,h(x)\,| \leqq \frac{1}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\,. \tag{4}$$

Um nun eine Schranke für $|h(x)|$ in einem Punkte x_0 von J herzuleiten, darf man offenbar unbeschadet der Allgemeinheit $h(x_0) \geqq 0$ voraussetzen, da man sonst $-h(x)$ anstatt $h(x)$ betrachten kann. Dann gilt aber wegen (3)

$$h(x) \geqq h(x_0) - |x - x_0|\,.$$

Integriert man dies zwischen 0 und 1, so ergibt sich wegen (3)

$$0 = \int_0^1 h(x)\,dx \geqq h(x_0) - \int_0^1 |x - x_0|\,dx\,,$$

$$h(x_0) \leqq \int_0^1 |x - x_0|\,dx = \tfrac{1}{4} + (x_0 - \tfrac{1}{2})^2\,,$$

womit (4) bewiesen ist.

Zugleich sieht man, daß das Gleichheitszeichen in (4) nur gilt, wenn $\pm h(y) = \frac{1}{4} + (x - \frac{1}{2})^2 - |y - x|$ ist.

Analoge Betrachtungen führen natürlich auch bei endlichen Summen zu solchen Ungleichungen. Gilt z. B. für reelle a_ν

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 0\,, \quad |a_{\nu+1} - a_\nu| \leqq d\,, \quad (\nu = 1, \ldots, n-1)\,, \tag{5}$$

so gilt für jedes feste $k = 1, 2, \ldots, n$, wenn $a_k > 0$ ist,

$$a_\nu \geqq a_k - d|\nu - k|\,, \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

und daher, wenn man über ν summiert,

$$n a_k \leqq d \sum_{\nu=1}^{n} |\,\nu - k\,| = \left[\frac{(n-k)^2 + k^2}{2} + \left(\frac{n}{2} - k\right)\right] d$$

oder

$$\left|\frac{a_k}{nd}\right| \leqq \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\,. \tag{6}$$

Ist aber a_k negativ, so kann man die gleichen Betrachtungen auf die Zahlenfolge $-a_\nu$ anwenden, so daß in jedem Falle die Ungleichung (6) für jedes $k = 1, \ldots, n$ aus den Annahmen (5) folgt.

(Eingegangen den 18. Januar 1938.)