Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 10 (1937-1938)

Artikel: Les solutions élémentaires d'une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre supérieur.

Autor: Théodoresco, N.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10993

Les solutions élémentaires d'une classe d'équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre supérieur

Par N. Théodoresco, Bucarest

§ 1. **Introduction.** L'examen des méthodes utilisées pour la résolution des problèmes aux limites posés par la Physique Mathématique montre, qu'en général, celles-ci reposent sur l'emploi d'une formule de Green, permettant le passage d'une intégrale étendue à une variété à m dimensions à une intégrale étendue à l'hypersurface limitant la variété en question. Cette formule fondamentale établie, il s'agit de trouver une fonction auxiliaire, *la solution élémentaire* (dont le modèle le plus connu est le potentiel élémentaire ou la fonction de Green de la théorie de l'équation de Laplace), telle qu'il soit possible d'isoler la valeur de l'inconnue en un point, en spéculant les avantages résultant de la présence d'une singularité appropriée.

C'est ce qui a permis à M. Hadamard de résoudre le problème de Cauchy pour les équations du second ordre du type hyperbolique normal. Ses méthodes ont mis en évidence à la fois le rôle du *conoïde caractéristique*, espèce de variété conique à génératrices courbes, figurant la marche d'une onde produite par un ébranlement localisé au moment initial dans le voisinage d'un point, et la nécessité de l'introduction de la solution élémentaire, dont la singularité est répandue sur tout le conoïde caractéristique de chaque point.

Ces remarques se retrouvent même dans l'étude des équations d'ordre supérieur à 2 et des systèmes d'équations aux dérivées partielles, bien que ce cas ait été relativement très peu étudié jusqu'à présent et envisagé plutôt de bien des manières particulières, en raison des difficultés qu'il présente.

Ainsi, *Fredholm* a considéré le cas des équations d'ordre quelconque n à cœfficients constants de la forme $f\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$ où $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ est une forme algébrique homogène de degré n en les variables π_i à coefficients constants[1]) et a, particulièrement, construit pour ces équations des solutions singulières en un point donné M comme $1|r$, r étant la distance

[1]) *I. Fredholm,* Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique (Acta Mathematica, T. 23, 1900, pp. 1—42).

MP à un point P variable de l'espace, en généralisant la théorie du potentiel aux équations d'équilibre d'un corps élastique. Ses recherches ont été étendues par *M. N. Zeilon*[1]), qui envisage aussi le cas où la forme $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ n'est pas définie.

M. G. Herglotz[2]) considère le cas où n = pair et l'équation $f = 0$, conçue comme une relation entre des coordonnées cartésiennes $x_i = \frac{\pi_i}{\pi_4}$ représente une surface composée de $n|2$ ovales entourant l'origine et ne se coupant pas entre elles.

Récemment, toutes ces recherches ont été reprises par M. *Fl. Bureau*[3]), qui les a étendues au cas d'une forme $f(\pi_1, \pi_2 \ldots \pi_p) = 0$ de degré n et à p variables à coofficients réels et constants.

Le cas général des équations linéaires complètes d'ordre quelconque, à plusieurs variables et à cœfficients variables n'a pas, à notre connaissance, été envisagé jusqu'ici, exception faite des recherches de M. *Holmgren*[4]) traitant du cas de l'équation d'ordre trois et des systèmes du premier ordre à 2 variables indépendantes, dont les résultats ont été retrouvés et précisés par M. *F. Rellich*[5]).

Dans un mémoire publié en 1936, nous avons considéré le cas des systèmes d'équations linéaires du premier ordre à coefficients variables jouissant d'une particularité qu'on rencontre fréquemment dans les applications physiques: la forme caractéristique $A(\pi_1, \ldots \pi_m)$ est décomposable en deux facteurs P et Q dont P quadratique en les variables $\pi_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}$, $G(x_1, x_2 \ldots x_m) = 0$ étant l'équation d'une variété caractéristique.

Nous avons calculé des solutions élémentaires algébriques singulières sur la nappe conoïdale caractéristique provenue du facteur quadratique

---

1) *N. Zeilon,* Das Fundamentalintegral der allgemeinen part. lin. Differentialgleichungen mit konst. Koeffizienten. (Archiv für Math., Astr. och Fysik, Bd. 6, No. 38, 1911 et Bd. 9, No. 18, 1913.)

2) *G. Herglotz,* Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit konst. Koeffizienten. (Leipzig Ber. 78, Bd. 1926.)

3) *Fl. Bureau,* Essai sur l'intégration des équations linéaires aux dér. part. (Mémoires de l'Ac. royale de Belgique 2e série, T. 15, 1936.)

Les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles. (Idem, t. 15, 1936).

4) *E. Holmgren,* Sur l'extension de la méthode d'intégration de Riemann. (Archiv für Math., t. 1, 1904). Sur les systèmes linéaires aux dér. part. (Idem t. 6, 1911.)

5) *F. Rellich,* Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode. (Math. Annalen, Bd. 103, 1930.)

$P(\pi_1, \dots \pi_m)$ et régulières dans l'intérieur du conoïde, y compris les nappes fournies par l'autre facteur $Q = 0$[1]).

Dans un autre mémoire[2]), nous nous sommes occupé des équations d'ordre supérieur à caractéristiques multiples, en montrant qu'il n'est pas en général possible d'obtenir des solutions élémentaires à singularité algébrique sur les nappes provenant du facteur quadratique multiple P de la forme caractéristique et en donnant la forme des équations qui admettent de telles solutions.

La présente recherche a pour but de conduire aux solutions élémentaires des équations d'ordre n à coefficients variables et telles que leur forme caractéristique A, considérée comme une forme algébrique homogène de degré n en les variables π_i, soit décomposable en deux facteurs P et Q dont $P = \Sigma p_{ij} \pi_i \pi_j$ est quadratique en π_i.

Les recherches de M. Hadamard ont montré qu'à toute équation du second ordre il convient de rattacher la géométrie d'un élément linéaire riemannien, savoir de celui qui provient de la forme adjointe de la forme caractéristique. En passant au cas des équations d'ordre supérieur, il serait nécessaire d'adopter un autre langage géométrique. La particularité que nous admettons ici est justifiée par cela qu'elle nous permet de développer nos calculs dans un espace de Riemann.

En chaque point M, le conoïde caractéristique se composera d'une nappe Γ fournie par l'équation $\Sigma p_{ij} \frac{\partial G}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial G}{\partial x_j} = 0$ et des nappes Ω provenues du facteur $Q = 0$.

Dans l'interprétation de M. Hadamard, une discontinuité produite au point M au moment initial, se propagera suivant la variété $\Gamma + \Omega$, mais s'il y a compatibilité, la propagation aura lieu suivant une seule, parfaitement déterminée, de ces nappes[3]).

Inversement, dans la supposition que l'équation régit un mouvement dans l'espace-temps $x_1 \dots x_m, t$, pour connaître ce mouvement à un instant t, il suffit de le connaître à l'instant initial $t = t_0$, non pas dans tout l'espace, mais sur la variété section du conoïde par le plan $t = t_0$, et „dans le cas où ce conoïde se compose de plusieurs nappes fermées, il faut considérer la plus extérieure de ces nappes".[4])

---

[1]) *N. Théodoresco,* Les solutions élémentaires d'une classe de systèmes d'équations aux dér. part. (Revue mathématique Interbalkanique, T. 1, 1936.)

[2]) *N. Théodoresco,* Sur les équations aux dérivées partielles linéaires à caractéristiques multiples (Journal de Mathématiques, 1937. Volume jubilaire de M. Hadamard).

[3]) Cf. *Hadamard,* Leçons sur la propagation des ondes, No. 307, p. 289.

[4]) Cf. *Hadamard,* loc. cit. No. 306, p. 290 et remarque (1), p. 291.

Notre solution élémentaire sera singulière sur la nappe conoïdale Γ provenue du facteur $P = 0$ de la forme caractéristique $A = P.\, Q$ et régulière dans tout l'intérieur du conoïde Γ, y compris les nappes provenues de $Q = 0$.

Nos calculs feront intervenir les variétés caractéristiques qui, comme on le sait, sont conservées dans toute transformation ponctuelle effectuée sur les variables indépendantes x_i. Il conviendra donc d'écrire les équations à étudier, que nous prendrons pour la simplicité de l'écriture du quatrième ordre, sous forme invariante par rapport à toute transformation ponctuelle, à l'exemple de M. *Th. de Donder*[1]) qui a montré comment on peut mettre toute équation linéaire d'un ordre quelconque sous une forme invariante à l'aide de dérivées variationnelles se rattachant à des principes extrémants de la Physique Mathématique. Nous montrerons que cet aspect invariantif des calculs s'impose dans cet ordre d'idées d'une manière naturelle, en raison de l'introduction de la forme métrique $\Sigma g_{ij} dx_i dx_j$ et de la géométrie de l'élément linéaire correspondant.

§ 2. **Forme invariantive de l'équation.** Nous partirons de l'équation

$$\Sigma A_{ijkl} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \Sigma B_{ijk} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \Sigma C_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma D_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + E \varphi = 0 \tag{1}$$

où A_{ijkl}, B_{ijk}, C_{ij}, D_i, E sont des fonctions analytiques des variables $x_1, x_2, \dots x_m$ dans la région où l'on étudie l'équation.

En désignant par $G(x_1, \dots x_m) = 0$ une variété caractéristique de (1), on sait que si l'on pose $\pi_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$, $G = 0$ sera une intégrale de l'équation

$$A \equiv \Sigma A_{ijkl} \pi_i \pi_j \pi_k \pi_l = 0 \,.$$

Si l'on considère les π_i comme des coordonnées cartésiennes, A peut être envisagé comme une forme algébrique en π_i homogène et du quatrième degré. Dans ce qui suit, nous supposerons A décomposable en deux facteurs quadratiques

$$P = \Sigma p_{ij} \pi_i \pi_j \quad \text{et} \quad Q = \Sigma q_{ij} \pi_i \pi_j \tag{2}$$

de sorte que $A = \Sigma p_{ij} q_{kl} \pi_i \pi_j \pi_k \pi_l$.

Les coefficients p_{ij}, q_{ij} ainsi que les B_{ijk}, C_{ij} sont symétriques en i, j, k.

---

[1]) *Th. de Donder*, Sur les équations linéaires aux dérivées partielles d'un ordre quelconque. (Journal de Mathématiques, T. VII, 1928, p. 173.)

Ceci posé, pour mettre (1) sous forme invariantive, M. de Donder part d'une forme différentielle quadratique supposée invariante, dont les coefficients fournissent les composantes du tenseur fondamental et les dérivées covariantes, à l'aide desquelles on forme des invariants qui remplacent les groupes des dérivées partielles de différents ordres dans l'équation proposée.

Le problème que nous poursuivons nous impose, comme on le verra plus loin, de choisir pour cette forme invariante l'expression $\Sigma g_{ij} dx_i dx_j$ où g_{ij} est le mineur de p_{ij} dans le discriminant Δ de la forme P, divisé par $\Delta \neq 0$.

Nous adopterons désormais les notations du calcul tensoriel, en écrivant x^α pour les x_i et en supprimant, selon les règles classiques, les signes sommatoires. Les indices co- et contrevariants seront désignés par des lettres grecques, de sorte que nous écrirons $g_{\alpha\beta}$ pour g_{ij}.

Par conséquent, la forme $P = g^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta$ étant donnée, nous formerons la forme différentielle

$$d\sigma^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad \text{avec} \quad \Delta = |g^{\alpha\beta}| \neq 0 \text{ et } D = |g_{\alpha\beta}| \neq 0 \tag{3}$$

supposée invariante dans toute transformation ponctuelle effectuée sur les x^α. Nous désignerons par φ_α, $\varphi_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\beta\gamma}$, etc. les dérivées covariantes succesives de la fonction $\varphi(x_1^1, \,..\, x^m)$ par rapport à la métrique (3).

Le groupe du quatrième ordre dans l'équation (1) sera remplacé par $g^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta}\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $g^{\alpha\beta}$ seront les composantes contrevariantes du tenseur fondamental g et $a^{\gamma\delta}$ les composantes du même type d'un autre tenseur du second ordre, qu'il faudra déterminer. Puisque d'après le lemme de Ricci $(g^{\alpha\beta})_\gamma = 0$, on aura

$$g^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta}\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = a^{\gamma\delta}(g^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta})_{\gamma\delta}\,.$$

Nous poserons

$$\Delta_2\varphi = g^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} \tag{4}$$

en remarquant que l'invariant $\Delta_2\varphi$ est le paramètre de Beltrami du second ordre de la fonction φ. En outre, l'expression

$$\Theta_2\varphi = a^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} \tag{5}$$

sera également un invariant, de sorte qu'on pourra écrire

$$g^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta}\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Theta_2\Delta_2\varphi\,. \tag{6}$$

L'équation dont nous allons nous occuper sera donc

$$\mathsf{F}(\varphi) \equiv \Theta_2 \Delta_2 \varphi + b^{\alpha\beta\gamma}\varphi_{\alpha\beta_\gamma} + c^{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} + d^\alpha\varphi_\alpha + e\varphi = 0 \tag{7}$$

où $b^{\alpha\beta\gamma}$, $c^{\alpha\beta}$, d^α sont des tenseurs contrevariants qu'il faut exprimer à l'aide des coefficients de l'équation (1), e un invariant.

Le passage de la forme (1) à la forme (7) se fera par l'introduction de termes convenables qu'on déduira ensuite, de manière à pouvoir identifier ces deux formes de la même équation. On aura

$$a^{\gamma\delta} = q_{\gamma\delta}$$

$$g^{\alpha\beta}a^{\gamma\delta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$b^{\alpha\beta\gamma} + 2a^{\gamma\delta}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\delta} - a^{\beta\gamma}g^{\lambda\delta}\begin{Bmatrix}\lambda\delta\\ \alpha\end{Bmatrix} = B_{\alpha\beta\gamma}$$

$$c^{\alpha\beta} + a^{\gamma\delta}\frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} - 2a^{\beta\delta}\frac{\partial}{\partial x^\delta}\left[g^{\lambda\gamma}\begin{Bmatrix}\lambda\gamma\\ \alpha\end{Bmatrix}\right] - 2b^{\lambda\beta\gamma}\begin{Bmatrix}\lambda\gamma\\ \alpha\end{Bmatrix} - b^{\alpha\lambda\gamma}\begin{Bmatrix}\lambda\gamma\\ \beta\end{Bmatrix} = C_{\alpha\beta}$$

$$d^\alpha - a^{\gamma\delta}\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}\left[g^{\lambda\beta}\begin{Bmatrix}\lambda\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}\right] - b^{\lambda\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}\begin{Bmatrix}\lambda\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}$$
$$+ 2b^{\lambda\beta\gamma}\begin{Bmatrix}\beta\gamma\\ \mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ \alpha\end{Bmatrix} - c^{\lambda\beta}\begin{Bmatrix}\lambda\beta\\ \alpha\end{Bmatrix} = D_\alpha$$

$$e = E$$

où les accolades sont les symboles connus de Christoffel de seconde espèce.

On se rend aisément compte que l'équation étant écrite sous l'une des formes (1) ou (7), il est facile de la ramener à l'autre par un calcul purement algébrique.

§ 3. **Solutions à singularité algébrique.** Nous allons chercher pour l'équation (7) une solution de la forme

$$\varphi = uG^p + v \tag{8}$$

où $G = 0$ est l'équation d'une surface régulière donnée, p un exposant constant, u et v des fonctions régulières[1]) même sur G.

A cette fin, nous aurons besoin de calculer certains symboles, ce que nous ferons ci-après. Posons

[1]) Une fonction sera régulière, si elle est continue avec ses dérivées partielles jusqu'à un certain ordre qui sera précisé de cas à cas.

$$\Delta_1 u = g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \quad \text{et} \quad \Theta_1 u = a^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \tag{9}$$

où u_α est la dérivée covariante de u (qui coïncide dans ce cas avec la dérivée partielle ordinaire).

Posons encore

$$\Delta(u, v) = g^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta \quad \text{et} \quad \Theta(u, v) = a^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta\,. \tag{10}$$

Nous écrirons $\dfrac{\partial G}{\partial x^\alpha} = \pi_\alpha, G_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta\gamma} = \pi_{\alpha\beta\gamma}$ etc.

En vertu de (9), on aura

$$\Delta_1 G = g^{\alpha\beta} \pi_\alpha \pi_\beta = P \quad \text{et} \quad \Theta_1 G = a^{\alpha\beta} \pi_\alpha \pi_\beta = Q\,. \tag{11}$$

En introduisant l'expression (8) de φ dans l'équation (7), le terme v donnera une contribution régulière $\mathsf{F}(v)$, tandis que le premier exigera le calcul des quantités suivantes:

Calcul de $\Theta_2 \Delta_2 u G^p$.

On aura d'abord

$$\begin{aligned}
&\Delta_2 u G^p = p(p-1)\,G^{p-2} Pu + pG^{p-1}[u\Delta_2 G + 2\Delta(u,G)] + G^p \Delta_2 u \\
\text{avec}\quad &\Delta_2 G^p = p(p-1)\,G^{p-2} P + pG^{p-1}\Delta_2 G \\
\text{et}\quad &\Theta_2 G^p = p(p-1) G^{p-2} Q + pG^{p-1}\Theta_2 G\,.
\end{aligned}$$

En appliquant l'opération Θ_2 à chacun des termes de $\Delta_2 u G^p$, on aura successivement

$$\begin{aligned}
\Theta_2[uPG^{p-2}] &= (p-2)(p-3) G^{p-4} uPQ + (p-2) G^{p-3}[uP\cdot\Theta_2 G \\
&\quad + 2\Theta(uP, G)] + G^{p-2}\Theta_2(uP) \\
\Theta_2[G^{p-1}u\cdot\Delta_2 G] &= (p-1)(p-2)\,G^{p-3} uP\cdot\Delta_2 G + (p-1)\,G^{p-2}[u\Delta_2 G \\
&\quad \cdot\Theta_2 G + 2\Theta(u\Delta_2 G, G)] + G^{p-1}\Theta_2(u\Delta_2 G) \\
\Theta_2[G^{p-1}\Delta(u,G)] &= (p-1)(p-2)\,G^{p-3} Q\cdot\Delta(u,G) \\
&\quad + (p-1) G^{p-2}[\Delta(u,G)\Theta_2 G + 2\Theta[\Delta(u,G),G]] + G^{p-1}\Theta_2[\Delta(u,G)] \\
\Theta_2(G^p\Delta_2 u) &= p(p-1) G^{p-2} Q\Delta_2 u + pG^{p-1}[\Delta_2 u\cdot\Theta_2 G \\
&\quad + 2\Theta(\Delta_2 u, G)] + G^p\cdot\Theta_2\Delta_2 u
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\Theta_2\Delta_2 uG^p = {} & p(p-1)(p-2)(p-3)G^{p-4}PQu \\ & + p(p-1)(p-2)G^{p-3}[uP\cdot\Theta_2 G + 2\Theta(uP,G) + \\ & \quad uQ\cdot\Delta_2 G + 2\,Q\Delta(u,G)] \\ & + p(p-1)G^{p-2}\,[\Theta_2(uP) + u\Delta_2 G\cdot\Theta_2 G + 2\Theta(u\Delta_2 G,G) + \\ & \quad 2\Delta(u,G)\Theta_2 G + 4\Theta[\Delta(u,G),G] + Q\cdot\Delta_2 u] \\ & + pG^{p-1}\,[\Theta_2(u\Delta_2 G) + 2\Theta_2[\Delta(u,G)] + \Delta_2 u\cdot\Theta_2 G + 2\Theta(\Delta_2 u,G)] \\ & + G^p\Theta_2\Delta_2 u.\end{aligned}$$

Calcul de $b^{\alpha\beta\gamma}(uG^p)_{\alpha\beta\gamma}$.

La dérivation covariante fera intervenir des formes algébriques en π_α qu'il sera commode de désigner par des symboles particuliers. Ainsi, nous poserons

$$B = b^{\alpha\beta\gamma}\pi_\alpha\pi_\beta\pi_\gamma\,. \tag{13}$$

Ce sera un invariant. Par conséquent $\dfrac{\partial B}{\partial\pi_\alpha} = 3b^{\alpha\beta\gamma}\pi_\beta\pi_\gamma$ sera un vecteur contrevariant. Nous écrirons

$$\frac{\partial B}{\partial\pi_\alpha} = B^\alpha, \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial\pi_\alpha\partial\pi_\beta} = 6b^{\alpha\beta\gamma}\pi_\gamma = B^{\alpha\beta}. \tag{14}$$

$B^{\alpha\beta}$ sera un tenseur doublement contrevariant. Enfin, on posera $B^{\alpha\beta\gamma} = 6\,b^{\alpha\beta\gamma}$ ce qui nous permettra d'écrire

$$\begin{aligned}b^{\alpha\beta\gamma}(uG^p)_{\alpha\beta\gamma} = {} & p(p-1)(p-2)\,G^{p-3}Bu + p(p-1)G^{p-2} \\ & [B^\alpha u_\alpha + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}u] \\ & + pG^{p-1}[\tfrac{1}{6}B^{\alpha\beta\gamma}\pi_{\alpha\beta\gamma}u + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}u_\alpha\pi_{\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}] + \\ & \tfrac{1}{6}G^p B^{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha\beta\gamma}.\end{aligned}$$

Calcul de $c^{\alpha\beta}(uG^p)_{\alpha\beta}$.

En posant comme ci-dessus

$$C = c^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta, \tag{15}$$

on aura $C^\alpha = 2\,c^{\alpha\beta}\pi_\beta$ et puisque C est un invariant, C^α sera un vecteur contrevariant. On écrira de même $C^{\alpha\beta} = 2\,c^{\alpha\beta}$, ce qui donnera

$$c^{\alpha\beta}(uG^p)_{\alpha\beta} = p(p-1)G^{p-2}uC + pG^{p-1}[C^\alpha u_\alpha + \tfrac{1}{2}C^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}u] + \tfrac{1}{2}G^p C^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}.$$

Calcul de $d^\alpha(uG)_\alpha$.

En posant

$$D = d^\alpha\pi_\alpha \tag{16}$$

on aura $D^\alpha = d^\alpha$ et

$$d^\alpha (uG)_\alpha = pG^{p-1} u D + G^p D^\alpha u_\alpha .$$

Pour conserver l'uniformité de l'écriture, nous poserons en plus $e = E$.

Expression de $\mathsf{F}(uG^p)$.

L'introduction des termes calculés précédemment dans l'équation (7) donne

$$\begin{aligned}\mathsf{F}(uG^p) \equiv\ & p(p-1)(p-2)(p-3)G^{p-4} P \cdot Q u + p(p-1)(p-2)G^{p-3} \\ & [uP \cdot \Theta_2 G + 2\Theta(uP,G) + uQ \cdot \Delta_2 G \\ & + 2Q \cdot \Delta(u,G) + Bu] + p(p-1)G^{p-2}[\Theta_2(uP) + u\Delta_2 G \cdot \Theta_2 G + \\ & 2\Theta(u\Delta_2 G, G) \\ & + 2\Delta(u,G)\Theta_2 G + 4\Theta[\Delta(u,G),G] + Q\Delta_2 u + B^\alpha u_\alpha + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}u + \\ & Cu] + pG^{p-1}[\Theta_2(u\Delta_2 G) + 2\Theta_2[\Delta(u,G)] + \Delta_2 u \cdot \Theta_2 G \\ & + 2\Theta[\Delta_2 u . G] + \tfrac{1}{6}B^{\alpha\beta\gamma}\pi_{\alpha\beta\gamma}u + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}u_\alpha \pi_{\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta} + \\ & \tfrac{1}{2}C^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}u + C^\alpha u_\alpha + Du] + G^p \mathsf{F}(u) = -\mathsf{F}(v).\end{aligned}$$

Premier terme de la solution singulière. Dans le voisinage de $G = 0$, on voit que si les cas $p = 0, 1, 2, 3$ sont exclus (ce qui d'ailleurs conduirait à des solutions régulières), le premier terme du développement est d'un ordre de grandeur supérieur aux suivants et l'expression de $\mathsf{F}(uG^p)$ ne saurait être identiquement nulle, ni même être une fonction régulière, comme il en est du second membre, tant que le coefficient de ce premier terme n'est pas nul sur $G = 0$[1]), c'est-à-dire si l'on n'a pas $A = P \cdot Q = 0$. Il faudra donc que $G = 0$ soit une solution de l'une des équations $P = 0$ ou $Q = 0$, *par conséquent, que cette variété soit choisie parmi les caractéristiques de l'équation.* Résultat bien en accord avec le théorème de Le Roux et Delassus[2]).

Nous prendrons G parmi les intégrales de $P = 0$. L'équation

$$P\left(\frac{\partial G}{\partial x^1}, \frac{\partial G}{\partial x^2}, \dots \frac{\partial G}{\partial x^m}\right) = 0$$

sera ou bien une identité en $x^1, x^2, \dots x^m$, ou tout au moins une conséquence de $G = 0$. Nous dirons avec M. de Donder[3]) que dans le premier cas $G(x^1, x^2, \dots x^m)$ définit une *fonction d'onde absolue* et que $G(x^1, \dots x^m) = 0$

[1]) Cf. *Hadamard,* Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, p. 105.

[2]) Cf. *Hadamard,* idem p. 102.

[3]) *Th. de Donder,* Théorie invariantive du Calcul des variations, p. 178. (II^e Edition, Gauthier-Villars, Paris 1935.)

est une *onde absolue*; dans le second cas G sera dite une *fonction d'onde relative* et $G = 0$ définira une *onde relative*. L'onde $G = 0$ étant donc absolue ou relative, on aura en tout cas

$$P = P'G \tag{17}$$

P' étant une fonction régulière même sur $G = 0$.

En tenant compte de (17), l'équation donnant $\mathsf{F}(uG^p)$ devient

$$\begin{aligned}\mathsf{F}(uG^p) \equiv\ & p(p-1)(p-2)G^{p-3}[(p-3)P'Qu + 2u\Theta(P,G) + uQ\cdot\Delta_2 G \\ & + 2Q\Delta(u,G) + Bu] + p(p-1)G^{p-2}[(p-2)P'u\Theta_2 G \\ & + 2(p-2)P'\Theta(u,G) + u\Theta_2 P + 2\Theta(u,P) + u\Delta_2 G\cdot\Theta_2 G \\ & + 2u\Theta(\Delta_2 G, G) + 2\Delta_2 G\cdot\Theta(u,G) + 2\Delta(u,G)\cdot\Theta_2 G \\ & + 4\Theta[\Delta(u,G),G] + Q\Delta_2 u + B^\alpha u_\alpha + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}u + Cu] \\ & + pG^{p-2}[(p-1)P'\cdot\Theta_2 u + 2\Theta(u,\Delta_2 G) + \Delta_2 G\cdot\Theta_2 u + 2\Theta_2[\Delta(u,G)] \\ & + \Theta_2 G\cdot\Delta_2 u + 2\Theta(\Delta_2 u, G) + [\mathsf{F}(G) - EG]u + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}u_\alpha\pi_{\beta\gamma} \\ & + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta} + C^\alpha u_\alpha] + G^p\mathsf{F}(u) = -\mathsf{F}(v).\end{aligned} \tag{18}$$

Exprimons maintenant que sur $G = 0$, le terme en G^{p-3} s'annule aussi pour que le développement puisse être au moins régulier dans le voisinage de $G = 0$, comme le second membre.

On aura donc

$$2Q\Delta(u,G) + [(p-3)P'Q + 2u\Theta(P,G) + Q\cdot\Delta_2 G + B]u = 0$$

sur $G = 0$ et puisque

$$\Delta(u,G) = g^{\alpha\beta}u_\alpha\pi_\beta = \tfrac{1}{2}P^\alpha u_\alpha = \tfrac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \text{ et } \Theta(P,G) = P'Q + G\cdot\Theta(P',G),$$

ce sera une équation aux dérivées partielles du premier ordre en u

$$\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial u}{\partial x^\alpha} + \left[P'(p-1) + \Delta_2 G + \frac{B}{Q}\right]u = 0 \tag{19}$$

dont l'intégration exige l'introduction des courbes définies par les équations

$$\frac{dx^1}{\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial P}{\partial \pi_1}} = \frac{dx^2}{\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial P}{\partial \pi_2}} = \cdots\cdots = \frac{dx^m}{\tfrac{1}{2}\dfrac{\partial P}{\partial \pi_m}} = dt\ .$$

Les quantités $\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha}$ sont les paramètres directeurs de la transversale à $G = 0$, mais comme cette variété est une caractéristique, cette transversale, qui est la direction de la génératrice de contact entre le plan $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ et le cône caractéristique du point x^α, qui lui-même est tangent à G, sera à son tour tangente à G. De sorte que toute courbe issue d'un point de $G = 0$ *est entièrement située sur cette surface.* Ces courbes sont en fait *les caractéristiques de l'équation* $P(\pi_1, \ldots, \pi_m) = 0$ et on en peut compléter les équations en écrivant

$$\frac{dx^\alpha}{\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha}} = \frac{d\pi_\beta}{-\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x^\beta}} = dt \tag{20}$$

t étant un paramètre. On peut donc les déterminer sans connaître l'équation $G = 0$ par l'intégration du système (20). On appelle ces courbes *les bicaractéristiques*[1]) de (7). La surface $G = 0$ étant donnée, on peut la considérer comme lieu de bicaractéristiques, par exemple des bicaractéristiques issues des points d'une courbe non bicaractéristique (problème de Cauchy). Sur chacune des bicaractéristiques de $G = 0$, qui dépendent de $m - 2$ paramètres, l'équation aux dérivées partielles (19) se réduit à une équation différentielle ordinaire et peut être intégrée facilement. On aura de la sorte la valeur de u sur $G = 0$.

Ces courbes s'introduisent donc naturellement dans ce genre de recherches. Nous ne pousserons pas plus loin ces considérations et passerons à l'objet principal de ce travail qui est la construction de la solution singulière algébrique de (7) *non pas sur une variété réguliere, mais sur le conoïde caractéristique*, c'est-à-dire de la solution élémentaire dont le rôle est bien connu dans le problème de Cauchy, grâce aux travaux de M. Hadamard sur l'intégration des équations du second ordre hyperboliques.

§ 4. **Le conoïde caractéristique.** Le lieu des bicaractéristiques issues d'un point $M(x^1, \ldots, x^m)$ est une surface caractéristique de (7) ayant en ce point une singularité conique et admettant, comme on le sait, comme cône tangent en M le cône caractéristique de ce point. Pour déterminer cette surface, appelée *conoïde caractéristique du point M*, nous prendrons avec M. Hadamard[2]) un système de m quantités $p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0m}$ remplissant la condition

[1]) Cf. *Hadamard,* Problème de Cauchy, pp. 105—106.

[2]) *Hadamard,* Problème de Cauchy, pp. 116 et suiv.

$$P(p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{0m}) = g^{\alpha\beta} p_{0\alpha} p_{0\beta} = 0 \tag{21}$$

et avec les conditions initiales

$$p_\alpha = p_{0\alpha} \qquad x^\alpha = a^\alpha \quad \text{pour} \quad s = 0,$$

nous formerons les courbes intégrales du système

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial p_\alpha}\,; \qquad \frac{dp_\alpha}{ds} = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial x^\alpha}. \tag{22}$$

Les rapports mutuels des $p_{0\alpha}$ dépendant, sous la condition (21), de $m - 2$ paramètres, le lieu de la courbe ainsi obtenue sera une hypersurface de l'espace $E_m(x^1, x^2, \ldots, x^m)$.

Les géodésiques. Pour obtenir cette surface à point conique, M. Hadamard construit d'abord toutes les courbes issues de M, intégrales du système (22), qu'elles vérifient ou non la condition (21), c'est-à-dire sans en choisir celles qui sont des bicaractéristiques de (7). Ces courbes peuvent être interprétées comme les géodésiques de l'élément linéaire

$$\Pi(x^1, x^2, \ldots, x^m;\ dx^1, dx^2, \ldots, dx^m) = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta. \tag{23}$$

En effet, en posant $\dot{x}^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{dt}$, l'intégrale

$$\mathsf{L} = \int \sqrt{\Pi(x^\alpha;\ \dot{x}^\alpha)}\, dt$$

où t est un paramètre quelconque, représente la longueur d'un arc de courbe dans l'espace E_m. Les extrémales de cette intégrale seront les géodésiques de l'élément linéaire de l'espace. Leurs équations différentielles sont

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sqrt{\Pi}}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial\sqrt{\Pi}}{\partial x^\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots m)$$

qui peuvent être transformées, comme on le sait, en

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial\Pi}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{24}$$

avec $\Pi =$ constante, comme intégrale première.

Ces deux formes sont en général équivalentes, mais sur les bicaractéristiques le système primitif cesse d'avoir un sens, de sorte que c'est par une certaine extension du sens du mot géodésique qu'on peut les considérer comme telles: ce sont les géodésiques de longueur nulle de l'espace E_m. Par l'introduction des quantités

$$p_\alpha = \tfrac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{x}^\alpha} \tag{25}$$

on peut éliminer les $\dot{x}^\alpha$ des équations (24). La forme $\Pi(x^\alpha; \dot{x}^\alpha)$ se transforme en $P(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, adjointe de Π divisée par le discriminant D de Π et les m équations lagrangiennes (24) se transforment dans les $2\,m$ équations hamiltoniennes (22), admettant de nouveau l'intégrale $P = \text{const.}$

Ces considérations montrent la nécessité d'adopter dans l'étude de la solution la métrique (23), par rapport à laquelle nous avons mis notre équation sous forme invariantive. Elle nous indique la géométrie qui se rattache naturellement à toute question relative à l'équation (7).

Considérons à partir de ce moment exclusivement les géodésiques issues d'un point donné $M(a^\alpha)$ pour lequel s sera pris nul. Une géodésique est déterminée par les valeurs initiales $p_{0\alpha}$ (pour $s = 0$) des p_α. Les équations (22) se conservant en remplaçant s par λs et p_α par $\frac{p_\alpha}{\lambda}$ (donc $p_{0\alpha}$ par $\frac{p_{0\alpha}}{\lambda}$), posons

$$P_\alpha = s p_\alpha\,; \qquad q_\alpha = s p_{0\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{26}$$

et remarquons que les quantités $p_\alpha, p_{0\alpha}, s$ se présenteront seulement dans les $2m$ combinaisons (26). Les formules d'intégration seront donc de la forme

$$\begin{aligned} x^\alpha &= x^\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_m\,; a^1, \ldots, a^m) \\ P_\alpha &= P_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_m\,; a^1, \ldots, a^m). \end{aligned} \tag{27}$$

Elles ne changent pas par permutation des x^α avec a^α et des P_α avec $-q_\alpha$, ce qui revient à changer s en $-s$ dans les équations canoniques. Aussi longtemps qu'il sera possible de joindre un point $N(x^1, x^2, \ldots, x^m)$ à M par une géodésique unique, c'est-à-dire tant qu'il sera possible de tirer les q_α en fonction des x^α des équations (27), les considérations précédentes restent valables et nous supposerons que, M étant donné, la région R où se trouvent M et N est telle que cette validité persiste.

Equation du conoïde. Formons la quantité

$$\Gamma = P(P_1, P_2, \ldots, P_m\,;\; x^1, \ldots, x^m) = P(q_1, q_2, \ldots, q_m\,;\; a^1, \ldots, a^m) \quad (28)$$

qui est une forme quadratique en q à cœfficients constants et une fonction holomorphe des x^α dont le développement suivant les puissances des $x^\alpha - a^\alpha$ commence par des termes du second degré. On aura

$$\Gamma = \Pi(x^\alpha - a^\alpha\,;\; a^\alpha) + \ldots$$

car le développement de $x^\alpha - a^\alpha$ commence par $\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial q^\alpha}$.

Γ est le carré de la distance géodésique du point N au point M, mesurée à l'aide de la métrique Π. On aura

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha} = \pi_\alpha = 2P_\alpha = 2sp_\alpha \quad (29)$$

et la fonction Γ sera une intégrale de l'équation aux dérivées partielles

$$\Gamma = P\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^1},\; \frac{1}{2}\frac{\partial \Gamma}{\partial x^2},\; \ldots .\; \frac{\partial \Gamma}{\partial x^m}\,;\; x^1, \ldots .\; x^m\right)$$

donc

$$P\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha}\,;\; x^\alpha\right) = 4\Gamma. \quad (30)$$

L'équation du conoïde sera, par conséquent, $\Gamma = 0$.

Si l'on prend pour coordonnées cartésiennes les variables q_α (ou les variables normales de Riemann), on obtient un système de coordonnées géodésiques au point M, dans lequel, on sait que les géodésiques issues de M seront représentées par des lignes droites et le conoïde caractéristique par un cône quadratique ordinaire (réel si la forme P est indéfinie). Quand l'indice d'inertie de la forme P est 1, ce cône se compose de deux nappes et divise l'espace en trois régions, dont deux *intérieures* et l'une *extérieure*. Nous écrirons les coefficients de P de manière à avoir toujours $\Gamma > 0$ à l'intérieur du conoïde, lorsqu'il est réel. De même, nous utiliserons la première série d'équations (22) sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha} = 4s\frac{dx^\alpha}{ds} \qquad \text{avec} \qquad P = P(\pi_\alpha\,;\, x^\alpha) = 4\Gamma.$$

Les conoïdes et le transport parallèle. On sait que dans le cas particulier où les coefficients $g_{\alpha\beta}$ sont constants, les géodésiques sont des droites et les conoïdes caractéristiques se réduisent à des cônes ordinaires égaux. Le passage d'un de ces cônes de sommet M au cône caractéristique d'un autre point P se fait par une *translation* définie à l'aide du vecteur MP. Si ce vecteur est intérieur au cône caractéristique de M, le cône de sommet P est lui-même intérieur au cône M et contient dans son intérieur le support du vecteur MP.

Ces propriétés élémentaires convenablement modifiées, subsistent même dans le cas général d'un espace courbe. En effet, considérons le conoïde du point M et soit P un point intérieur à l'une de ses deux nappes (dans la supposition qu'il s'agit d'un conoïde réel). Menons la géodésique MP. Cette géodésique sera tout entière intérieure au conoïde M, car si elle traversait la nappe en question en un point m, on pourrait mener la bicaractéristique Mm et les points M et m seraient reliés par deux géodésiques, ce qui est impossible dans la région R.

Décrivons le conoïde de sommet P (que nous désignerons par P) et considérons-en la nappe qui ne contient pas à l'intérieur le point M (et qui coïncide avec la nappe choisie du conoïde M, lorsque P tend vers M). *La géodésique MP restera aussi intérieure à ce conoïde* pour des raisons analogues. Prenons maintenant sur une géodésique quelconque issue de M et intérieure un point P infiniment voisin de M et considérons le conoïde de ce point. On sait que si l'on transporte par parallélisme au sens de M. Levi-Civita le long d'une génératrice Mm de M le vecteur MP, le point P décrit une génératrice PP' du conoïde P, de sorte que les deux conoïdes voisins coupent sur la direction MP ainsi transportée des segments égaux, mesurés dans la métrique $\Pi(x^\alpha; dx^\alpha)$ adoptée[1]. La figure $MPM'P'$ est donc un parallélogramme élémentaire et l'on sait que le vecteur PP' coïncide avec celui qui résulterait du transport parallèle de MM' le long de MP.[2] Par conséquent, *les génératrices des conoïdes M et P se correspondent par parallélisme.* On peut donc dire que *le conoïde P résulte de M par transport parallèle.*

Montrons maintenant que *le conoïde P est intérieur au conoïde M.* Cela résulte d'une évaluation de la valeur de la fonction $\Gamma(x^\alpha; a^\alpha)$ lorsque le point x décrit le conoïde P voisin de M. En désignant par t un paramètre positif définissant le point P sur la géodésique MP, par $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-2}$ des

---

[1]) *M. Mathisson.* Eine neue Lösungsmethode für Differentialgleichungen von normalem hyperbolischem Typus (Math. Annalen Bd. 107, p. 405, 1933).

[2]) *Levi-Civita.* Der absolute Differentialkalkül, p. 47.

paramètres exprimant la direction de la bicaractéristique PN, par t le paramètre déterminant N sur cette génératrice, on a

$$\Gamma(x^\alpha\,;\,a^\alpha) = tw(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-2}, s)$$

$w(t, \lambda_\alpha, s)$ étant régulier et différent de zéro tant que N n'est pas voisin de P. Par conséquent Γ conserve le même signe que t et la géodésique de longueur nulle PN ne peut traverser le conoïde M.[1])

Le même résultat peut être obtenu en supposant que la génératrice PP' traverserait le conoïde M en un point p. Le vecteur mp déduit de MP par transport parallèle conserverait sa longueur et, forcément le signe de Γ. Il devra donc être intérieur au conoïde m de sommet m. Mais puisque mp coupe le conoïde M et que p est infiniment voisin de m, le vecteur mp sera situé dans le plan tangent à ce conoïde en m. Or, ce plan tangent étant commun aux deux conoïdes M et m, tangents en m le long de Mm, on est conduit à une absurdité, car mp doit être *intérieur* au conoïde m, qui est, dans le voisinage de m situé *entièrement* d'un côté de ce plan tangent, tout comme son cône tangent, et n'a en commun avec ce plan que la direction de la génératrice Mm en m.

Ces propriétés des conoïdes caractéristiques expliquent pourquoi dans la résolution du problème de Cauchy pour une équation hyperbolique du second ordre, la connaissance des données de Cauchy non pas sur toute une surface ouverte S mais seulement sur la portion S_0 que découpe sur elle le conoïde d'un point M, est suffisante pour la détermination de l'intégrale requise au point M et en tout point intérieur au conoïde. En effet, les portions que les conoïdes des points intérieurs découpent sur S sont intérieures à S_0, de sorte que la connaissance des données sur S_0 est toujours suffisante.

§ 5. **La solution élémentaire.** Supposons maintenant qu'il s'agisse de trouver une solution élémentaire de l'équation (7), c'est-à-dire une solution de la forme

$$\varphi = u\Gamma^p \tag{31}$$

où Γ est le premier membre de l'équation du conoïde caractéristique du point donné $M(a^\alpha)$, le point $N(x^\alpha)$ étant supposé variable.

Joignons N à M par une géodésique et écrivons l'équation (18) (en prenant $v = 0$) le long de cette courbe. En faisant ensuite varier le point N, nous déterminerons la solution (31) dans toute une portion de la région R.

---

[1]) *Hadamard.* Problème de Cauchy, pp. 172, 176.

On aura, *en tenant compte de ce que* $P' = 4$, en vertu de (30) et qu'il faut remplacer partout P par 4Γ:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}(u\Gamma^p) \equiv\ & p(p-1)(p-2)\Gamma^{p-3}[4(p-3)Qu + 8u\Theta(\Gamma,\Gamma) + uQ\Delta_2\Gamma \\
& + 2Q\Delta(u,\Gamma) + Bu] \\
& + p(p-1)\Gamma^{p-2}[4(p-2)u\Theta_2\Gamma + 8(p-2)\Theta(u,\Gamma) + 4u\Theta_2\Gamma \\
& + 8\Theta(u,\Gamma) + u\Delta_2\Gamma\cdot\Theta_2\Gamma + 2u\Theta[\Delta_2\Gamma,\Gamma] + 2\Delta_2\Gamma\cdot\Theta(u,\Gamma) \\
& + 2\Delta(u,\Gamma)\cdot\Theta_2\Gamma + 4\Theta[\Delta(u,\Gamma),\Gamma] + Q\cdot\Delta_2 u + B^\alpha u_\alpha \\
& + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}u + Cu] \qquad\qquad (32) \\
& + p\Gamma^{p-1}[4(p-1)\Theta_2 u + 2\Theta(u,\Delta_2\Gamma) + \Delta_2\Gamma\cdot\Theta_2 u + 2\Theta_2[\Delta(u,\Gamma)] \\
& + \Theta_2\Gamma\cdot\Delta_2 u + 2\Theta(\Delta_2 u,\Gamma) + [\mathsf{F}(\Gamma) - E\Gamma]u + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}u_\alpha\pi_{\beta\gamma} \\
& + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}u_{\alpha\beta} + C^\alpha u_\alpha] \\
& + \Gamma^p\mathsf{F}(u) = 0.
\end{aligned}
$$

Mais on a

$$\Theta(\Gamma,\Gamma) = a^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta = Q \tag{33}$$

$$2\Delta(u,\Gamma) = 2g^{\alpha\beta}u_\alpha\pi_\beta = P^\alpha u_\alpha = \frac{\partial P}{\partial\pi_\alpha}\frac{\partial u}{\partial x^\alpha} = 4s\frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds} = 4s\frac{du}{ds}.$$

Quant à $\Delta_2\Gamma$, nous le développerons suivant les puissances de s, somme suit:

$$\Delta_2\Gamma = g^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} - \left\{ {\alpha\beta \atop \lambda} \right\}\pi_\lambda\right].$$

Or

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} = \frac{\partial^2\Pi(x^\alpha - a^\alpha;\, a^\alpha)}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} + \ldots = 2g_{\alpha\beta} + \ldots,$$

donc

$$\Delta_2\Gamma = 2g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\left\{ {\alpha\beta \atop \lambda} \right\}\pi_\lambda + \ldots = 2m + \ldots \tag{34}$$

parce qu'à l'origine $s = 0$ et les π_λ sont donc nuls.

Dans l'équation (32), le premier terme est d'un ordre de grandeur supérieur aux suivants dans le voisinage de $s = 0$; par conséquent, pour que la somme soit identiquement nulle, il faut avoir sur $\Gamma = 0$

$$4(p-3)Qu + 2u\Theta(\Gamma,\Gamma) + uQ\cdot\Delta_2\Gamma + 2Q\Delta(u,\Gamma) + Bu = 0$$

et, compte tenu des relations (33)

$$4s\frac{du}{ds} + \left[4(p-1) + \Delta_2\Gamma + \frac{B}{Q}\right]u = 0 \tag{35}$$

avec la supposition $Q \neq 0$.

Remarquons que les quantités $\pi_\alpha = 2sp_\alpha$ étant de l'ordre d'infinitude de s, B sera de l'ordre de s^3 et Q de celui de s^2. Par conséquent, le développement de $\frac{B}{Q}$ suivant les puissances de s commencera par des termes du premier ordre, au moins. Nous écrirons

$$4(p-1)+\Delta_2\Gamma+\frac{B}{Q} = 4(p-1)+2m+4s\,\mathsf{L}(s) \tag{36}$$

la fonction $\mathsf{L}(s)$ étant holomorphe en s et l'équation (35) se met sous la forme

$$\frac{d\log u}{ds}+p-1+\frac{m}{2}+\mathsf{L}(s)=0\,.$$

Pour qu'elle admette une intégrale régulière à l'origine, il faut que $p=-\frac{m}{2}+1-p_1$ où p_1 est un entier positif ou nul. Dans ce cas, u sera dans le voisinage de $s=0$ de l'ordre de s^{p_1}. Nous prendrons $p_1=0$ et par conséquent

$$p=-\frac{m}{2}+1\,. \tag{37}$$

On aura

$$u=e^{-\int_0^s \mathsf{L}(s)ds} \tag{38}$$

en prenant $u=1$ au point M.

Notre calcul nous a donc fourni *les valeurs de u sur le conoïde*. Pour avoir les valeurs de u dans l'espace, il nous faudra utiliser un procédé d'itération en partant d'une fonction $\overset{0}{u}$ définie dans l'espace et coïncidant avec u sur le conoïde.

Le terme $\overset{0}{u}$. A cet effet, nous joindrons le point arbitraire $N(x^\alpha)$ à M par une géodésique. Les x^α seront des fonctions holomorphes des q_α. On pourra également se donner la direction initiale de la géodésique par $m-1$ paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$; le point N sera alors fixé par m paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ et s sur la géodésique MN.

Ceci posé, nous supposerons l'équation (35) vérifiée par une fonction $\overset{0}{u}$ dans tout l'espace où Γ est défini, avec $Q \neq 0$.

Nous admettons que dans l'intérieur du conoïde Γ, la fonction $Q(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) \neq 0$ (sauf au sommet M). C'est donc dans l'intérieur du conoïde Γ que $\overset{0}{u}$ devra vérifier l'équation (35). On aura

$$\overset{0}{u}=e^{-\int_0^s \mathsf{L}(s)ds}\,.$$

La quantité $\mathsf{L}(s)$ peut être écrite sous une forme remarquable. En effet, on a[1])

$$\Delta_2\Gamma = 2\left[1 + s\frac{d(\log \varrho J)}{ds}\right] \tag{39}$$

où $\varrho = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}$ $\qquad \Delta =$ discriminant de P.

$J = \dfrac{D(x^1, \ldots x^m)}{D(\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}, s)}$. $\qquad$ J sera de l'ordre de s^{m-1} .

Par conséquent

$$\mathsf{L}(s) = \frac{B}{4sQ} + \tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\log\frac{\varrho J}{s^{m-1}}\right) .$$

En désignant par $\left(\dfrac{\varrho J}{s^{m-1}}\right)_0$ la limite de $\dfrac{\varrho J}{s^{m-1}}$ quand N tend vers M sur la géodésique NM, on pourra écrire[2])

$$\overset{0}{u} = \sqrt{\left(\frac{\varrho J}{s^{m-1}}\right)_0 : \frac{\varrho J}{s^{m-1}}} \quad e^{-\frac{1}{4}\int\limits_0^s \frac{B}{sQ}ds} . \tag{40}$$

La fonction $\overset{0}{u}\Gamma^p$ ne sera pas, en général, la solution élémentaire cherchée. Elle ne vérifiera pas l'équation (32) et l'on aura

$$\mathsf{F}(\overset{0}{u}\Gamma^p) = p(p-1)\Gamma^{p-2}\mathsf{A}_0(\overset{0}{u}) + p\Gamma^{p-1}\mathsf{B}_0(\overset{0}{u}) + \Gamma^p\mathsf{F}(\overset{0}{u}) \tag{41}$$

en posant

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_0(\overset{0}{u}) = {} & [[4(p-1) + \Delta_2\Gamma]\overset{0}{u} + 2\Delta(\overset{0}{u},\Gamma)]\Theta_2\Gamma + Q\Delta_2\overset{0}{u} \\
& + 2\Theta[2\Delta(\overset{0}{u},\Gamma) + [4(p-1) + \Delta_2\Gamma]\overset{0}{u}, \Gamma] + B^\alpha\overset{0}{u}_\alpha + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{0}{u}\pi_{\alpha\beta} + C\overset{0}{u} \\
\mathsf{B}_0(\overset{0}{u}) = {} & [\mathsf{F}(\Gamma) - E\Gamma]\overset{0}{u} + [4(p-1) + \Delta_2\Gamma]\Theta_2\overset{0}{u} + \Delta_2\overset{0}{u}\cdot\Theta_2\Gamma + 2\Theta(\Delta_2\overset{0}{u}, \Gamma) \\
& + 2\Theta(\overset{0}{u}, \Delta_2\Gamma) + 2\Theta_2[\Delta(\overset{0}{u},\Gamma)] + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}\overset{0}{u}_\alpha\pi_{\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{0}{u}_{\alpha\beta} + C^\alpha\overset{0}{u}_\alpha .
\end{aligned}$$

En vertu de l'équation (35) vérifiée par $\overset{0}{u}$, l'expression de A_0 devient

$$\mathsf{A}_0 = Q\cdot\Delta_2\overset{0}{u} - \frac{B}{Q}\overset{0}{u}\cdot\Theta_2\Gamma - 2\Theta\left[\frac{B}{Q}\overset{0}{u}, \Gamma\right] + B^\alpha\overset{0}{u}_\alpha + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{0}{u}\pi_{\alpha\beta} + C\overset{0}{u} .$$

---

[1]) Cf. *Hadamard*, Problème de Cauchy, p. 127.

[2]) Cf. *Hadamard*, idem p. 373.

En même temps, dans l'expression de B_0

$$\begin{aligned}\Theta_2[2\Delta(\overset{0}{u},\Gamma)] &= \Theta_2[2\Delta(\overset{0}{u},\Gamma)+[4(p-1)+\Delta_2\Gamma]\overset{0}{u}]-\Theta_2[[4(p-1)+\Delta_2\Gamma]\overset{0}{u}] \\ &= -\Theta_2\left[\frac{B}{Q}\overset{0}{u}\right]-\Theta_2[[4(p-1)+\Delta_2\Gamma]\overset{0}{u}]\,.\end{aligned}$$

Or,

$$\Theta_2[[4(p-1)+\Delta_2\Gamma]\overset{0}{u}] = [4(p-1)+\Delta_2\Gamma]\Theta_2\overset{0}{u}+2\Theta[\overset{0}{u},\Delta_2\Gamma]+\overset{0}{u}\Theta_2\Delta_2\Gamma$$

et

$$\mathsf{F}(\Gamma)-E\Gamma = \Theta_2\Delta_2\Gamma+\tfrac{1}{6}B^{\alpha\beta\gamma}\pi_{\alpha\beta\gamma}+\tfrac{1}{2}C^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}+D^{\alpha}\pi_{\alpha}$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_0 = \Delta_2\overset{0}{u}\cdot\Theta_2\Gamma+2\Theta(\Delta_2\overset{0}{u},\Gamma)-\Theta_2\left[\frac{B}{Q}\overset{0}{u}\right]+[\tfrac{1}{6}B^{\alpha\beta\gamma}\pi_{\alpha\beta\gamma}+\tfrac{1}{2}C^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}+D^{\alpha}\pi_{\alpha}]\overset{0}{u} \\ +\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}\overset{0}{u}_{\alpha}\pi_{\beta\gamma}+\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{0}{u}_{\alpha\beta}+C^{\alpha}\overset{0}{u}_{\alpha}.\end{aligned}$$

Soient $\overset{0}{u}, \overset{1}{u}, \dots, \overset{j}{u} \dots$ des fonctions de $x^1, \dots, x^m$; $a^1, \dots, a^m$, régulières dans R (sauf peut-être au point M). Nous poserons en général

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_j(\overset{j}{u}) = {} & [[4(p+j-1)+\Delta_2\Gamma]\overset{j}{u}+2\Delta(\overset{j}{u},\Gamma)]\Theta_2\Gamma+Q\cdot\Delta_2\overset{j}{u} \\ & +2\Theta[2\Delta(\overset{j}{u},\Gamma)+[4(p+j-1]+\Delta_2\Gamma]\overset{j}{u},\Gamma]+B^{\alpha}\overset{j}{u}_{\alpha}+\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{j}{u}\pi_{\alpha\beta}+C\overset{j}{u}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_j(\overset{j}{u}) = {} & [\mathsf{F}(\Gamma)-E\Gamma]\overset{j}{u}+[4(p+j-1)+\Delta_2\Gamma]\Theta_2\overset{j}{u}+\Delta_2\overset{j}{u}\cdot\Theta_2\Gamma+2\Theta(\Delta_2\overset{j}{u},\Gamma) \\ & +2\Theta(\overset{j}{u},\Delta_2\Gamma)+2\Theta_2[\Delta(\overset{j}{u},\Gamma)]+\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}\overset{j}{u}_{\alpha}\pi_{\beta\gamma}+\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{j}{u}_{\alpha\beta}+C^{\alpha}\overset{j}{u}_{\alpha}.\end{aligned}$$

Le terme $\overset{1}{u}$. Puisque $\overset{0}{u}$ ne fournit pas la solution désirée, il faut évidemment que u soit de la forme $u = \overset{0}{u}+\overset{1}{u}\Gamma$, de sorte que nous essaierons une solution du type

$$\varphi = \overset{0}{u}\Gamma^{p}+\overset{1}{u}\Gamma^{p+1}.$$

En introduisant cette expression dans l'équation (32) et en tenant compte de (41), il vient

$$\begin{aligned}\mathsf{F}(\overset{0}{u}\Gamma^p+\overset{1}{u}\Gamma^{p+1}) &= (p+1)p(p-1)\Gamma^{p-2}Q\left[4s\frac{d\overset{1}{u}}{ds}+\left[4p+\Delta_2\Gamma+\frac{B}{Q}\right]\overset{1}{u}+\frac{1}{(p+1)Q}\mathsf{A}_0(\overset{0}{u})\right]\\ &+(p+1)p\Gamma^{p-1}\left[\mathsf{A}_1(\overset{1}{u})+\frac{1}{p+1}\mathsf{B}_0(\overset{0}{u})\right]\\ &+(p+1)\Gamma^{p}\left[\mathsf{B}_1(\overset{1}{u})+\frac{1}{p+1}\mathsf{F}(\overset{0}{u})\right]+\Gamma^{p+1}\mathsf{F}(\overset{1}{u})=0\,.\end{aligned}$$

Sur $\Gamma = 0$, il faudra avoir, comme précédemment

$$4s\frac{d\overset{1}{u}}{ds}+\left[4p+\Delta_2\Gamma+\frac{B}{Q}\right]\overset{1}{u}+\frac{1}{(p+1)Q}\mathsf{A}_0(\overset{0}{u})=0 \tag{42}$$

équation différentielle du premier ordre, qui nous fournira sur chaque bicaractéristique issue de M les valeurs de $\overset{1}{u}$. Nous déterminerons une fonction $\overset{1}{u}$ à l'aide de cette équation supposée vérifiée dans tout l'intérieur du conoïde Γ.

A cette fin, écrivons, en vertu de (35)

$$4s\left[\overset{0}{u}\frac{d\overset{1}{u}}{ds}-\overset{1}{u}\frac{d\overset{0}{u}}{ds}\right]+4\overset{0}{u}\overset{1}{u}+\frac{\overset{1}{u}}{(p+1)Q}\mathsf{A}_0(\overset{0}{u})=0$$

et en divisant par $(\overset{0}{u})^2$

$$4\frac{d}{ds}\left(s\frac{\overset{1}{u}}{\overset{0}{u}}\right)=-\frac{1}{(p+1)Q\overset{0}{u}}\mathsf{A}_0(\overset{0}{u})\,.$$

Pour intégrer cette équation, il sera nécessaire de faire une estimation de l'ordre infinitésimal du second membre dans le voisinage de l'origine.

Ordre infinitésimal de $\overset{0}{u}_\alpha$.

Dans l'expression de $\mathsf{L}(s)=\dfrac{\Delta_2\Gamma-2m}{4s}+\dfrac{B}{4sQ}$ le terme

$$\frac{\Delta_2\Gamma-2m}{4s}=-g^{\alpha\beta}\left\{{\alpha\beta \atop \lambda}\right\}\frac{\pi_\lambda}{s}+\ldots=-2g^{\alpha\beta}\left\{{\alpha\beta \atop \lambda}\right\}p_\lambda+\ldots$$

étant une fonction holomorphe des q_α et, par conséquent, des $x^\alpha-a^\alpha$, nous nous occuperons surtout du développement de $\dfrac{B}{sQ}$ et de $e^{-\int_0^s\frac{B}{4Qs}ds}$.

On aura

$$B = b^{\alpha\beta\gamma}\pi_\alpha\pi_\beta\pi \;\; = 8\,s^3 b^{\alpha\beta\gamma}p_\alpha p_\beta p_\gamma$$
$$Q = a^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta = 4\,s^2 a^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta .$$

Les fonctions $b^{\alpha\beta\gamma}$, $a^{\alpha\beta}$ étant holomorphes en $x^\alpha - a^\alpha$ et, par conséquent, en q_α, on pourra développer $b^{\alpha\beta\gamma}$, $a^{\alpha\beta}$ suivant les puissances des q_α.

$$b^{\alpha\beta\gamma} = b_0^{\alpha\beta\gamma} + b_1^{\alpha\beta\gamma}s + \dots$$
$$a^{\alpha\beta} = a_0^{\alpha\beta} + a_1^{\alpha\beta}s + \dots$$

les $b_i^{\alpha\beta\gamma}$, $a_i^{\alpha\beta}$ étant des polynomes homogènes en $p_{0\alpha}$ du degré i. Par conséquent

$$B = 8s^3(b_0^{\alpha\beta\gamma} + b_1^{\alpha\beta\gamma}s + \dots)p_\alpha p_\beta p_\gamma + 8s^3(B_0 + B_1 s + \dots)$$

avec

$$B_i = b_i^{\alpha\beta\gamma}p_\alpha p_\beta p_\gamma$$

et

$$Q = 4s^2(a_0^{\alpha\beta} + a_1^{\alpha\beta}s + \dots)p_\alpha p_\beta = 4s^2(Q_0 + Q_1 s + \dots)$$

avec $Q_i = a_i^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta$ et *en supposant* $Q_0 \neq 0$.

Il viendra donc

$$\frac{B}{4sQ} = \frac{1}{2}\,\frac{B_0 + B_1 s + \dots}{Q_0 + Q_1 s + \dots} = \frac{1}{2}\left[\frac{B_0}{Q_0} + \frac{B_1 Q_0 - Q_1 B_0}{Q_0^2}s + \dots\right]$$

ce qui entraîne

$$\frac{1}{4}\int_0^s \frac{B}{sQ}ds = \frac{1}{2}\left[\frac{B_0}{Q_0}s + 2\frac{B_1 Q_0 - Q_1 B_0}{Q_0^2}s^2 + \dots\right].$$

Mais

$$\frac{B_0}{Q}s = \frac{b_0^{\alpha\beta\gamma}p_\alpha p_\beta p_\gamma}{a_0^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta}s = \frac{1}{2}\,\frac{b_0^{\alpha\beta\gamma}\pi_\alpha\pi_\beta\pi_\gamma}{a_0^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta} .$$

De même

$$\frac{B_1 Q_0 - Q_1 B_0}{Q_0^2}s^2 = \frac{b_1^{\alpha\beta\gamma}p_\alpha p_\beta p_\gamma\cdot a_0^{\delta\varepsilon}p_\delta p_\varepsilon - b_0^{\alpha\beta\gamma}p_\alpha p_\beta p_\gamma\cdot a_1^{\delta\varepsilon}p_\delta p_\varepsilon}{(a_0^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta)^2}$$
$$= \frac{b_1^{\alpha\beta\gamma}\pi_\alpha\pi_\beta\pi_\gamma\cdot a_0^{\delta\varepsilon}\pi_\delta\pi_\varepsilon - b_0^{\alpha\beta\gamma}\pi_\alpha\pi_\beta\pi_\gamma\cdot a_1^{\delta\varepsilon}\pi_\delta\pi_\varepsilon}{(a_0^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta)^2} .$$

En dérivant $\overset{0}{u}$ par rapport à x^α, on aura

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} e^{-\frac{1}{4}\int_0^s \frac{B}{sQ} ds} = - e^{-\frac{1}{4}\int_0^s \frac{B}{sQ} ds} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{1}{4}\frac{b_0^{\alpha\beta\gamma}\pi_\alpha\pi_\beta\pi_\gamma}{a_0^{\alpha\beta}\pi_\alpha\pi_\beta} + \ldots\right]$$

ce qui nous permet d'établir que l'ordre de cette fonction à l'origine sera au moins zéro, car la dérivée par rapport à x^α du premier terme, dont l'ordre infinitésimal est le plus réduit, est une fonction dont le développement commence par des termes du degré zéro en $x^\alpha - a^\alpha$. Il en sera de même

de l'ordre de $\overset{0}{u}$, ce qui apparaît clairement en dérivant l'expression

$$\overset{0}{u} = e^{-\int_0^s \frac{\Delta_2 \Gamma - 2m}{4s} ds}\, e^{-\frac{1}{4}\int_0^s \frac{B}{sQ} ds}$$

car le premier facteur, holomorphe en $x^\alpha - a^\alpha$, est égal à l'unité à l'origine, tandis que la dérivée du second commence par un terme indépendant de s.

Ordre de $\mathsf{A}_0(\overset{0}{u})$. On aura successivement

$$\frac{B}{Q}\overset{0}{u}\cdot\Theta_2\Gamma \text{ de l'ordre de } s$$

$$\Theta\left[\frac{B}{Q}\overset{0}{u}, \Gamma\right] = a^{\alpha\beta}\left[\frac{B}{Q}\overset{0}{u}\right]_\alpha \pi_\beta \quad \text{de l'ordre de } s$$

et puisque l'ordre de $\overset{0}{u}_{\alpha\beta}$ sera -1,

$Q\cdot\Delta_2\overset{0}{u}$ sera de l'ordre 1 également.

L'ordre de $B^\alpha\overset{0}{u}_\alpha$ et de $C\overset{0}{u}$ sera 2. Celui de $B^{\alpha\beta}\overset{0}{u}\pi_{\alpha\beta}$ sera 1.

Par conséquent, l'ordre minimum de $\mathsf{A}_0(\overset{0}{u})$ à l'origine sera 1.

Expression et ordre de $\overset{1}{u}$. En revenant maintenant à l'équation qui donne $\overset{1}{u}$, observons que l'ordre infinitésimal de $\dfrac{1}{(p+1)Q\overset{0}{u}}\mathsf{A}_0(\overset{0}{u})$ sera -1, de sorte qu'on pourra écrire

$$\frac{d}{ds}\left(s\frac{\overset{1}{u}}{\overset{0}{u}}\right) = -\frac{1}{4(p+1)Q\overset{0}{u}}\mathsf{A}_0(\overset{0}{u}) = \frac{a}{s} + \mathsf{H}_1(s)$$

a étant une fonction ne dépendant que des $p_{0\alpha}$, $\mathsf{H}_1(s)$ étant une fonction holomorphe de s. Il vient, par conséquent

$$\frac{d}{ds}\left[s\frac{\overset{1}{u}}{\overset{0}{u}} - a\log s\right] = \mathsf{H}_1(s)$$

et, par une quadrature

$$s\frac{\overset{1}{u}}{\overset{0}{u}} - a\log s = \int_0^s \mathsf{H}_1(s)\,ds$$

d'où

$$\overset{1}{u} = \overset{0}{u}\left[\frac{a}{s}\log s + \frac{1}{s}\int_0^s \mathsf{H}_1(s)\,ds\right].$$

En même temps, on constate que l'ordre infinitésimal de $\overset{1}{u}$ à l'origine sera celui de $s^{-1}\log s$, donc supérieur à -2, ce qui nous assure que pour $s = 0$, le terme $\overset{1}{u}\Gamma$ est nul quelle que soit la géodésique sur laquelle on s'approche de l'origine.

Le terme général $\overset{j}{u}$. Il est évident que l'expression précédente de φ ne peut constituer une solution de l'équation (7), vu qu'elle n'annule pas tous les termes de $\mathsf{F}(\overset{0}{u}\Gamma^p + \overset{1}{u}\Gamma^{p+1})$. Essayons donc une solution de la forme

$$\varphi = \overset{0}{u}\Gamma^p + \overset{1}{u}\Gamma^{p+1} + \cdots + \overset{j}{u}\Gamma^{p+j}. \tag{43}$$

On aura, compte tenu des équations vérifiées par $\overset{0}{u}, \overset{1}{u}, \ldots, \overset{j-1}{u}$,

$$\begin{aligned}\mathsf{F}(\overset{0}{u}\Gamma^p + \overset{1}{u}\Gamma^{p+1} + \ldots + \overset{j}{u}\Gamma^{p+j}) \equiv {} & (p+j)(p+j-1)(p+j-2)\Gamma^{p+j-3}Q\Big\{4s\frac{d\overset{j}{u}}{ds} + \overset{j}{u}\left[4(p+j-1) + \Delta_2\Gamma + \frac{B}{Q}\right] \\ & + \frac{1}{(p+j)Q}\left[\mathsf{A}_{j-1} + \frac{1}{p+j-1}\mathsf{B}_{j-2} + \frac{1}{(p+j-1)(p+j-2)}\mathsf{F}(\overset{j-3}{u})\right]\Big\} \\ & + (p+j)(p+j-1)\Gamma^{p+j-2}\left[\mathsf{A}_j + \frac{1}{p+j}\mathsf{B}_{j-1} + \frac{1}{(p+j)(p+j-1)}\mathsf{F}(\overset{j-2}{u})\right] \\ & + (p+j)\Gamma^{p+j-1}\left[\mathsf{B}_j + \frac{1}{p+j}\mathsf{F}(\overset{j-1}{u})\right] + \Gamma^{p+j}\mathsf{F}(\overset{j}{u}) = 0\end{aligned} \tag{44}$$

où les quantités A_j et B_j sont celles que nous avons définies plus haut. Nous omettrons d'en écrire l'argument $\overset{j}{u}$, chaque fois qu'une confusion ne sera pas possible.

Sur $\Gamma=0$, il faudra comme précédemment avoir:

$$4s\frac{d\overset{j}{u}}{ds}+\left[4(p+j-1)+\Delta_2\Gamma+\frac{B}{Q}\right]\overset{j}{u}+\frac{1}{(p+j)Q}\left[\mathsf{A}_{j-1}+\frac{1}{p+j-1}\mathsf{B}_{j-2}+\frac{1}{(p+j-1)(p+j-2)}\mathsf{F}(\overset{j-3}{u})\right]=0 \tag{45}$$

équation que nous allons écrire, en vertu de (35),

$$4s\left[\overset{0}{u}\frac{d\overset{j}{u}}{ds}-\overset{j}{u}\frac{d\overset{0}{u}}{ds}\right]+4j\overset{j}{u}\overset{0}{u}+\frac{\overset{0}{u}}{(p+j)Q}\left[\mathsf{A}_{j-1}+\frac{1}{p+j-1}\mathsf{B}_{j-2}+\frac{1}{(p+j-1)(p+j-2)}\mathsf{F}(\overset{j-3}{u})\right]=0$$

et, en multipliant par $\dfrac{s^{j-1}}{4(\overset{0}{u})^2}$

$$\frac{d}{ds}\left[s^j\frac{\overset{j}{u}}{\overset{0}{u}}\right]=-\frac{s^{j-1}}{4(p+j)Q\overset{0}{u}}\left[\mathsf{A}_{j-1}+\frac{1}{p+j-1}\mathsf{B}_{j-2}+\frac{1}{(p+j-1)(p+j-2)}\mathsf{F}(\overset{j-3}{u})\right]=0\,. \tag{46}$$

Ceci obtenu, nous allons considérer l'équation (46) dans tout l'intérieur de $\Gamma=0$ afin de construire le terme d'ordre j du développement de u dans l'espace.

Calcul de A_j et de B_j. Les expressions de A_j et de B_j se simplifient sensiblement en tenant compte de l'équation (45). On a, en effet

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_j=&-\frac{1}{(p+j)Q}\left[(p+j)B\overset{j}{u}+\mathsf{A}_{j-1}+\frac{1}{p+j-1}\mathsf{B}_{j-2}+\frac{1}{(p+j-1)(p+j-2)}\mathsf{F}(\overset{j-3}{u})\right]\Theta_2\Gamma\\&-2\Theta\left[\frac{1}{(p+j)Q}\left[(p+j)B\overset{j}{u}+\mathsf{A}_{j-1}+\frac{1}{p+j-1}\mathsf{B}_{j-2}+\frac{1}{(p+j-1)(p+j-2)}\mathsf{F}(\overset{j-3}{u})\right],\Gamma\right]\\&+Q\cdot\Delta_2\overset{j}{u}+B^\alpha\overset{j}{u}_\alpha+\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{j}{u}\pi_{\alpha\beta}+C\overset{j}{u}\end{aligned}$$

et si on pose

$$\mathsf{L}_j=\frac{1}{(p+j)Q}\left[(p+j)B\overset{j}{u}+\mathsf{A}_{j-1}+\frac{1}{p+j-1}\mathsf{B}_{j-2}+\frac{1}{(p+j-1)(p+j-2)}\mathsf{F}(\overset{j-3}{u})\right] \tag{47}$$

il vient

$$\mathsf{A}_j=Q\cdot\Delta_2\overset{j}{u}-\mathsf{L}_j\cdot\Theta_2\Gamma-2\Theta[\mathsf{L}_j,\Gamma]+B^\alpha\overset{j}{u}_\alpha+\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{j}{u}\pi_{\alpha\beta}+C\overset{j}{u}\,. \tag{48}$$

En remarquant que dans l'expression de B_j

$$\Theta_2[2\Delta(\overset{j}{u},\Gamma)]=-\Theta_2\big[[4(p+j-1)+\Delta_2\Gamma]\overset{j}{u}\big]-\Theta_2[\mathsf{L}_j]\;;$$

que

$$\Theta_2[[4(p+j-1)+\Delta_2\Gamma]u]=[4(p+j-1)+\Delta_2\Gamma]\Theta_2\overset{j}{u}+2\Theta[\Delta_2\Gamma,\overset{j}{u}]+\overset{j}{u}\Theta_2\Delta_2\Gamma$$

et que

$$\mathsf{F}(\Gamma)-E\Gamma=\Theta_2\Delta_2\Gamma+\tfrac{1}{6}B^{\alpha\beta\gamma}\pi_{\alpha\beta\gamma}+\tfrac{1}{2}C^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}+D^{\alpha}\pi_{\alpha},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_j=\Delta_2\overset{j}{u}\cdot\Theta_2\Gamma-\Theta_2[\mathsf{L}_j]+2\Theta[\Delta_2\overset{j}{u},\Gamma]+[\tfrac{1}{6}B^{\alpha\beta\gamma}\pi_{\alpha\beta\gamma}+\tfrac{1}{2}C^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}+D^{\alpha}\pi_{\alpha}]u\\+\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}\overset{j}{u}\pi_{\beta\gamma}+\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{j}{u}_{\alpha\beta}+C^{\alpha}\overset{j}{u}_{\alpha}\,.\end{aligned}\tag{49}$$

Expression et ordre de $\overset{j}{u}$. On aura, en particulier

$$\mathsf{A}_1=Q\cdot\Delta_2\overset{1}{u}-\mathsf{L}_1\cdot\Theta_2\Gamma-2\Theta[\mathsf{L}_1,\Gamma]+B^{\alpha}\overset{1}{u}_{\alpha}+\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{1}{u}\pi_{\alpha\beta}+C\overset{1}{u}$$

où

$$\mathsf{L}_1=\frac{1}{(p+1)Q}[(p+1)B\overset{1}{u}+\mathsf{A}_0]\,.$$

L'ordre minimum de L_1 sera donc celui de s^{-1} et A_1 sera infini à l'origine comme $Q\cdot\Delta_2\overset{1}{u}$, soit comme $s^{-1}\log s$.

Puisque

$$\mathsf{B}_0=\Delta_2\overset{0}{u}\cdot\Theta_2\Gamma-\Theta_2[\mathsf{L}_0]+2\Theta[\Delta_2\overset{0}{u},\Gamma]+\cdots$$

et

$$\mathsf{L}_0=\frac{B\overset{0}{u}}{Q}$$

l'ordre de L_0 sera 1 et B_0 se comportera à l'origine comme s^{-1}. Par conséquent, dans l'équation

$$\frac{d}{ds}\left[s^2\frac{\overset{2}{u}}{\overset{0}{u}}\right]=-\frac{s}{4(p+2)Q\overset{0}{u}}\left[\mathsf{A}_1+\frac{1}{p+1}\mathsf{B}_0\right],$$

l'ordre infinitésimal minimum du second membre sera celui de $s^{-2}\log s$. On écrira

$$\frac{s}{4(p+2)Q\overset{0}{u}}\left[\mathsf{A}_1+\frac{1}{p+1}\mathsf{B}_0\right]=\mathsf{J}_2(s)+s\mathsf{H}_2(s)$$

où l'on a noté $\mathsf{J}_2(s)=\dfrac{d}{ds}\mathsf{K}_2(s)$, la fonction $\mathsf{K}_2(s)$ étant à l'origine infinie comme $s^{-1}\log s$ tout au plus. $\mathsf{H}_2(s)$ étant holomorphe en s, on aura donc

$$\frac{d}{ds}\left[s^2 \frac{\overset{2}{u}}{\overset{0}{u}} - \mathsf{K}_2(s)\right] = s\,\mathsf{H}_2(s)$$

et

$$s^2 \frac{\overset{2}{u}}{\overset{0}{u}} - \mathsf{K}_2(s) = \int_0^s s\,\mathsf{H}_1(s)\,ds$$

en prenant la valeur du premier membre à l'origine égale à zéro, d'où

$$\overset{2}{u} = \overset{0}{u}\left[s^{-2}\mathsf{K}_2(s) - \frac{1}{s^2}\int_0^s s\,\mathsf{H}_2(s)\,ds\right].$$

L'ordre infinitésimal minimum de $\overset{2}{u}$ sera celui de $s^{-3}\log s$. Il est facile de montrer, de proche en proche, que dans le voisinage de $s = 0$ on a les comportements suivants:

$$\begin{array}{lll} \mathsf{L}_2 \text{ comme } s^{-2}\log s, & \mathsf{A}_2 \text{ comme } s^{-3}\log s, & \mathsf{B}_1 \text{ comme } s^{-3}\log s \\ \mathsf{L}_3 \text{ comme } s^{-5}\log s, & \mathsf{A}_3 \text{ comme } s^{-5}\log s, & \mathsf{B}_2 \text{ comme } s^{-5}\log s \end{array}$$

et $\overset{3}{u}$ comme $s^{-5}\log s$, $\quad \overset{4}{u}$ comme $s^{-7}\log s$.

En général, A_{j-1} sera infini comme $s^{-2j+3}\log s$, B_{j-2} comme $s^{-2j+3}\log s$, $\overset{j-1}{u}$ comme $s^{-2j+3}\log s$, ce qui nous permettra d'écrire l'équation (46) sous la forme

$$\frac{d}{ds}\left[s^j \frac{\overset{j}{u}}{\overset{0}{u}} - \mathsf{K}_j(s)\right] = s^{j-1}\mathsf{H}_j(s)$$

où la fonction $\mathsf{K}_j(s)$, obtenue en calculant la primitive (sans addition de constante arbitraire) des termes singuliers du second membre, est infinie à l'origine comme $s^{-j+1}\log s$. Par conséquent, on aura

$$\overset{j}{u} = \overset{0}{u}\left[s^{-j}\mathsf{K}_j(s) + s^{-j}\int_0^s s^{j-1}\mathsf{H}_j(s)\,ds\right] \tag{50}$$

et l'on voit que l'ordre infinitésimal de $\overset{j}{u}$ à l'origine est celui de $s^{-2j+1}\log s$.

§ 6. **Restrictions nécessaires et remarques sur la position des nappes du conoïde caractéristique.** La présence des facteurs $p+1$, $p+2$, .., $p+j$ aux dénominateurs exige qu'on n'ait jamais $p+j=0$, donc $-\frac{m}{2}+j+1=0$ ce qui montre qu'*il faudra restreindre tous les résultats qui précèdent au* *cas ou le nombre des variables indépendantes est impair.* Nous supposerons donc dans tous les raisonnements faits jusqu'ici

$$m = 2n + 1. \tag{51}$$

D'autre part, la condition $Q\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x^1}, \frac{\partial \Gamma}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial \Gamma}{\partial x^m}\right) \neq 0$ à l'intérieur du conoïde peut trouver une interprétation géométrique. L'équation aux dérivées partielles $P(\pi_1, \ldots, \pi_m; x^1, \ldots, x^m) = 0$ définit en chaque point $M(a^1, a^2, \ldots, a^m)$ un conoïde caractéristique. Si l'on envisage, au même titre, l'équation $Q(\omega_\alpha; x^\alpha) = 0$ où $\omega_\alpha = \frac{\partial \Omega}{\partial x^\alpha}$, on obtient un second conoïde de même sommet M. L'ensemble des nappes $\Gamma + \Omega$ forme le conoïde complet du point M.

Or, pour chaque système de valeurs $a^1, \ldots, a^m$ de $x^1, \ldots, x^m$, l'équation $P(\pi_\alpha; a^\alpha) = 0$ fournit une relation entre les paramètres directeurs des plans tangents aux différentes variétés caractéristiques passant par M, en tant qu'intégrales de l'équation $P(\pi_\alpha; x^\alpha) = 0$. Cette relation représente en coordonnées tangentielles π_α un cône du second degré, auquel doit être tangente toute caractéristique passant par M. En particulier, le conoïde Γ admettra ce cône comme cône tangent en M.

De même, l'équation $Q(\omega_\alpha; a^\alpha) = 0$ définira en coordonnées tangentielles ω_α un second cône auquel sont tangentes les multiplicités caractéristiques définies par l'équation aux dérivées partielles $Q = 0$ et passant par M. Le conoïde admettra ce cône comme cône tangent en M.

Supposons d'abord les coefficients constants. Dans ce cas, les conoïdes Γ et Ω coïncident avec leurs cônes tangents, qui sont deux cônes quadratiques ordinaires. (Notre raisonnement n'exige d'ailleurs pas que le cône Ω soit lui-même quadratique.) Si dans l'équation en coordonnées tangentielles de Ω on remplace les ω_α par $\frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha}$, on obtient, *en coordonnées cartésiennes, la polaire réciproque de Ω par rapport à Γ*, soit

$$Q\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha}\right) = 0.$$

Par conséquent, dire que $Q\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x^\alpha}\right) \neq 0$ à l'intérieur de Γ, c'est dire que la polaire réciproque de Ω se trouve à l'extérieur de Γ et, par suite, que Ω *est intérieur à Γ.* On voit donc, que dans le cas des coefficients constants, la condition imposée à Q de ne jamais s'annuler à l'intérieur de $\Gamma = 0$ exprime le fait que *de toutes les nappes coniques caractéristiques définies* *par l'équation $A = 0$ en chaque pont M, il faut que Γ soit la plus extérieure,* résultat bien en accord avec la remarque de M. Hadamard relative à la propagation des phénomènes ondulatoires sur la nappe la plus extérieure[1]).

Dans le cas des coefficients variables, le phénomène se passe de la même manière dans le voisinage du sommet, mais il est facile de montrer que *si le conoïde Ω est, au voisinage du sommet M intérieur au conoïde Γ de même sommet, il le restera, tout au moins tant que le point courant $N(x^\alpha)$ se trouvera dans la région* R. En effet, supposons qu'en un point N la bicaractéristique MN de Ω, intérieure à Γ dans la portion MN, traverse le conoïde Γ. On sait que la tangente à MN en N est la génératrice du cône caractéristique du type Ω attaché au point N, cône qui est, comme on l'a vu, intérieur au cône correspondant du type Γ. Mais ce dernier cône, tangent au conoïde Γ en N, reste tout entier dans l'intérieur de Γ, conformément aux résultats du § 4. Par conséquent, il sera impossible de trouver la tangente à MN dirigée vers l'extérieur de Γ.

§ 6. **Remarque sur un cas particulier.** Supposons qu'il s'agisse de l'équation particulière

$$\Theta_2 \Delta_2 u = 0 .$$

On aura

$$\mathsf{L}(s) = \tfrac{1}{2}\frac{d}{ds}\log\frac{\varrho J}{s^{m-1}}$$

et

$$\overset{0}{u} = \sqrt{\left(\frac{\varrho J}{s^{m-1}}\right)_0 : \frac{\varrho J}{s^{m-1}}} \,.$$

Ensuite

$$\mathsf{L}_0(\overset{0}{u}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathsf{A}_0 = Q\Delta_2 \overset{0}{u} .$$

Par conséquent,

$$4\frac{d}{ds}\left(s\frac{\overset{1}{u}}{\overset{0}{u}}\right) = -\frac{1}{p+1}\Delta_2\overset{0}{u}$$

et comme $\Delta_2 u$ est holomorphe en s

$$u = -\frac{\overset{0}{u}}{s}\int_0^s \frac{1}{4(p+1)}\frac{\Delta_2\overset{0}{u}}{\overset{0}{u}}\,ds .$$

---

[1]) Cf. *Hadamard*, Propagation des ondes, p. 291.

(La fin de cet article paraîtra dans le prochain fascicule.)

De même

$$\mathsf{B}_0 = \varDelta_2 \overset{0}{u} \cdot \Theta_2 \Gamma + 2\Theta(\varDelta_2 \overset{0}{u}) \,,\ \mathsf{L}_1 = \frac{1}{p+1} \varDelta_2 \overset{0}{u}$$

et

$$\mathsf{A}_1 = Q \cdot \varDelta_2 \overset{0}{u} - \frac{1}{p+1} \varDelta_2 \overset{0}{u} \cdot \Theta_2 \Gamma - \frac{2}{p+1} \Theta(\varDelta_2 \overset{0}{u}, \Gamma)$$

ce qui entraîne

$$\frac{d}{ds}\left(s^2 \frac{\overset{2}{u}}{\overset{0}{u}}\right) = -\frac{s}{4(p+2)} \varDelta_2 \overset{1}{u} \quad \text{et} \quad \overset{2}{u} = -\frac{\overset{0}{u}}{4(p+2)s^2} \int_0^s \frac{s \varDelta_2 \overset{0}{u}}{\overset{0}{u}} \, ds \,.$$

Enfin

$$\mathsf{B}_1 = -\frac{1}{p+1} \Theta_2 \varDelta_2 \overset{0}{u} + 2\Theta[\varDelta_2 \overset{0}{u}, \Gamma] + \varDelta_2 \overset{1}{u} \cdot \Theta_2 \Gamma ,\ \mathsf{L}_2 = \frac{1}{p+2} \varDelta_2 \overset{1}{u}$$

$$\mathsf{A}_2 = -\frac{1}{p+2} [\varDelta_2 \overset{1}{u} \cdot \Theta_2 \Gamma + 2\Theta(\varDelta_2 \overset{1}{u}, \Gamma)] + Q \cdot \varDelta_2 \overset{2}{u}$$

et

$$\mathsf{F}(\overset{0}{u}) = \Theta_2 \varDelta_2 \overset{0}{u}$$

donnent

$$\frac{d}{ds}\left(s^3 \frac{\overset{3}{u}}{\overset{0}{u}}\right) = -\frac{s^2}{4(p+3)} \varDelta_2 \overset{2}{u} \,.$$

On constate donc que dans ce cas particulier notre solution élémentaire coïncide avec celle de M. Hadamard pour l'équation du second ordre

$$\varDelta_2 u = 0 \,.$$

L'influence de l'opérateur Θ_2 y est nulle et l'intégration de l'équation devra se faire en deux étapes distinctes. C'est d'ailleurs un résultat facile à prévoir, car l'existence d'une solution singulière sur Γ pour l'équation $\Theta_2 \varDelta_2 u = 0$ entraînerait celle d'une solution élémentaire pour l'équation $\Theta_2 v = 0$. En effet, il suffirait de prendre $v = \varDelta_2 u$. La fonction v est singulière sur $\Gamma = 0$ ou se réduit à une fonction régulière $f(x^1, \ldots, x^m)$. Mais si elle est singulière sur $\Gamma = 0$, on arrive à une contradiction avec le théorème de Le Roux et Delassus, qui exige que toute surface singulière pour une solution d'une équation aux dérivées partielles soit une caractéristique, ce qui n'est pas possible pour $\Gamma = 0$, conoïde caractéristique de $\varDelta_2 u = 0$ et non pas de $\Theta_2 v = 0$. Si, par contre, v est régulier sur $\Gamma = 0$, c'est que u est une solution singulière de l'équation $\varDelta_2 u = f$ et, par conséquent, se compose d'un terme régulier sur $\Gamma = 0$, solution de l'équation avec second membre et d'un terme singulier sur Γ, solution de l'équation homogène $\Delta_2 u = 0$. Il est donc devenu évident qu'il n'est pas possible d'obtenir de solution singulière sur $\Gamma = 0$ pour $\Theta_2 \Delta_2 u = 0$, qui ne soit pas, en même temps, solution de $\Delta_2 u = 0$.

§ 7. **Convergence du développement de** u. En continuant de calculer des termes par les formules (50), on obtiendra un développement de la forme

$$u = \overset{0}{u} + \overset{1}{u}\Gamma + \cdots + \overset{j}{u}\Gamma^j + \cdots \tag{52}$$

représentant la solution cherchée, à condition qu'il soit convergent. Pour démontrer la convergence de la série (52), nous utiliserons un procédé de majoration que nous avons donné pour le cas des systèmes et qui s'applique aussi à ce cas.[1])

En partant, non pas de l'équation (7), mais de

$$\mathsf{F}_1(u) = \frac{1}{\overset{0}{u}} \mathsf{F}(u\overset{0}{u}) = 0$$

le premier terme de la solution élémentaire de $\mathsf{F}_1(u) = 0$ sera égal à l'unité. Ceci posé, prenons pour les x^α les variables normales q_α. En désignant par σ la somme des valeurs absolues de ces variables sur chaque géodésique issue de M, σ sera proportionnel à s. Dans ces conditions, on démontre que u admet une majorante de la forme

$$u_j \ll \frac{C_j}{\sigma^{2j}\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^{4j}}$$

C_j étant une constante convenablement choisie et que le rapport C_{j+1}/C_j tend, pour $j = \infty$, vers une limite finie α.

Dans ces conditions, la série (52) convergera pour

$$\left| \Gamma(p_\alpha; x^\alpha) \right| < \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{\sigma}{r}\right)^4 .$$

Lorsque M varie dans une région strictement intérieure à R, la convergence de la série est même uniforme.

---

[1]) *N. Théodoresco,* Les solutions élémentaires, etc. (Revue mathématique Interbalkanique, T. 1, 1936.)

§ 8. **Le cas d'un nombre pair de variables.** Ce cas conduit, comme nous l'avons montré, à une impossibilité, du moins si l'on se borne à une solution à singularité algébrique. Il n'en est plus de même si l'on complète la solution d'un terme logarithmique, en posant

$$\varphi = u\Gamma^p + U \log \Gamma . \tag{53}$$

En substituant ces valeurs dans (7), on aura

$$\mathsf{F}(\varphi) = \mathsf{F}(u\Gamma^p) + \mathsf{F}(U \log \Gamma) .$$

Calculons d'abord $\mathsf{F}(U \log \Gamma)$. Il vient:

$$\Delta_2 U \log \Gamma = U \Delta_2 \log \Gamma + 2\Delta(U, \log \Gamma) + \Delta_2 U \cdot \log \Gamma .$$

Appliquons maintenant l'opération Θ_2 à chacun des termes du second membre:

$$\Theta_2(U\Delta_2 \log \Gamma) = U\Theta_2\Delta_2 \log \Gamma + 2\Theta(U, \Delta_2 \log \Gamma) + \Delta_2 \log \Gamma \cdot \Theta_2 U .$$

Mais

$$\Delta_2 \log \Gamma = \frac{1}{\Gamma}(\Delta_2\Gamma - 4)$$

et puisque

$$\Theta_2(UV) = U\Theta_2 V + 2\,\Theta(U, V) + V\Theta_2 U$$

on aura

$$\Theta_2\Delta_2 \log \Gamma = \frac{\Theta_2\Delta_2\Gamma}{\Gamma} - \frac{1}{\Gamma^2}[2\Theta(\Delta_2\Gamma, \Gamma) + (\Delta_2\Gamma - 4)\Theta_2\Gamma] + \frac{2Q}{\Gamma^3}(\Delta_2\Gamma - 4).$$

De même

$$\Theta(U, \Delta_2 \log \Gamma) = \Theta\left[U, \frac{1}{\Gamma}(\Delta_2\Gamma - 4)\right] = \frac{1}{\Gamma}\Theta(U, \Delta_2\Gamma) - \frac{1}{\Gamma^2}(\Delta_2\Gamma - 4)\Theta(U, \Gamma)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\Theta_2(U\Delta_2 \log \Gamma) = {} & \frac{1}{\Gamma}\Theta_2[(\Delta_2\Gamma - 4)U] - \frac{1}{\Gamma^2}\big[2\Theta[U(\Delta_2\Gamma - 4), \Gamma] + U(\Delta_2\Gamma - 4)\Theta_2\Gamma\big] \\ & + \frac{2}{\Gamma^3}(\Delta_2\Gamma - 4)UQ .\end{aligned} \tag{54}$$

Passons au second terme:

$$\Theta_2[\Delta(U,\log\Gamma)] = \Theta^2\left[\frac{1}{\Gamma}\Delta(U,\Gamma)\right] = \frac{1}{\Gamma}\Theta_2\Delta(U,\Gamma) + 2\Theta\left[\frac{1}{\Gamma},\Delta(U,\Gamma)\right]$$
$$+\Delta(U,\Gamma)\,\Theta_2\frac{1}{\Gamma}\,.$$

Mais puisque

$$\Theta_2\Gamma^p = p(p-1)\,\Gamma^{p-2}Q + p\Gamma^{p-1}\Theta_2\Gamma \tag{55}$$

pour $p = -1$, on a

$$\Theta_2\frac{1}{\Gamma} = \frac{2Q}{\Gamma^3} - \frac{1}{\Gamma^2}\Theta_2\Gamma$$

et, finalement, nous écrirons

$$2\Theta_2[\Delta(U,\log\Gamma)] = 2\frac{1}{\Gamma}\Theta_2\Delta(U,\Gamma) - \frac{2}{\Gamma^2}[2\Theta[\Delta(U,\Gamma),\Gamma] + \Theta_2\Gamma\cdot\Delta(U,\Gamma)]$$
$$+\frac{4Q}{\Gamma^3}\Delta(U,\Gamma)\,. \tag{56}$$

Le troisième terme:

$$\Theta_2[\Delta_2U\log\Gamma] = \Theta_2\Delta_2U\cdot\log\Gamma + \frac{1}{\Gamma}[2\Theta(\Delta_2U,\Gamma) + \Delta_2U\cdot\Theta_2\Gamma] - \frac{1}{\Gamma^2}Q\cdot\Delta_2U\,. \tag{57}$$

Quant aux termes provenant de dérivées d'ordres inférieurs, on aura:

$$b^{\alpha\beta\gamma}(U\log\Gamma)_{\alpha\beta\gamma} = b^{\alpha\beta\gamma}\left(U_\alpha\log\Gamma + \frac{U}{\Gamma}\pi_\alpha\right)_{\beta\gamma}$$
$$= \tfrac{1}{6}\log\Gamma\cdot B^{\alpha\beta\gamma}U_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{\Gamma}[\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}U_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}U_\alpha\pi_{\beta\gamma} + \tfrac{1}{6}B^{\alpha\beta\gamma}U\pi_{\alpha\beta\gamma}] \tag{58}$$
$$-\frac{1}{\Gamma^2}[B^\alpha U_\alpha + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}U\pi_{\alpha\beta}] + \frac{2}{\Gamma^3}BU\,.$$

De même (59)

$$c^{\alpha\beta}(U\log\Gamma)_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}\log\Gamma\cdot C^{\alpha\beta}U_{\alpha\beta} + \frac{1}{\Gamma}[C^\alpha U_\alpha + \tfrac{1}{2}C^{\alpha\beta}U\pi_{\alpha\beta}] - \frac{1}{\Gamma^2}CU$$

et

$$d^\alpha(U\log\Gamma)_\alpha = \log\Gamma\cdot D^\alpha U_\alpha + \frac{1}{\Gamma}DU\,. \tag{60}$$

En additionnant membre à membre les relations (54), (56), (57), (58), (59), (60), et en tenant compte aussi du terme $\log\Gamma\cdot EU$, on arrive à l'expression

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}(U\log\Gamma) \equiv \mathsf{F}(U)\log\Gamma + \frac{1}{\Gamma}\big[U[\mathsf{F}(\Gamma) - E\Gamma] + 2\Theta(U,\Delta_2\Gamma) \qquad (61)\\
+ (\Delta_2\Gamma - 4)\Theta_2 U + 2\Theta_2\Delta(U,\Gamma) + 2\Theta(\Delta_2 U,\Gamma) + \Delta_2 U\cdot\Theta_2\Gamma\\
+ \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}U_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}U_\alpha\pi_{\beta\gamma} + C^\alpha U_\alpha\big] - \frac{1}{\Gamma^2}\big[2\Theta[U(\Delta_2\Gamma - 4),\Gamma]\\
+ (\Delta_2\Gamma - 4)U\cdot\Theta_2\Gamma + 4\Theta[\Delta(U,\Gamma),\Gamma] + 2\Delta(U,\Gamma)\Theta_2\Gamma\\
+ Q\Delta_2 U + B^\alpha U_\alpha + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}U\pi_{\alpha\beta} + CU\big]\\
+ \frac{2Q}{\Gamma^3}[(\Delta_2\Gamma - 4)U + 2\Delta(U,\Gamma) + \frac{B}{Q}U].
\end{aligned}
$$

D'autre part, si on prend pour u un développement de la forme (52), $\mathsf{F}(u\Gamma^p)$ se met sous la forme (44) et les $\overset{j}{u}$ sont déterminés pour $j = 0, 1, \ldots, -p-1$. Pour $j = -p, -p+1, -p+2$ nous ne disposons plus d'équations du type (45) et *les quantités* $\overset{-p}{u}$, $\overset{-p+1}{u}$, $\overset{-p+2}{u}$ *restent indéterminées*, tout au moins jusqu'à nouvel ordre.

Par conséquent, en déterminant les $\overset{j}{u}$ par les équations (45) pour $j = 0, 1, \ldots, -p-1$, on aura

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}\Big(\sum_{j=0}^{-p-1}\overset{j}{u}\Gamma^{p+j}\Big) \equiv \frac{1}{\Gamma^3}[\mathsf{A}_{-p-1}(\overset{-p-1}{u}) - 2\mathsf{B}_{-p-2}(\overset{-p-2}{u}) + \mathsf{F}(\overset{-p-3}{u})]\\
+ \frac{1}{\Gamma^2}[-\mathsf{B}_{-p-1}(\overset{-p-1}{u}) + \mathsf{F}(\overset{-p-2}{u})] + \frac{1}{\Gamma}\mathsf{F}(\overset{-p-1}{u}).
\end{aligned}
\qquad (62)
$$

Le développement de $\mathsf{F}(\varphi)$ comportera donc un terme en $\log\Gamma$ et trois termes en $\Gamma^{-1}, \Gamma^{-2}, \Gamma^{-3}$. Il faudra que chacun s'annule séparément.

En particulier, pour que le terme $\mathsf{F}(U)\log\Gamma = 0$, *il faut que U soit lui-même une solution de l'équation* (7).

Calcul de U.

Nous tâcherons de déterminer U par un développement suivant les puissances de Γ de la forme

$$
U = \overset{0}{U} + \overset{1}{U}\Gamma + \cdots + \overset{k}{U}\Gamma^k + \cdots . \qquad (63)
$$

En introduisant cette expression dans $\mathsf{F}(U)$, on trouvera des termes comme dans la formule (44) avec, cette fois, $p = 0$ et les $\overset{k}{U}$ successifs seront déterminés par des équations telles que

$$
4s\frac{d\overset{k}{U}}{ds} + \Big[4(k-1) + \Delta_2\Gamma + \frac{B}{Q}\Big]\overset{k}{U} + \frac{1}{kQ}\Big[A_{k-1} + \frac{1}{k-1}B_{k-2} + \frac{1}{(k-1)(k-2)}\mathsf{F}(\overset{k-3}{U})\Big] = 0 \qquad (64)
$$

où

$$A_k = Q\cdot\Delta_2\overset{k}{U} - L_k\cdot\Theta_2\Gamma - 2\Theta[L_k,\Gamma] + B^\alpha\overset{k}{U}_\alpha + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{k}{U}\pi_{\alpha\beta} + C\overset{k}{U}$$

$$B_k = \Delta_2\overset{k}{U}\cdot\Theta_2\Gamma - \Theta_2[L_k] + 2\Theta[\Delta_2\overset{k}{U},\Gamma] + [\tfrac{1}{6}B^{\alpha\beta\gamma}\pi_{\alpha\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}C^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} + D^\alpha\pi_\alpha]\,U$$

$$+ \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}\overset{k}{U}\pi_{\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{k}{U}_{\alpha\beta} + C^\alpha\overset{k}{U}_\alpha \tag{65}$$

$$L_k = \frac{1}{kQ}\left[kB\overset{k}{U} + A_{k-1} + \frac{1}{k-1}B_{k-2} + \frac{1}{(k-1)(k-2)}\mathsf{F}(\overset{k-3}{U})\right].$$

Mentionnons, en particulier, que

$$L_0 = \frac{B\overset{0}{U}}{Q}, \qquad A_0 = Q\cdot\Delta_2\overset{0}{U} - L_0\cdot\Theta_2\Gamma + 2\Theta[L_0,\Gamma] + \ldots .$$

$$L_1 = \frac{1}{Q}[B\overset{1}{U} + A_0], \qquad L_2 = \frac{1}{2Q}[2B\overset{2}{U} + A_1 + B_0].$$

Remarquons, toutefois, que les trois premières fonctions $\overset{0}{U}$, $\overset{1}{U}$ et $\overset{2}{U}$ resteront indéterminées, car les équations (64) exigent que $k \neq 0, 1, 2$. Notre méthode donne donc une solution de la forme (63), à condition de connaître trois fonctions analytiques $\overset{0}{U}$, $\overset{1}{U}$, $\overset{2}{U}$ prenant les mêmes valeurs que U et ses deux premières dérivées transversales sur le conoïde.

Nous allons voir que, dans le cas qui nous intéresse, nous disposons de moyens pour déterminer $\overset{0}{U}$, $\overset{1}{U}$ et $\overset{2}{U}$.

En supposant connus $\overset{0}{U}$, $\overset{1}{U}$ et $\overset{2}{U}$, les équations (64) donnent

$$\frac{d}{ds}\left[s^{k-p}\frac{\overset{k}{U}}{\overset{0}{u}}\right] = -\frac{s^{k-p-1}}{kQ\overset{0}{u}}\left[A_{k-1} + \frac{1}{k-1}B_{k-2} + \frac{1}{(k-1)(k-2)}\mathsf{F}(\overset{k-3}{U})\right] \tag{66}$$

avec $p = -n + 1$.

Calcul de $\mathsf{F}(U\log\Gamma)$. La fonction U mise sous la forme (63), le développement de $\mathsf{F}(U\log\Gamma)$ doit être calculé de nouveau, en modifiant convenablement l'expression (61). A cette fin, il faudra établir quelques formules résultant de la modification des termes successifs de cette expression. On les aura, en remplaçant dans les invariants dont elle est formée U par $\Sigma\overset{k}{U}\Gamma^k$ et en ordonnant suivant les puissances de Γ. Calculons d'abord $\mathsf{F}(\overset{k}{U}\Gamma^k\log\Gamma)$.

$$\Theta(\overset{k}{U}\Gamma^k,\Delta_2\Gamma) = k\Gamma^{k-1}\overset{k}{U}\,\Theta(\Delta_2\Gamma,\Gamma)+\Gamma^k\Theta[\overset{k}{U},\Delta_2\Gamma]$$

$$\Theta_2(\overset{k}{U}\Gamma^k) = k(k-1)\Gamma^{k-2}Q\overset{k}{U}+k\Gamma^{k-1}[2\Theta(\overset{k}{U},\Gamma)+\overset{k}{U}\Theta_2\Gamma]+\Gamma^k\Theta_2\overset{k}{U}$$

$$\Delta(\overset{k}{U}\Gamma^k,\Gamma) = \Gamma^k[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U}]$$

$$\begin{aligned}\Theta_2[\Delta(\overset{k}{U}\Gamma^k,\Gamma) = {} & k(k-1)\Gamma^{k-2}Q[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U}]\\ & +k\Gamma^{k-1}\big[(\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U})\cdot\Theta_2\Gamma+2\Theta[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma),\Gamma]+8k\Theta(\overset{k}{U},\Gamma)\big]\\ & +\Gamma^k\Theta_2[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U}]\end{aligned}$$

$$\Delta(\overset{k}{U}\Gamma^k,\Gamma) = k\Gamma^{k-1}\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)$$

$$\Delta_2\Gamma^k = k\Gamma^{k-1}[\Delta_2\Gamma+4(k-1)]$$

$$\Delta_2(\overset{k}{U}\Gamma^k) = k\Gamma^{k-1}\big[\overset{k}{U}[\Delta_2\Gamma+4(k-1)]+2\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)\big]+\Gamma^k\Delta_2\overset{k}{U}$$

$$\begin{aligned}\Theta[\Delta_2\overset{k}{U}\Gamma^k,\Gamma] = {} & k(k-1)\Gamma^{k-2}Q\big[[\Delta_2\Gamma+4(k-1)]\overset{k}{U}+2\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)\big]\\ & +k\Gamma^{k-1}\big[\Theta(\overset{k}{U}\Delta_2\Gamma,\Gamma)+4(k-1)\Theta(\overset{k}{U},\Gamma)+2\Theta[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma),\Gamma]\\ & +Q\Delta_2\overset{k}{U}\big]+\Gamma^k\Theta[\Delta_2\overset{k}{U},\Gamma]\end{aligned}$$

$$\Theta[\overset{k}{U}(\Delta_2\Gamma-4)\Gamma^k,\Gamma] = k\Gamma^{k-1}(\Delta_2\Gamma-4)UQ+\Gamma^k\Theta[\overset{k}{U}(\Delta_2\Gamma-4),\Gamma]$$

$$\Theta[\Delta(\overset{k}{U}\Gamma^k,\Gamma),\Gamma] = k\Gamma^{k-1}[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U}]Q+\Gamma^k\Theta[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4kU,\Gamma]$$

$$B^{\alpha\beta}(U\Gamma^k)_{\alpha\beta} = 6k(k-1)\Gamma^{k-2}B\overset{k}{U}+k\Gamma^{k-1}[4B^\alpha\overset{k}{U}_\alpha+\overset{k}{U}B^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}]+\Gamma^kB^{\alpha\beta}\overset{k}{U}_{\alpha\beta}$$

$$B^{\alpha\beta\gamma}(U\Gamma^k)_\alpha\pi_{\beta\gamma} = k\Gamma^{k-1}B^{\alpha\beta}\overset{k}{U}\pi_{\alpha\beta}+\Gamma^kB^{\alpha\beta\gamma}U_\alpha\pi_{\beta\gamma}$$

$$B^\alpha(\overset{k}{U}\Gamma^k)_\alpha = 3k\Gamma^{k-1}BU+\Gamma^kB^\alpha\overset{k}{U}_\alpha$$

$$C^\alpha(\overset{k}{U}\Gamma^k)_\alpha = 2k\Gamma^{k-1}C\overset{k}{U}+\Gamma^kC^\alpha\overset{k}{U}_\alpha\,.$$

Il s'ensuit

$$\mathsf{F}(\overset{k}{U}\Gamma^k\log\Gamma) = \mathsf{F}(\overset{k}{U}\Gamma^k)\log\Gamma+\Gamma^{k-3}\mathsf{P}_k(\overset{k}{U})+\Gamma^{k-2}\mathsf{Q}_k(\overset{k}{U})+\Gamma^{k-1}\mathsf{R}_k(\overset{k}{U})$$

où l'on a posé

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_k(\overset{k}{U}) = {} & k(k-1)(\Delta_2\Gamma-4)Q\overset{k}{U} + 2k(k-1)Q[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U}] \\
& + 2k(k-1)Q\big[[\Delta_2\Gamma+4(k-1)]\overset{k}{U}+2\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)\big] + 3k(k-1)B\overset{k}{U} \\
& - 2k(\Delta_2\Gamma-4)Q\overset{k}{U} - 4k[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U}]Q \\
& - k\big[[\Delta_2\Gamma+4(k-1)]\overset{k}{U}+2\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)\big]Q - 3kB\overset{k}{U} \\
& + 2Q\Big[(\Delta_2\Gamma-4)\overset{k}{U}+2[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U}]+\frac{B}{Q}\overset{k}{U}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Q}_k(\overset{k}{U}) = {} & 2k\overset{k}{U}\Theta(\Delta_2\Gamma,\Gamma)+k(\Delta_2\Gamma-4)[2\Theta(\overset{k}{U},\Gamma)+\overset{k}{U}\cdot\Theta_2\Gamma] \qquad (67) \\
& + 2k\big[\Theta_2\Gamma\cdot\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U}\cdot\Theta_2\Gamma+2\Theta[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma),\Gamma]+Q\cdot\Delta_2\overset{k}{U}\big] \\
& + k\big[2\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+[\Delta_2\Gamma+4(k-1)]\overset{k}{U}\big]Q_2\Gamma+2kB^{\alpha}\overset{k}{U}_{\alpha}+kB^{\alpha\beta}\overset{k}{U}\pi_{\alpha\beta}+2kC\overset{k}{U} \\
& - 2\Theta[(\Delta_2\Gamma-4)\overset{k}{U},\Gamma]-(\Delta_2\Gamma-4)\overset{k}{U}\cdot\Theta_2\Gamma-4\Theta[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U},\Gamma] \\
& - 2[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U}]\Theta_2\Gamma-Q\Delta_2\overset{k}{U}-B^{\alpha}\overset{k}{U}_{\alpha}-\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{k}{U}\pi_{\alpha\beta}-C\overset{k}{U}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{R}_k(\overset{k}{U}) = {} & [\mathsf{F}(\Gamma)-E\Gamma]\overset{k}{U}+2\Theta(\overset{k}{U},\Delta_2\Gamma)+(\Delta_2\Gamma-4)\,\Theta_2\overset{k}{U} \\
& + 2\Theta_2[\Delta(\overset{k}{U},\Gamma)+4k\overset{k}{U}]+2\Theta[\Delta_2\overset{k}{U},\Gamma]+\Delta_2\overset{k}{U}\cdot\Theta_2\Gamma \\
& + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{k}{U}_{\alpha\beta}+\tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}\overset{k}{U}_{\alpha}\pi_{\beta\gamma}+C^{\alpha}\overset{k}{U}_{\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

On aura donc

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}(\varphi) = {} & \mathsf{F}\Big(\sum_{j=0}^{-p-1}\overset{j}{u}\,\Gamma^{p+j}\Big) + \sum_{k=0}^{\infty}(k+3)(k+2)(k+1)\Gamma^{k}Q\Bigg\{4s\frac{d\overset{-p+k+3}{u}}{ds} \\
& + \Big[4(k+2)+\Delta_2\Gamma+\frac{B}{Q}\Big]\overset{-p+k+3}{u} \\
& + \frac{1}{(k+3)Q}\Big[\mathsf{A}_{-p+k+2}+\frac{1}{k+2}\mathsf{B}_{-p+k+1}+\frac{1}{(k+2)(k+1)}\mathsf{F}(\overset{-p+k}{u})\Big]\Bigg\} \\
& + \mathsf{F}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\overset{k}{U}\Gamma^{k}\Big)\log\Gamma+\sum_{k=0}^{\infty}\Gamma^{k-3}[\mathsf{P}_k(\overset{k}{U})+\mathsf{Q}_k(\overset{k}{U})+\mathsf{R}_k(\overset{k}{U})]=0
\end{aligned}
$$

en convenant que $\mathsf{Q}_{-1}=\mathsf{R}_{-2}=\mathsf{R}_{-1}\equiv 0$.

Calcul des fonctions $\overset{-p+k}{u}$. En tenant compte de ce que les $\overset{k}{U}$ pour $k=3, 4, \ldots.$ sont donnés par les équations (66) et que les $\overset{j}{u}$ pour $j=0, 1, \ldots, -p-1$ sont déterminés également par les équations (45) et en remarquant que l'on a pris $\overset{-p}{u}=0$, $\overset{-p+1}{u}=0$, $\overset{-p+2}{u}=0$ dans le développement de u[1]), on disposera pour la détermination des autres inconnues des équations suivantes, obtenues, en annulant successivement les coefficients de Γ^{-3}, Γ^{-2}, Γ^{-1}

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}_0[\overset{0}{U}] + 2\,\mathsf{A}_{-p-1}(\overset{-p-1}{u}) - 2\,\mathsf{B}_{-p-2}(\overset{-p-2}{u}) + \mathsf{F}(\overset{-p-3}{u}) = 0 \\
&\mathsf{P}_1[\overset{1}{U}] - \mathsf{B}_{-p-1}(\overset{-p-1}{u}) + \mathsf{F}(\overset{-p-2}{u}) + \mathsf{Q}_0[\overset{0}{U}] = 0 \\
&\mathsf{P}_2[\overset{2}{U}] + \mathsf{Q}_1[\overset{1}{U}] + \mathsf{R}_0[\overset{0}{U}] + \mathsf{F}(\overset{-p-1}{u}) = 0
\end{aligned} \tag{68}$$

et les coefficients de $\Gamma^0, \Gamma^1, \ldots, \Gamma^{k-3}$

$$\begin{aligned}
&4s\frac{d\overset{-p+k}{u}}{ds} + \left[4(k-1) + \Delta_2\Gamma + \frac{B}{Q}\right]\overset{-p+k}{u} \\
&\quad + \frac{1}{kQ}\left[\mathsf{A}_{-p+k-1} + \frac{1}{k-1}\mathsf{B}_{-p+k-2} + \frac{1}{(k-1)(k-2)}\mathsf{F}(\overset{-p+k-3}{u})\right] \\
&\quad + \frac{1}{k(k-1)(k-2)}[\mathsf{P}_k + \mathsf{Q}_{k-1} + \mathsf{R}_{k-2}] = 0
\end{aligned} \tag{69}$$

$k = 3, 4, \ldots.$

Calcul de $\overset{0}{U}, \overset{1}{U}, \overset{2}{U}$. L'expression de P_k devient, à la suite de calculs élémentaires

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_k = (3k^2 - 6k + 2)\,Q\Big[2\Delta(\overset{k}{U},\Gamma) + \Big[4(k-1) + \Delta_2\Gamma + \frac{B}{Q} \\
+ \frac{4k(k-1)(k-2)}{3k^2-6k+2}\Big]\overset{k}{U}\Big].
\end{aligned}$$

En y faisant $k = 0, 1, 2$, les équations (69) deviennent

$$\begin{aligned}
&4s\frac{d\overset{0}{U}}{ds} + [-4 + \Delta_2\Gamma + \frac{B}{Q}]\overset{0}{U} + \frac{1}{Q}[\mathsf{A}_{-p-1} - \mathsf{B}_{-p-2} + \tfrac{1}{2}\mathsf{F}(\overset{-p-3}{u})] = 0 \\
&4s\frac{d\overset{1}{U}}{ds} + [\Delta_2\Gamma + \frac{B}{Q}]\overset{1}{U} - \frac{1}{Q}[\mathsf{Q}_0 - \mathsf{B}_{-p-1} + \mathsf{F}(\overset{-p-2}{u})] = 0 \\
&4s\frac{d\overset{1}{U}}{ds} + [4 + \Delta_2\Gamma + \frac{B}{Q}]\overset{2}{U} + \frac{1}{2Q}[\mathsf{Q}_1 + \mathsf{R}_0 + \mathsf{F}(\overset{-p-1}{u})] = 0 .
\end{aligned} \tag{70}$$

---

[1]) La considération de ces fonctions, qui restent arbitraires dans notre solution, modifierait les termes en $\Gamma^0, \Gamma^1, \Gamma^2$, en compliquant inutilement les seconds membres des équations donnant $\overset{-p+3}{u}, \overset{-p+4}{u}, \overset{-p+5}{u}$.

Nous poserons

$$
\begin{aligned}
L_0^* &= \frac{1}{Q}[B\overset{0}{U} + \mathsf{A}_{-p-1} - \mathsf{B}_{-p-2} + \tfrac{1}{2}\mathsf{F}(\overset{-p-3}{u})] \\
L_1^* &= \frac{1}{Q}[B\overset{1}{U} - \mathsf{Q}_0 + \mathsf{B}_{-p-1} - \mathsf{F}(\overset{-p-2}{u})] \\
L_2^* &= \frac{1}{2Q}[2B\overset{2}{U} + \mathsf{Q}_1 + \mathsf{R}_0 + \mathsf{F}(\overset{-p-1}{u})]
\end{aligned}
\tag{71}
$$

afin d'utiliser une notation uniforme [pour $k > 2$, les expressions des L_k sont celles données par les formules (65)].

Les expressions de P_k, Q_k, R_k. En tenant compte des équations (64) vérifiées par les $\overset{k}{U}$ pour $k \geqslant 3$ et des équations précédemment écrites (70) vérifiées par $\overset{0}{U}$, $\overset{1}{U}$, $\overset{2}{U}$, l'expression de P_k se réduit à

$$
\mathsf{P}_k = Q\left[4k(k-1)(k-2)\overset{k}{U} + (3k^2 - 6k + 2)\left(\frac{B}{Q}\overset{k}{U} - L_k\right)\right]. \tag{72}
$$

En ce qui concerne Q_k, on peut, après quelques calculs, le mettre successivement sous les formes

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Q}_k = {} & (2k-1\,[2\Delta(\overset{k}{U},\Gamma) + [\Delta_2\Gamma + 4(k-1)]\overset{k}{U} + \frac{4k(k-1)}{2k-1}\overset{k}{U}]\,\Theta_2\Gamma \\
& + 2(2k-1)\Theta[2\Delta(\overset{k}{U},\Gamma) + [\Delta_2\Gamma + 4(k-1)]\overset{k}{U} + \frac{4k(k-1)}{2k-1}\overset{k}{U},\Gamma] \\
& + (2k-1)[Q\cdot\Delta_2\overset{k}{U} + B^\alpha\overset{k}{U}_\alpha + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{k}{U}\pi_{\alpha\beta} + C\overset{k}{U}]
\end{aligned}
$$

et, en tenant compte des équations (64) et (70)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Q}_k = (2k-1)\Big\{ & \left[\frac{4k(k-1)}{2k-1}\overset{k}{U} - L_k\right]\Theta_2\Gamma + 2\Theta\left[\frac{4k(k-1)}{2k-1}\overset{k}{U} - L_k,\Gamma\right] \\
& + Q\cdot\Delta_2\overset{k}{U} + B^\alpha\overset{k}{U}_\alpha\pi_{\alpha\beta} + C\overset{k}{U}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{73}
$$

Enfin, on peut, en imitant les calculs ayant mené à l'expression (49) de B_j mettre R_k sous la forme

$$
\begin{aligned}
\mathsf{R}_k = {} & \Delta_2\overset{k}{U}\cdot\Theta_2\Gamma - \Theta_2[L_k] + 4k\Theta_2\overset{k}{U} + 2\Theta[\Delta_2\overset{k}{U},\Gamma] \\
& + [\tfrac{1}{6}B^{\alpha\beta\gamma}\pi_{\alpha\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}C^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta} + D^\alpha\pi_\alpha]\overset{k}{U} + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta\gamma}\overset{k}{U}_\alpha\pi_{\beta\gamma} + \tfrac{1}{2}B^{\alpha\beta}\overset{k}{U}_{\alpha\beta} + C^\alpha\overset{k}{U}_\alpha.
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Rappelons que dans ces trois dernières formules il faut prendre pour $k = 0, 1, 2$, à la place des L_k correspondants, les quantités L_0^*, L_1^*, L_2^* definies plus haut.

Expression et ordre de $\overset{k}{U}$. Pour calculer l'ordre infinitésimal de $\overset{0}{U}, \overset{1}{U}, \overset{2}{U}$ mettons les équations (70) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left[s^{-p}\frac{\overset{0}{U}}{\overset{0}{u}}\right] &= -\frac{s^{-p-1}}{4Q\overset{0}{u}}[\mathsf{A}_{-p-1} - \mathsf{B}_{-p-2} + \tfrac{1}{2}\mathsf{F}(\overset{-p-3}{u})] \\ \frac{d}{ds}\left[s^{-p+1}\frac{\overset{1}{U}}{\overset{0}{u}}\right] &= \frac{s^{-p}}{4Q\overset{0}{u}}[\mathsf{Q}_0 - \mathsf{B}_{-p-1} + \mathsf{F}(\overset{-p-2}{u})] \\ \frac{d}{ds}\left[s^{-p+2}\frac{\overset{2}{U}}{\overset{0}{u}}\right] &= -\frac{s^{-p+1}}{8Q\overset{0}{u}}[\mathsf{Q}_1 + \mathsf{R}_0 + \mathsf{F}(\overset{-p-1}{u})]. \end{aligned} \tag{75}$$

Comme A_{-p-1}, B_{-p-2}, $\mathsf{F}(\overset{-p-3}{u})$ sont tous de l'ordre de $s^{2p+3}\log s$, l'ordre de L_0^* sera celui de $s^{2p+1}\log s$ et $\overset{0}{U}$ sera infini à l'origine comme $s^{2p+1}\log s$.

Q_0 sera de l'ordre de $s^{2p+1}\log s$, comme B_{-p-1} et $\mathsf{F}(\overset{-p-2}{u})$, de sorte que L_1^* et $\overset{1}{U}$ seront de l'ordre de $s^{2p-1}\log s$.

On constate aussi que Q_1, R_0 et $\mathsf{F}(\overset{-p-1}{u})$ ont le même ordre, celui de $s^{2p-1}\log s$ et que l'ordre de L_2^* et de $\overset{2}{U}$ sera celui de $s^{2p-3}\log s$.

Passons maintenant aux formules (65) et aux équations (66). Par l'application du procédé utilisé dans le calcul de l'ordre de $\overset{j}{u}$, on trouve qu'à l'origine on a les comportements suivants:

L_0 comme $s^{2p+2}\log s$,	A_0 comme $s^{2p+1}\log s$,	B_0 comme $s^{2p-1}\log s$
L_1 comme $s^{2p-1}\log s$,	A_1 comme $s^{2p-1}\log s$,	B_1 comme $s^{2p-3}\log s$
L_2 comme $s^{2p-3}\log s$,	A_2 comme $s^{2p-3}\log s$,	B_2 comme $s^{2p-5}\log s$

et puisque $\mathsf{F}(\overset{0}{U})$ sera de l'ordre de $s^{2p-3}\log s$, l'ordre de $\overset{3}{U}$ sera celui de $s^{2p-5}\log s$.

De proche en proche, on trouve que A_k, B_{k-1} et $\mathsf{F}(\overset{k-2}{U})$ sont de l'ordre de $s^{2p-2k+1}\log s$ et que l'ordre de $\overset{k}{U}$ sera également celui de $s^{2p-2k+1}\log s$.

Expression et ordre de $\overset{-p+k}{u}$. Les équations (69) se mettent sous la forme

$$\frac{d}{ds}\left[s^{-p+k}\frac{\overset{-p+k}{u}}{\overset{0}{u}}\right] = -\frac{s^{k-p-1}}{kQ\overset{0}{u}}\left[\mathsf{A}_{-p+k-1} + \frac{1}{k-1}\mathsf{B}_{-p+k-2} + \frac{1}{(k-1)(k-2)}\mathsf{F}(\overset{-p+k-3}{u})\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(k-1)(k-2)}[\mathsf{P}_k + \mathsf{Q}_{k-1} + \mathsf{R}_{k-2}]\right]. \tag{76}$$

L'ordre de P_k et de L_k étant celui de $s^{2p-2k+3}\log s$, Q_k sera du même ordre et R_k sera de l'ordre de $s^{2p-2k-1}\log s$. Puisque A_{-p+k-1}, B_{-p+k-2}, $\mathsf{F}(\overset{-p+k-1}{u})$ sont infinis comme $s^{2p-2k+3}\log s$, il s'ensuit que le second membre de l'équation est de l'ordre de $s^{p-k}\log s$. Par l'application de la méthode déjà utilisée pour la recherche de $\overset{j}{u}$, on arrive à exprimer $\overset{-p+k}{u}$ par un développement qui à l'origine est infini comme $s^{2p-2k+1}\log s$.

§ 9. **Synthèse des résultats obtenus.** Les équations du quatrième ordre, dont la forme caractéristique se décompose en deux facteurs P et Q admettent une solution élémentaire algébrique singulière sur les nappes du conoïde caractéristique provenu de la forme P, à condition que ces nappes soient les plus extérieures des nappes du conoïde complet.

Cas d'un nombre impair de variables indépendantes: $m = 2n + 1$.

La solution est de la forme

$$\varphi = \frac{u}{\Gamma^{n-\frac{1}{2}}} \qquad \text{avec} \qquad u = \sum_{j=0}^{\infty} \overset{j}{u}\Gamma^j .$$

Les fonctions $\overset{j}{u}$ sont données par les équations différentielles (46). Ces fonctions sont holomorphes dans l'intérieur du conoïde et sur le conoïde, sauf au sommet, où elles admettent des singularités. Il faut toutefois remarquer que les termes $\overset{j}{u}\Gamma^j$ du développement de u tendent vers zéro, lorsque le point N tend vers le sommet M du conoïde sur une géodésique quelconque, de sorte que dans le voisinage de l'origine la solution u se réduit sensiblement à son premier terme $\overset{0}{u}$, comme dans le cas des équations du second ordre étudié par M. Hadamard.

Cas d'un nombre pair de variables indépendantes: $m = 2n$.

La solution est de la forme

$$\varphi = \frac{u}{\Gamma^{n-1}} + U \log L$$

$$\text{avec} \quad u = \sum_{j=0}^{\infty} \overset{j}{u}\,\Gamma^{j} \qquad \text{et} \qquad U = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{k}{U}\,\Gamma^{k}.$$

Les fonctions $\overset{j}{u}$ sont données pour $j = 0, 1, \ldots, -p-1$ par les équations (46) et pour $j = -p+3, \ldots$ par les équations (76). Les fonctions $\overset{0}{U}$, $\overset{1}{U}$ et $\overset{2}{U}$ sont données par les équations (75) et les $\overset{k}{U}$ pour $k = 3, 4, \ldots$ par les équations (66). Les fonctions $\overset{-p}{u}$, $\overset{-p+1}{u}$, $\overset{-p+2}{u}$ restent indéterminées, ce qui n'était pas le cas pour un nombre impair de variables. L'ordre infinitésimal des fonctions calculées à l'origine est tel que, dans le voisinage de ce point, u se comporte comme $\overset{0}{u}$ et, en donnant au terme logarithmique le dénominateur Γ^{n-1}, la fonction $U\Gamma^{n-1}\log\Gamma$ est nulle pour $s = 0$.

(Reçu le 17 août 1937.)