Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1937-1938)

Artikel: Zum Satz von Pohlke.
Autor: Stiefel, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10995

Zum Satz von Pohlke

Von E. Stiefel, Zürich

Es seien in einer Ebene drei Vektoren OX', OY', OZ' gegeben, die nicht auf einer Geraden liegen. Dann existieren im Raum drei gleichlange und zueinander senkrechte Vektoren OX, OY, OZ und eine Projektionsrichtung l, so daß bei der Parallelprojektion in der Richtung l die Vektoren OX, OY, OZ in OX', OY', OZ' übergehen. Dies ist der Satz von *Pohlke*[1]).

Wie alle Sätze, die elementar formuliert, aber nicht ebenso elementar bewiesen werden können, hat auch der *Pohlke*'sche Satz eine spannende Geschichte und ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden. Es sei hier nur auf die Arbeiten von *Gauß*, *Hurwitz* und *Klein* hingewiesen[2]), in denen Beziehungen zur analytischen und n-dimensionalen Geometrie aufgedeckt werden und die damit die Richtung angeben, in der die Verallgemeinerungen des *Pohlke*'schen Satzes zu suchen sind.

Wenn in der vorliegenden Arbeit die äußerst reichhaltige Literatur über den *Pohlke*'schen Satz um einen weiteren Beitrag vermehrt wird, so ist dies in der Überzeugung geschehen, daß sich die *Pohlke*'sche Aufgabe auf einfache und natürliche Weise mit den Mitteln der analytischen Geometrie und Matrizenrechnung lösen lassen muß. Es zeigt sich nun in der Tat, daß diese Aufgabe äquivalent ist mit der Hauptachsentransformation der *Gram*'schen Matrix § 1, Nr. 3) der drei Bildvektoren OX', OY', OZ' und daß ihre Eigenwerte (§ 1, Satz 4) und Eigenvektoren (§ 1, Nr. 5) eine einfache geometrische Bedeutung für die gegenseitige Lage von Original- und Bildvektoren haben.

In § 1, Nr. 2 wird eine andere Formel für die Lösung der *Pohlke*'schen Aufgabe hergeleitet, deren anschaulicher Inhalt aber erst in § 2 nach längeren Vorbereitungen zutage tritt.

Um nicht ins Uferlose zu geraten, mußten alle Spezialfälle, Verallge-

---

[1]) Ein elementarer Beweis findet sich in den meisten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie. Vergl. etwa:

Hessenberg-Salkowski, Vorlesungen über darstellende Geometrie. (Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1929.) S. 181.

Kollros, Géométrie descriptive. (Zürich, Orell Füßli, 2. Auflage, 1934.) S. 37.

Müller-Kruppa, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. (Leipzig, B.G. Teubner, 4. Auflage, 1936.) S. 243. Dort finden sich auch Literaturangaben.

[2]) *Gauß*, Werke. (Leipzig, B. G. Teubner.) Bd. VIII, S. 345.

Hurwitz, Mathematische Werke. (Basel, Birkhäuser, 1933.) Bd. II, S. 732.

Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. (Berlin, Springer, 3. Auflage, 1925.) Bd. II, S. 89.

meinerungen und Anwendungen (Normalprojektion, Affinität, quadratische Formen) beiseite gesetzt werden; es ist jedoch meistens die Aufgabe im n-dimensionalen Raum behandelt worden. Dies ist mehr geschehen, um die Ausnahmestellung des klassischen dreidimensionalen Falles zu klären, als wegen der n-dimensionalen Verallgemeinerungen, die keine großen Überraschungen bringen. Der einfachste matrizentheoretische Beweis für den klassischen *Pohlke*'schen Satz steht in § 1, Nr. 4.

Unabhängig vom übrigen Teil der Arbeit sind lesbar § 1, Nr. 5 und § 2, Nr. 6; an beiden Stellen wird der dreidimensionale Spezialfall behandelt.

§ 1. Die klassische Aufgabe von Pohlke

1. **Normalform.** Die Vektoren, von denen im folgenden die Rede ist, sollen immer an einem festen Punkt O angreifen. Unter einem *Pohlke*'schen m-Bein verstehen wir nun m Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$, die in einer $n = (m - 1)$-dimensionalen Ebene R^n des m-dimensionalen Raumes R^m liegen und durch eine Parallelprojektion aus m orthogonalen Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_m$ des R^m von der gemeinsamen Länge $e > 0$ auf den R^n entstanden sind. Dabei wird $m \geqslant 3$ vorausgesetzt. Die *Pohlke*'sche Aufgabe besteht darin, zu einem gegebenen m-Bein $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ die Originalvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_m$ und die Projektionsrichtung zu bestimmen.

Sind $\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2', \ldots, \mathfrak{e}_m'$ andere Orthogonalvektoren im R^m von der Länge e, so gibt es eine Drehung S, die $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_m$ in $\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2', \ldots, \mathfrak{e}_m'$ überführt:

$$\mathfrak{e}_i' = \sum_{k=1}^{m} s_{ik} \mathfrak{e}_k \quad (i = 1, 2, \ldots, m) . \tag{1}$$

Dabei bilden die s_{ik} eine orthogonale m-reihige Matrix S. Da unsere Parallelprojektion eine lineare Abbildung ist, bildet sie $\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2', \ldots, \mathfrak{e}_m'$ auf

$$\mathfrak{a}_i' = \sum_{k=1}^{m} s_{ik} \mathfrak{a}_k \tag{2}$$

ab. Es gilt also:

Satz 1. *Zwei zur selben Parallelprojektion gehörige Pohlke'sche m-Beine gehen auseinander durch eine orthogonale Substitution* (2) *hervor. Umgekehrt entsteht aus einem Pohlke'schen m-Bein durch eine orthogonale Substitution* (2) *wieder ein solches.*

Diese Tatsache kann man zur Einführung von Normaltypen *Pohlke*'scher m-Beine verwenden. Wählt man zum Beispiel $\mathfrak{e}_1'$ als Normalvektor $\mathfrak{n}$ zur Ebene R^n, so hat man:

$$\mathfrak{e}_2' = \mathfrak{a}_2', \ \mathfrak{e}_3' = \mathfrak{a}_3', \ \ldots, \ \mathfrak{e}_m' = \mathfrak{a}_m' \ ;$$

also sind dann die Vektoren $\mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3', \ldots, \mathfrak{a}_m'$ zueinander orthogonal und haben alle die Länge e. Den Vektor $\mathfrak{a}_1'$ bezeichnen wir in diesem Spezialfall mit $\mathfrak{p}$ und nennen ihn den *charakteristischen Vektor* des *Pohlke*'schen m-Beins $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$. Er bestimmt nämlich die Projektionsrichtung $(\mathfrak{n} - \mathfrak{p})$.

Satz 2. *Zu jedem Pohlke'schen m-Bein existiert eine orthogonale Substitution* (2), *die* $n = (m - 1)$ *unter seinen Vektoren gleich lang macht. Die gemeinsame Länge dieser Vektoren ist die Länge e der Originalvektoren und aus dem m-ten Vektor wird der charakteristische Vektor* $\mathfrak{p}$, *der zusammen mit dem Normalvektor* $\mathfrak{n}$ *von der Länge e zum* R^n *die Projektionsrichtung* $(\mathfrak{n} - \mathfrak{p})$ *bestimmt*[3]).

Bemerkung: Zur Lösung der *Pohlke*'schen Aufgabe ist die explizite Bestimmung dieser Substitution nicht nötig. Es genügt e und $\mathfrak{p}$ zu berechnen; dann kann man einfach auf der damit bekannten Projektionsrichtung von den Spitzen der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ aus auf eine Kugel um O mit dem Radius e zurückgehen um die Originalvektoren zu finden.

2. **Hauptrelation.** Zur Durchführung der in Satz 2 gegebenen Lösungsmethode verwenden wir ein kartesisches Koordinatensystem im R^n. Unter A verstehen wir dann die m-zeilige und n-spaltige Matrix, die in der i-ten Zeile die Komponenten von $\mathfrak{a}_i$ enthält. Unsere Substitution (2) heißt dann in der Sprache der Matrizenrechnung:

$$A' = SA \ . \tag{3}$$

Dabei bedeutet natürlich A' die Matrix mit den Zeilenvektoren $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \ldots, \mathfrak{a}_m'$. Bringen wir das m-Bein gemäß Satz 2 auf die Normalform und bezeichnen mit P die aus den Komponenten von $\mathfrak{p}$ gebildete einzeilige Matrix, so gilt noch:

$$A' = \begin{pmatrix} P \\ B \end{pmatrix} \ . \tag{4}$$

[3]) In dem aus der darstellenden Geometrie bekannten Fall $m = 3$, also $n = 2$, nennt man die in Satz 2 eingeführte Normalform „Kavalierperspektive".

B ist die n-reihige Matrix mit den Zeilenvektoren $\mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3', \ldots, \mathfrak{a}_m'$ und daher orthogonal:

$$BB^* = B^* B = e^2 E_n \ . \tag{5}$$

(Der Stern bedeutet Transposition, E_n ist die n-reihige Einheitsmatrix). Aus (3) und (4) folgt:

$$(SA)^* (SA) = A^* S^* SA = A^* A = P^* P + B^* B \ .$$

Und damit aus (5) die

$$\boxed{\text{Hauptrelation}: \ P^* P = A^* A - e^2 E_n \ .} \tag{6}$$

Beide Seiten dieser Relation sind symmetrische Matrizen, und die Elemente von $P^* P$ sind die Produkte aus je zwei Komponenten von $\mathfrak{p}$. Die Hauptrelation enthält also $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen zur Berechnung der $(n+1)$ Unbekannten (e und Komponenten von $\mathfrak{p}$) aus den gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$. Man wird also $\frac{(n+1)(n-2)}{2}$ Bedingungen dafür erwarten dürfen, daß m willkürlich vorgegebene Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ im R^n ein *Pohlke*'sches m-Bein bilden. Nach unserer Bemerkung am Ende von Nr. 1 ist die Pohlke'sche Aufgabe durch die Hauptrelation also im wesentlichen gelöst. Man liest ferner aus ihr ab, daß die Zahl e und der charakteristische Vektor $\mathfrak{p}$ (abgesehen vom Vorzeichen) durch die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ eindeutig bestimmt sind. Durch Spurenbildung folgt aus (6) noch:

$$|\mathfrak{p}|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\mathfrak{a}_i|^2 - ne^2 \ . \tag{7}$$

Es soll nun aus der Hauptrelation eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der *Pohlke*'schen Aufgabe hergeleitet werden. Zu diesem Zweck werden aus (6) die Eigenwerte der Matrix $A^* A$ berechnet. Sie entstehen aus den Eigenwerten von $P^* P$ durch Addition[4]) von e^2. Nun hat aber $P^* P$ höchstens den Rang 1 (alle zweireihigen Unterdeterminanten verschwinden), also den $(n-1)$-fachen Eigenwert 0. Der letzte Eigen-

[4]) Denn es gilt für jede quadratische n-reihige Matrix M: Die Eigenwerte von $N = M + \lambda E_n$ entstehen aus den Eigenwerten von M durch Addition von λ. In der Tat hat man für das charakteristische Polynom von N:

$f_N(u)$ = Determinante von $uE - N$ = Determinante von $uE - M - \lambda E$ = Determinante von $(u - \lambda) E - M = f_M(u - \lambda)$.

wert ist dann gleich der Spur $|\mathfrak{p}|^2$. Demnach ergibt sich für die Eigenwerte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ von A^*A:

$$\alpha_1 = |\mathfrak{p}|^2 + e^2 = l^2 \; ; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = e^2 \, . \tag{8}$$

Dabei sei l die Länge des Projektionsvektors $(\mathfrak{n} - \mathfrak{p})$.

Satz 3. (*Erste notwendige Lösbarkeitsbedingung.*) *Ordnet man die Eigenwerte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ der Matrix A^*A nach abnehmender Größe, so muß gelten:*

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n > 0 \, .$$

3. **Die Gram'sche Matrix eines m-Beins.** In dieser Nummer seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ beliebige Vektoren im R^n, die also nicht notwendigerweise ein *Pohlke*'sches m-Bein bilden müssen. Wir wollen uns jetzt wieder vom eingeführten Koordinatensystem befreien und bilden zu diesem Zweck neben der n-reihigen Matrix A^*A noch die m-reihige Matrix AA^*. Das Element mit der Nummer ik in dieser Matrix ist das skalare Produkt $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ der beiden Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$. Die Matrix heiße die *Gram*'sche Matrix der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$; sie ist symmetrisch und unabhängig von der Wahl eines Koordinatensystems. Ihre Determinante ist das Quadrat des Volumens der Vektoren, also bei uns immer 0. Die *Gram*'sche Matrix hat demnach immer den Eigenwert 0; wir zeigen, daß die übrigen n Eigenwerte mit den Eigenwerten von A^*A übereinstimmen. Zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, daß ein r-reihiger Hauptminor der *Gram*'schen Matrix die *Gram*'sche Determinante eines aus r Vektoren bestehenden Teilsystems von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ ist. Der r-te Koeffizient des charakteristischen Polynoms der *Gram*'schen Matrix ist also (abgesehen vom Vorzeichen) die Summe der Quadrate aller r-dimensionalen Volumina, die sich aus den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ bilden lassen.

Erster Beweis. Wir betrachten etwa den Hauptminor der *Gram*'schen Matrix, der aus den Zeilen und Kolonnen mit den Nummern $h_1, h_2, \ldots, h_r$ gebildet ist ($r \leqslant n$). Er ist nach der obigen Bemerkung die *Gram*'sche Determinante der Vektoren $\mathfrak{a}_{h1}, \ldots, \mathfrak{a}_{hr}$, also nach der *Lagrange*'schen Identität auch die Summe der Quadrate aller r-reihigen Determinanten, die in den Zeilen mit den Nummern $h_1, h_2, \ldots, h_r$ der Matrix A stecken. Der r-te Koeffizient im charakteristischen Polynom der *Gram*'schen Matrix ist die Summe aller r-reihigen Hauptminoren, also die Summe der Quadrate aller r-reihigen Unterdeterminanten von A. Genau dieselbe Tatsache gilt aber für das charakteristische Polynom der Matrix A^*A, denn A^*A ist die *Gram*'sche Matrix der Kolonnenvektoren von A. Die charakteristischen Polynome von AA^* und A^*A stimmen also im ersten bis n-ten Koeffizienten überein. Dies war zu beweisen.

Zweiter Beweis. Wir ergänzen A durch eine ganz aus Nullen bestehende Kolonne zu einer quadratischen m-reihigen Matrix B. Es genügt zu beweisen, daß BB^* und B^*B dieselben Eigenwerte haben. Wir beweisen sogar: Sind M und N zwei beliebige m-reihige quadratische Matrizen, so haben MN und NM dieselben Eigenwerte.

Dies kann man etwa folgendermaßen einsehen. Man rechnet zunächst leicht nach:

$$\text{Spur}\,(MN) = \text{Spur}\,(NM)\,.$$

Ferner hat man $(MN)^2 = (MNM)N$ und $(NM)^2 = N(MNM)$, also nach der eben bewiesenen Spurenrelation:

$$\text{Spur}\,(MN)^2 = \text{Spur}\,(NM)^2$$

Allgemein:

$$\text{Spur}\,(MN)^r = \text{Spur}\,(NM)^r, \quad (r = 1, 2, \ldots)\,.$$

Sind nun $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die Eigenwerte von MN und $y_1, y_2, \ldots, y_m$ die Eigenwerte von NM, so hat $(MN)^r$ die Eigenwerte $x_1^r, x_2^r, \ldots, x_m^r$ und $(NM)^r$ die Eigenwerte $y_1^r, y_2^r, \ldots, y_m^r$. Wir haben bewiesen:

$$x_1^r + x_2^r + \cdots + x_m^r = y_1^r + y_2^r + \cdots + y_m^r\,.$$

Daraus folgt aber (abgesehen von der Reihenfolge):

$$x_1 = y_1\,,\; x_2 = y_2\,, \ldots,\; x_m = y_m\,.$$

Damit ist der Beweis beendigt[5]).

Da nun also die *Gram*'sche Matrix AA^* dieselben Eigenwerte wie die Matrix A^*A hat, folgt aus Satz 3:

Satz 4. (*Zweite notwendige Lösbarkeitsbedingung für die Pohlke'sche Aufgabe.*) *Ordnet man die Eigenwerte $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ der Gram'schen Matrix der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ nach abnehmender Größe, so muß gelten:*

$$\gamma_1 \geqq \gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = \gamma_{m-1} > 0\,;\; \gamma_m = 0\,.$$

[5]) Ist die Determinante von M von 0 verschieden, so folgt die Behauptung auch einfach aus $MN = M(NM)M^{-1}$.

Es ist dann nach (8):

$$\gamma_1 = l^2, \quad \gamma_2 = e^2. \tag{9}$$

Man hätte diesen Satz auch direkt aus den Formeln (4) — (6) folgendermaßen herleiten können:

$$SAA^* S^* = (SA)(SA)^* = \begin{pmatrix} PP^* & PB^* \\ BP^* & e^2 E_n \end{pmatrix}.$$

Durch direkte Rechnung bestätigt man, daß die letzte Matrix in dieser Gleichung und damit auch AA^* die Eigenwerte von Satz 4 hat.

4. **Hauptachsentransformation der Gram'schen Matrix.** Die *Gram*'sche Matrix AA^* der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ ist eine symmetrische Matrix, sie kann daher durch orthogonale Transformation auf Diagonalform gebracht werden. Sei also etwa R eine orthogonale m-reihige Matrix, so daß

$$R(AA^*)R^* = (RA)(RA)^* = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & & 0 \\ & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_m \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Bezeichnet man die Zeilenvektoren von RA mit $\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$, so ist also obige Diagonalmatrix die *Gram*'sche Matrix von $\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$ und daraus folgt:

a) Die Vektoren $\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$ stehen senkrecht aufeinander.

b) $$|\bar{\mathfrak{a}}_1|^2 = \gamma_1, \quad |\bar{\mathfrak{a}}_2|^2 = \gamma_2, \quad \ldots, \quad |\bar{\mathfrak{a}}_m|^2 = \gamma_m. \tag{11}$$

Aus der Existenz dieser Hauptachsentransformation ergibt sich nun leicht:

Satz 5. ***Die beiden Lösbarkeitsbedingungen von Satz 3 und Satz 4 sind hinreichend.***

Da die zweite Bedingung aus der ersten hergeleitet wurde, genügt es zu zeigen, daß die Bedingung von Satz 4 hinreichend ist. Sei also diese Bedingung erfüllt, das heißt wegen (11):

$$|\bar{\mathfrak{a}}_1| \geqq |\bar{\mathfrak{a}}_2| = |\bar{\mathfrak{a}}_3| = \cdots = |\bar{\mathfrak{a}}_{m-1}| > 0; \quad \bar{\mathfrak{a}}_m = 0. \tag{12}$$

Wir wollen nun beweisen, daß diese Vektoren $\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$ ein *Pohlke*'sches m-Bein bilden. Dazu müssen die Originalvektoren $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_m$

angegeben werden. Wir wählen: $\bar{\mathfrak{e}}_2 = \bar{\mathfrak{a}}_2$, $\bar{\mathfrak{e}}_3 = \bar{\mathfrak{a}}_3, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_{m-1} = \bar{\mathfrak{a}}_{m-1}$. Die gemeinsame Länge dieser Vektoren sei wieder mit e bezeichnet. Wegen $|\bar{\mathfrak{a}}_1| \geqslant e$ kann nun in der zu $\bar{\mathfrak{e}}_2, \bar{\mathfrak{e}}_3, \ldots, \bar{\mathfrak{e}}_{m-1}$ orthogonalen 2-dimensionalen Ebene (die $\bar{\mathfrak{a}}_1$ enthält) ein Vektor $\bar{\mathfrak{e}}_1$ von der Länge e und eine zu ihm senkrechte Projektionsrichtung so gewählt werden, daß $\bar{\mathfrak{e}}_1$ bei dieser Parallelprojektion in $\bar{\mathfrak{a}}_1$ übergeht. $\bar{\mathfrak{e}}_m$ liegt dann einfach in der Projektionsrichtung.

Da nun also einerseits die Vektoren $\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \bar{\mathfrak{a}}_m$ ein *Pohlke*'sches m-Bein bilden und andererseits durch die orthogonale Substitution R aus $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ hervorgegangen sind, war nach Satz 1 auch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ ein *Pohlke*'sches m-Bein, was zu beweisen war.

Im Fall $m = 3$, $n = 2$ folgt:

Satz 6. (*Satz von Pohlke.*) *Drei Vektoren vom Rang 2 können immer als Parallelprojektionen von drei orthogonalen und gleichlangen Vektoren des 3-dimensionalen Raumes aufgefaßt werden.*

Beweis: Nach Voraussetzung haben die gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ den Rang 2. Dasselbe gilt für $\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \bar{\mathfrak{a}}_3$, da diese Vektoren aus $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ durch die orthogonale Substitution R entstehen. Andererseits stehen nach a) die Vektoren $\bar{\mathfrak{a}}_1, \bar{\mathfrak{a}}_2, \bar{\mathfrak{a}}_3$ senkrecht aufeinander und daher muß einer unter ihnen der Nullvektor sein. Wir können also etwa annehmen:

$$|\bar{\mathfrak{a}}_1| \geqslant |\bar{\mathfrak{a}}_2| > 0, \qquad \bar{\mathfrak{a}}_3 = 0\,. \tag{12a}$$

Die Bedingung (12) ist also von selbst erfüllt; von ihr ausgehend kann man weiterschließen wie im allgemeinen Fall.

Der klassische *Pohlke*'sche Satz ist also im wesentlichen äquivalent mit dem Hauptachsentheorem der symmetrischen 3-reihigen Matrix.

5. **Der dreidimensionale Spezialfall.** Es soll jetzt für den klassischen *Pohlke*'schen Satz 6 ein anschaulicher Beweis gegeben werden, der unabhängig vom bisherigen ist und die formale Matrizenrechnung vermeidet. Dabei werden wir den *Schwarz*'schen Beweisansatz[7]) verwenden, während die in Nr. 1 an die Spitze gestellte Methode der orthogonalen Transformation eng verwandt ist mit dem Prinzip der Hilfskugel von *J. W. von Deschwanden.*

[7]) Die klassischen Beweise des *Pohlke*'schen Satzes wurden zusammengestellt von *E. Wendling*, Der Fundamentalsatz der Axonometrie, Zürich, 1912.

Seien also in der Zeichenebene R^2 drei Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ vom Rang 2 gegeben, die von einem Punkt O auslaufen. Wir bestimmen zunächst die Entfernung r eines Punktes der Zeichenebene mit dem Ortsvektor $y_1 \mathfrak{a}_1 + y_2 \mathfrak{a}_2 + y_3 \mathfrak{a}_3$ von O:

$$r^2 = \sum_{i,k=1}^{3} (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)\, y_i\, y_k \,. \tag{13}$$

Dabei bedeutet $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)$ das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_k$. Die zu dieser „metrischen Fundamentalform“ (13) gehörige Matrix ist übrigens die in Nr. 3 eingeführte *Gram*'sche Matrix der gegebenen Vektoren.

Für die charakteristische Gleichung der quadratischen Form (13) findet man:

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x = 0 \,, \tag{14}$$

worin die Koeffizienten α und β folgende geometrische Bedeutung haben:

$\alpha = |\mathfrak{a}_1|^2 + |\mathfrak{a}_2|^2 + |\mathfrak{a}_3|^2$,
$\beta =$ Summe der Quadrate der von je zwei Vektoren $\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k$ aufgespannten Parallelogrammflächen (vgl. Nr. 3). (15)

(Die charakteristische Gleichung hat kein absolutes Glied, da die Determinante der Form, d. h. das Quadrat des Volumens von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ Null ist.) Es ist $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und daraus folgt, daß (14) außer der trivialen Nullösung noch zwei positive Lösungen hat. Wir bezeichnen diese Lösungen, d. h. die Eigenwerte der Form (13) mit

$$\gamma_1 \geqslant \gamma_2 > 0, \quad \gamma_3 = 0 \,. \tag{16}$$

Ferner merken wir uns noch die Gleichung des Einheitskreises um O; sie lautet:

$$\sum_{i,k=1}^{3} (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)\, y_i\, y_k = 1 \,. \tag{17}$$

Nach diesen Vorbereitungen wählen wir nun in einem dreidimensionalen Raum R^3 (der die Ebene R^2 nicht enthalten muß) ein kartesisches Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 und bilden R^3 linear auf R^2 ab, indem wir dem Punkt mit den Koordinaten (x_1, x_2, x_3) den Punkt $x_1 \mathfrak{a}_1 + x_2 \mathfrak{a}_2 + x_3 \mathfrak{a}_3$ zuordnen. Die Grundvektoren (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) des Koordinatensystems gehen dabei in $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ über. Wegen der Linearität der Abbildung erfüllen alle Punkte des R^3, die denselben Bildpunkt haben, eine Gerade; die gemeinsame Richtung dieser Geraden werde mit l bezeichnet. Dem Einheitskreis (17) entspricht im R^3 die Fläche zweiten Grades

$$\sum_{i,k=1}^{3} (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k)\, x_i\, x_k = 1 \,. \tag{18}$$

Es ist dies wegen (16) ein elliptischer Zylinder, dessen Mantellinien notwendigerweise die Richtung l haben. Seine Halbachsen betragen:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\gamma_2}}\,, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1}}\,. \tag{19}$$

Jetzt wird in den R^3 eine Ebene $\overline{R}^2$ gelegt, die aus dem Zylinder einen Kreis K schneidet. Vermöge unserer Abbildung ist $\overline{R}^2$ affin auf R^2 bezogen; da bei dieser Affinität der Kreis K in den Kreis (17) übergeht, ist diese Affinität eine Ähnlichkeit. Innerhalb $\overline{R}^2$ ist somit unsere Abbildung von R^3 auf R^2 eine Ähnlichkeit.

Seien nun $\overline{\mathfrak{a}}_1, \overline{\mathfrak{a}}_2, \overline{\mathfrak{a}}_3$ die Parallelprojektionen der Grundvektoren (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) auf $\overline{R}^2$ in der Richtung l. Diese Vektoren haben in R^2 dieselben Bilder wie die Grundvektoren, gehen also in $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ über und sind infolgedessen ähnlich zu $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$. Damit ist der *Pohlke*'sche Satz bewiesen, denn wir haben gezeigt, daß es zu $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ ähnliche Vektoren $\overline{\mathfrak{a}}_1, \overline{\mathfrak{a}}_2, \overline{\mathfrak{a}}_3$ gibt, die durch Parallelprojektion aus drei orthogonalen und gleichlangen Vektoren entstehen. Diese hinzutretende Ähnlichkeit ist aber unwesentlich.

Die Stellung der Ebene $\overline{R}^2$ im R^3 läßt sich etwa folgendermaßen beschreiben: Wir konstruieren im Nullpunkt M des kartesischen Koordinatensystems die Zylinderhalbachsen a und b und nennen ihre Endpunkte A und B. Dann läuft $\overline{R}^2$ durch MA und bildet mit MB den Winkel φ mit

$$\cos\varphi = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}\,. \tag{20}$$

Der Schnittkreis K hat demnach den Radius a und das Ähnlichkeitsverhältnis bei der Abbildung von $\overline{R}^2$ auf R^2 beträgt $1/a = \sqrt{\gamma_2}$. Werden also $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ direkt als Parallelprojektionen von drei orthogonalen Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ dargestellt, so ergibt sich für die gemeinsame Länge e dieser Vektoren:

$$e = \sqrt{\gamma_2}\,. \tag{21}$$

Ferner hat man für den Neigungswinkel ψ der Projektionsrichtung l zur Ebene $\overline{R}^2$ den Wert $\psi = 90^0 - \varphi$, das heißt

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \,. \tag{22}$$

Endlich führen wir noch die Koordinaten (a_1, a_2, a_3) von A in unserem kartesischen System ein. Es ist also (a_1, a_2, a_3) ein zum Eigenwert γ_2 gehöriger Eigenvektor der quadratischen Form (13) oder auch der *Gram*'schen Matrix. Er ist senkrecht zu l, liegt in $\overline{R}^2$ und geht bei der Ähnlichkeit in $a_1\,\mathfrak{a}_1 + a_2\,\mathfrak{a}_2 + a_3\,\mathfrak{a}_3$ über.

Damit können wir nun die *Pohlke*'sche Aufgabe lösen, das heißt die gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ direkt als Parallelprojektion eines kartesischen Dreibeins $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ darstellen. Zu diesem Zweck werden zunächst die Eigenwerte γ_1, γ_2 der *Gram*'schen Matrix von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ und ein zu γ_2 gehöriger Eigenvektor (a_1, a_2, a_3) ermittelt. Dann steht die Projektionsrichtung senkrecht auf $a_1\,\mathfrak{a}_1 + a_2\,\mathfrak{a}_2 + a_3\,\mathfrak{a}_3$ und bildet mit der Zeichenebene den durch (22) gegebenen Winkel ψ. Die damit bekannten Projektionsstrahlen durch die Endpunkte von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ werden nun mit der Kugel um O vom Radius $e = \sqrt{\gamma_2}$ durchstoßen und ergeben die Endpunkte der von O auslaufenden Originalvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$.

§ 2. Reine Dehnungen von der Spur Null

1. **Normalzerlegung der symmetrischen Matrix.** Wir betrachten lineare Abbildungen in einem n-dimensionalen Raum R^n. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kartesische Koordinaten in ihm, so hätte man etwa für eine derartige Abbildung:

$$\overline{x}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} d_{\mu\nu} x_\nu \,, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n) \,, \tag{23}$$

oder wenn man die Abbildungsmatrix mit $D = (d_{\mu\nu})$ und die Zeile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit X bezeichnet:

$$\overline{X} = XD^* \,. \tag{24}$$

Im folgenden sei nun D immer eine symmetrische Matrix; wir nennen dann die zugehörige Abbildung eine reine Dehnung des Raumes. Dies aus folgendem Grunde: Da D eine symmetrische Matrix ist, existiert eine orthogonale Koordinatentransformation, die D auf Diagonalform bringt. Im neuen Koordinatensystem lauten die Abbildungsgleichungen:

$$\bar{x}_\mu = d_\mu x_\mu , \tag{25}$$

wo $d_1, d_2, \ldots, d_n$ die Eigenwerte von D sind. Die neuen Koordinatenachsen bezeichnen wir auch als Achsen der Dehnung; sie sind gegenüber der Dehnung invariant. Die Eigenwerte $d_1, d_2, \ldots, d_n$ könnte man auch als Dehnungsverhältnisse bezeichnen. Eine reine Dehnung ist also eine lineare Abbildung des R^n, die n zueinander senkrechte Achsen ungeändert läßt.

Nun tragen wir auf jeder Achse einen Einheitsvektor $\mathfrak{d}_\mu$ auf[8]) und nennen ihn den μ-ten Eigenvektor von D.

Werden seine Komponenten im alten Koordinatensystem zu einer Zeile D_μ zusammengefaßt, so gilt:

$$D = d_1 D_1^* D_1 + d_2 D_2^* D_2 + \cdots + d_n D_n^* D_n \tag{26}$$

mit: $$D_\mu D_\mu^* = 1, \quad D_\mu D_\nu^* = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu . \tag{27}$$

Beweis: Wir bezeichnen für einen Moment die rechte Seite von (26) mit S. Dann ergibt sich:

$$D_\mu S^* = D_\mu S = d_\mu D_\mu .$$

Der Vergleich mit der Abbildungsformel (24) zeigt, daß die zu S gehörige Abbildung jeden Eigenvektor und damit jeden Vektor auf einer Dehnungsachse mit dem zugehörigen Dehnungsverhältnis multipliziert. S stimmt also mit D überein.

Wegen (27) nennen wir (26) die Normalzerlegung der symmetrischen Matrix D und können formal den folgenden Satz aussprechen:

Satz 7. (*Normalzerlegung der n-reihigen symmetrischen Matrix D.*) *Es läßt sich D nach* (26) *und* (27) *zerlegen, wobei die D_μ einzeilige Matrizen sind. In jeder derartigen Zerlegung sind die d_μ die Eigenwerte und die D_μ die Eigenvektoren von D.*

---

[8]) Daß $\mathfrak{d}_\mu$ in der einen oder anderen Richtung auf der betreffenden Achse gewählt werden kann ist für uns gleichgültig. Auch für die Lösung der *Pohlke*'schen Aufgabe ist die Umkehrung eines Vektors in den entgegengesetzten Vektor unwesentlich.

2. **Dehnungen mit der Spur Null.** Diese durch $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 0$ ausgezeichneten Dehnungen werden im folgenden eine besondere Rolle spielen. Wir halten zunächst fest, daß sie eine Abel'sche Gruppe bezüglich der Summation bilden. Dabei verstehen wir unter der Summe der beiden Abbildungen

$$\overline{X}_1 = XD_1^* \quad \text{und} \quad \overline{X}_2 = XD_2^*$$

diejenige Abbildung, die dem Vektor X den Bildvektor $\overline{X}_1 + \overline{X}_2$ zuordnet. Zu ihr gehört die Matrix $D_1 + D_2$. Die Summe ist wieder symmetrisch und hat die Spur 0, falls D_1 und D_2 diese Eigenschaften hatten.

Die einfachsten Dehnungen von der Spur Null sind die, bei denen möglichst viele Eigenwerte zusammenfallen. Es sei etwa:

$$d_1 = -(n-1)\,r^2\,; \qquad d_2 = d_3 = \cdots = d_n = r^2. \tag{28}$$

Die Normalzerlegung lautet dann:

$$D = -(n-1)r^2 D_1^* D_1 + r^2(D_2^* D_2 + \cdots + D_n^* D_n)\,.$$

Nun ist andererseits $D_1^* D_1 + D_2^* D_2 + \cdots + D_n^* D_n$ eine Matrix mit lauter Eigenwerten Eins, also die Einheitsmatrix. Dies ergibt zusammen:

$$D = r^2 E - n r^2 D_1^* D_1\,. \tag{29}$$

Wir setzen noch: $\mathfrak{r} = r\mathfrak{d}_1$ und analog $R = rD_1$ und erhalten:

$$D = |\mathfrak{r}|^2 E - nR^* R\,; \qquad RR^* = |\mathfrak{r}|^2\,. \tag{30}$$

Die Dehnung D ist also durch den Vektor $\mathfrak{r}$ eindeutig bestimmt. Anschaulich besteht sie (abgesehen von einer Ähnlichkeit im Verhältnis $|\mathfrak{r}|^2$) aus einer Affinität an der zu $\mathfrak{r}$ senkrechten $(n-1)$-dimensionalen Ebene im Verhältnis $[-(n-1)]$. Wir nennen diese Dehnung daher die zum Vektor $\mathfrak{r}$ gehörige *Streckaffinität.*

3. **Zerlegung in Streckaffinitäten.** Sei nun D wieder eine beliebige reine Dehnung von der Spur 0. Die Normalzerlegung:

$$D = d_1 D_1^* D_1 + \cdots + d_n D_n^* D_n\,,$$

mit

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 0\,,$$

und wie wir schon oben bemerkt haben:

$$D_1^* D_1 + D_2^* D_2 + \cdots + D_n^* D_n = E \ .$$

Wegen dieser drei Gleichungen können wir auch schreiben:

$$D = \left[\left(\lambda - \frac{d_1}{n}\right) E - (n\lambda - d_1) D_1^* D_1\right] + \cdots + \left[\left(\lambda - \frac{d_n}{n}\right) E - (n\lambda - d_n) D_n^* D_n\right].$$

λ ist ein wählbarer Parameter. Wir bezeichnen noch mit ε_μ die Zahl ± 1 je nach dem Vorzeichen von $\lambda - d_\mu / n = k_\mu$ und setzen noch $\mathfrak{r}_\mu = \sqrt{|k_u|}\,\mathfrak{d}_\mu$. Also:

$$D = \varepsilon_1(|\mathfrak{r}_1|^2 E - nR_1^* R_1) + \cdots + \varepsilon_n(|\mathfrak{r}_n|^2 E - nR_n^* R_n) \ . \qquad (31)$$

Damit ist D in Streckaffinitäten zerlegt, die zu Vektoren gehören, die auf den Achsen von D liegen.

Durch Wahl von λ hat man es nun in der Hand, eine der Streckaffinitäten in (31) zu Null zu machen und über die Vorzeichen der übrigen ε_μ zu verfügen.

Satz 8. *Zu einer reinen Dehnung D von der Spur 0 im n-dimensionalen Raum gibt es $(n - 1)$ orthogonale Vektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_{n-1}$, die auf Achsen der Dehnung liegen, so daß die zugehörigen Streckaffinitäten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ die Beziehung*

$$D = \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} \varrho_{n-1} \qquad (32)$$

erfüllen. Dabei ist $|\varepsilon_\mu| = 1$; die Vorzeichen der ε_μ sind wählbar.

Beispiel: Im dreidimensionalen Raum soll eine Dehnung als $\varrho_1 - \varrho_2$ dargestellt werden. Dann liegt $\mathfrak{r}_1$ auf der Achse mit dem kleinsten und $\mathfrak{r}_2$ auf der Achse mit dem größten Dehnungsverhältnis; bezeichnet man diese Verhältnisse mit v und u und das dritte Dehnungsverhältnis mit $w = -(u + v)$, so gilt:

$$|\mathfrak{r}_1| = \sqrt{\frac{w - v}{3}} \ , \qquad |\mathfrak{r}_2| = \sqrt{\frac{u - w}{3}} \ .$$

Die in Satz 8 ausgesprochene Zerlegung ist nun durchaus nicht die einzige. Es kann D auch in Streckaffinitäten zerlegt werden, deren zugehörige Vektoren nicht senkrecht aufeinander stehen. Wir sprechen das diesbezügliche Resultat nur im Spezialfall des dreidimensionalen Raumes aus.

Wir hatten in obigem Beispiel $D = \varrho_1 - \varrho_2$, wobei ϱ_1 und ϱ_2 zu den genau beschriebenen Vektoren $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ gehören. Nun sei $D = \varrho_1' - \varrho_2'$ eine allgemeine Zerlegung und $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$ die zugehörigen Vektoren. Man konstruiere noch in der Ebene $(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$ das Paar konjugierter Hyperbeln mit den Halbachsen $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$. Dann gilt: Der Endpunkt von $\mathfrak{r}_1'$ durchläuft eine Hyperbel und der von $\mathfrak{r}_2'$ die andere, und dabei liegen beide Vektoren immer auf konjugierten Durchmessern.

Zur Herleitung bemerken wir noch folgendes. Es ist von vornherein klar, daß $\varrho_1' - \varrho_2'$ die zu $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$ senkrechte Gerade invariant läßt. Diese muß also eine Achse von D sein. Daher kommen nur solche Vektoren $\mathfrak{r}_1'$ und $\mathfrak{r}_2'$ in Frage, die in einer durch zwei Achsen von D aufgespannten Ebene liegen. Es genügt nun vollständig, daß die Abbildung $\varrho_1' - \varrho_2'$ auf die Punkte dieser Ebene dieselbe Wirkung habe wie D; denn weil die Spuren Null sind, kommt dann im Raum von selbst alles in Ordnung. Es ergibt sich also ein ebenes Problem, das leicht zu lösen ist.

4. **Anwendung auf die Aufgabe von Pohlke.** Seien nun wieder $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ die in § 1 betrachteten Vektoren im Raum R^n. Wir bilden die Summe der zugehörigen Streckaffinitäten (A_μ = Zeile aus den Komponenten von $\mathfrak{a}_\mu$):

$$(|\mathfrak{a}_1|^2 E - n A_1^* A_1) + \cdots + (|\mathfrak{a}_m|^2 E - n A_m^* A_m) .$$

Beachtet man, daß $A_1^* A_1 + \cdots + A_m^* A_m$ die Matrix $A^* A$ von § 1, Nr. 2 ist, so folgt aus der Hauptrelation (6) und aus (7):

$$(|\mathfrak{a}_1|^2 E - n A_1^* A_1) + \cdots + (|\mathfrak{a}_m|^2 E - n A_m^* A_m) = |\mathfrak{p}|^2 E - n P^* P . \qquad (33)$$

In Worten:

Satz 9. *Ist $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ ein Pohlke'sches m-Bein, so ergibt die Summe der zugehörigen Streckaffinitäten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Streckaffinität π am charakteristischen Vektor $\mathfrak{p}$.*

Damit ist die Hauptrelation geometrisch illustriert. Wir schließen weiter:

Satz 10. *Ist der Rang von m Vektoren im $n = (m - 1)$-dimensionalen Raum größer als 1 und ergibt die Summe der zugehörigen Streckaffinitäten wieder eine Streckaffinität, so bilden die Vektoren ein Pohlke'sches m-Bein.*

Beweis: Aus dem Bestehen von (33) folgt:

$$A^*A = e^2 E + P^* P \quad , \quad \text{wo } e^2 = \frac{1}{n}\left(\sum |\mathfrak{a}_\mu|^2 - |\mathfrak{p}|^2\right) .$$

Daraus liest man leicht die Eigenwerte von A^*A und damit auch die Eigenwerte der *Gram*'schen Matrix AA^* ab:

$$\gamma_1 = e^2 + |\mathfrak{p}|^2, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = \gamma_n = e^2, \quad \gamma_m = 0 .$$

Die Lösbarkeitsbedingung von Satz 4 ist erfüllt, sobald $e > 0$. Wäre aber $e = 0$, so hätte die *Gram*'sche Matrix und damit auch die Vektoren den Rang 1 oder 0, was verboten ist.

Satz 11. *Sind im n-dimensionalen Raum drei Vektoren gegeben, deren Rang > 1 ist, so können diese Vektoren zu einem Pohlke'schen $m = (n+1)$-Bein ergänzt werden.*

Beweis: Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Streckaffinitäten, die zu den gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ gehören. Dann existiert nach Satz 8 eine Zerlegung in Streckaffinitäten:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi - \alpha_4 - \alpha_5 - \cdots - \alpha_m . \tag{34}$$

Satz 10 beendigt den Beweis, indem aus $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \pi$ folgt, daß die zugehörigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \ldots, \mathfrak{a}_m$ ein *Pohlke*'sches m-Bein bilden.

Weiter sehen wir noch, daß im Fall $m = 4$, $n = 3$ nach Wahl von $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ die Vektoren $\mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{p}$ auf zwei konjugierten Hyperbeln beweglich sind, indem sie konjugierte Durchmesser bilden. Zur Bestimmung der Hyperbeln müssen die Achsen der Dehnung $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ bestimmt werden. Dies erfordert die Auflösung einer reduzierten kubischen Gleichung.

5. **Der Fall von drei Vektoren in der Ebene.** Der Fall $m = 3$, $n = 2$ ist zunächst einmal dadurch ausgezeichnet, daß jede Dehnung von der Spur Null von selbst eine Streckaffinität ist. Da die Dehnungen von der Spur Null bei der Summation eine Gruppe bilden, ergibt Satz 10 den klassischen Satz von *Pohlke*.

Andererseits aber sind die Dehnungen mit der Spur Null abgesehen von einer hinzutretenden Ähnlichkeit identisch mit den euklidischen Spiegelungen an einer Geraden. Es ist daher zweckmäßig, in diesem Spezialfall den folgenden Begriff einzuführen: Sei $\mathfrak{r}$ ein Vektor in der Ebene und ϱ' die Abbildung der Ebene, die entsteht, indem man jeden Vektor an $\mathfrak{r}$ spiegelt und im Verhältnis $|\mathfrak{r}|^2$ verlängert. (Streckspiegelung an $\mathfrak{r}$). Ist dann ϱ wie oben die zu $\mathfrak{r}$ gehörige Streckaffinität, so gilt $\varrho' = -\varrho$. Schreiben wir demnach die durch Satz 9 gegebene Zerlegung in der Form $-\pi = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$, so folgt:

Satz 12. *Ist in der Ebene ein Pohlke'sches Dreibein durch drei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ vom Rang 2 gegeben, so ergibt die Summe der Streckspiegelungen an $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ die Streckspiegelung am charakteristischen Vektor $\mathfrak{p}$.*

Damit ist zusammen mit der aus (7) folgenden Formel $2e^2 = |\mathfrak{a}_1|^2 + |\mathfrak{a}_2|^2 + |\mathfrak{a}_3|^2 - |\mathfrak{p}|^2$ die einfache Lösung der *Pohlke*'schen Aufgabe gefunden, die schon seit längerer Zeit bekannt ist[9]). Es sei uns erlaubt, dafür noch einen einfachen und vom bisherigen unabhängigen Beweis zu geben.

6. **Die einfachste Lösung der Pohlke'schen Aufgabe für drei Vektoren in der Ebene.** Wir verwenden nur § 1, Nr. 1 speziell Satz 2. Zunächst werden die in der Ebene gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ als komplexe Zahlen z_1, z_2, z_3 gedeutet. Dieser Weg ist zuerst von *Gauß* gezeigt und nach ihm von manchen Autoren beschritten worden. Bei der Transformation auf die Normalform gemäß Satz 2 erleiden die Zahlen z_1, z_2, z_3 die orthogonale Substitution (§ 1, Nr. 1, Formel 2):

$$z_i' = \sum_{k=1}^{3} s_{ik} z_k \quad . \tag{35}$$

Dabei ist bekanntlich $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ eine Invariante, also:

$$z_1'^2 + z_2'^2 + z_3'^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \quad . \tag{36}$$

In der Normalform ist aber $z_1'^2 + z_2'^2 = 0$, da $\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2'$ senkrecht zueinander und gleich lang sind; ferner ist $z_3' = z$, falls z die komplexe Zahl bedeutet, die zum charakteristischen Vektor $\mathfrak{p}$ gehört. Also folgt:

$$z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \quad . \tag{37}$$

---

[9]) Vgl. etwa: *E. Waelsch*, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Band 21 (1912), S. 21.

In analoger Weise ist $z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3$ eine Invariante und eine analoge Überlegung ergibt

$$2\,e^2 + |z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\,. \tag{38}$$

Wie wir in § 1, Nr. 1 bemerkt haben, ist durch (37) und (38) die Aufgabe gelöst. Es sei noch auf die schon von *Gauß* im Spezialfall der Normalprojektion gestellte und gelöste zahlentheoretische Aufgabe hingewiesen: Es sind in (37) z_1, z_2, z_3 als *Gauß*'sche ganze Zahlen so zu wählen, daß auch z als *Gauß*'sche ganze Zahl herauskommt.

Die Formeln (37) und (38) können auch mit den Mitteln der Elementarmathematik auf einfache Weise hergeleitet werden. Wir zeigen dies für (37). Zunächst würde man folgenden Hilfssatz beweisen:

In der komplexen Zahlenebene liege eine Ellipse mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt. Es seien ζ_1 und ζ_2 Endpunkte konjugierter Durchmesser und ε ein Brennpunkt. Dann gilt[10]:

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = \varepsilon^2\,. \tag{39}$$

Sodann hätte man die Parallelprojektionen z_1, z_2, z_3 von drei orthogonalen und gleichlangen Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ (die im Nullpunkt der Zahlenebene angreifen) auf die komplexe Zahlenebene zu betrachten. Dreht man $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ um die Achse $\mathfrak{e}_3$ bis $\mathfrak{e}_1$ in die Bildebene fällt, so wandern z_1 und z_2 als Endpunkte konjugierter Durchmesser auf einer Ellipse. Wegen des Hilfssatzes ändert sich $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ bei dieser Drehung nicht. Dann wird um den neuen Vektor $\mathfrak{e}_1$ gedreht, bis auch $\mathfrak{e}_2$ in die Bildebene zu liegen kommt. Auch dabei bleibt $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ ungeändert. Im Endzustand ist nun $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z^2$, wobei z die Projektion des Normalvektors zur Bildebene bedeutet.

Analog wird (38) bewiesen.

Wir erwähnen noch, daß der Hilfssatz auch dazu verwendet werden kann, um aus (37) die Größe z geometrisch zu konstruieren und damit die *Pohlke*'sche Aufgabe konstruktiv zu lösen. In der Tat läßt sich (37) auf mehrere Arten in zwei Gleichungen von der Form (39) zerlegen und damit auf Ellipsenkonstruktionen zurückführen. So ergeben sich mehrere Lösungen der *Pohlke*'schen Aufgabe unter denen sich auch die von *Scheffers* angegebene befindet.

---

[10]) Die Bestimmung von ε aus ζ_1 und ζ_2 in (39) (*Pythagoras* im Komplexen) ist also identisch mit der *Rytz*'schen Achsenkonstruktion der Ellipse.

(Eingegangen den 10. November 1937.)