Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 9 (1936-1937)

Artikel: Die geometrische Theorie der rationalen Transformation der hypergeometrischen Differentialgleichung.

Autor: Matthieu, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10169

Die geometrische Theorie der rationalen Transformation der hypergeometrischen Differentialgleichung

Von P. Matthieu, Zürich

Einleitung. Das Problem der rationalen Transformation der hypergeometrischen Differentialgleichung[1]) ist sehr alt. Der erste, der sich damit befaßte, war *L. Euler*. In der Abhandlung „Specimen transformationis singularis serierum"[2]) stellt er eine Transformationsgleichung auf, aus der sich durch wiederholte Anwendung unmittelbar eine zweite ergibt.

Die nachfolgenden Bearbeiter der hypergeometrischen Differentialgleichung, *J. F. Pfaff* und *C. F. Gauß*, beschäftigten sich nicht wesentlich mit dem Transformationsproblem. Gauß streifte das Problem in der Abhandlung „Determinatio seriei nostrae per aequationem secundi ordinis"[3]), wo er auf einige spezielle Transformationen stieß.

Seine erste systematische Bearbeitung erfuhr das Problem durch *E. Kummer*. In seiner großen Arbeit über die hypergeometrische Reihe[4]) entwickelte er eine Methode zur Bildung von Transformationsgleichungen, mittelst der er auch eine große Anzahl solcher Gleichungen aufstellte.

Eine tiefgreifende Weiterentwicklung erfuhr das Problem durch *B. Riemann*. Er wandte die in seiner Dissertation aufgestellten Prinzipien auf die Theorie der hypergeometrischen Differentialgleichung an. In seiner berühmten diesbezüglichen Abhandlung „Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(a, b; c; x)$ darstellbaren Funktionen"[5]) geht er jedoch nur sehr kurz auf das Transformationsproblem ein. In Nr. 5 dieser Arbeit finden sich einige spezielle Transformationen, die sich aus den vorangehenden Betrachtungen unmittelbar ergeben; dagegen erscheint in seinen im Winter 1858/59 gehaltenen und

---

[1]) Über den Begriff der rationalen Transformation einer hyperg. Diff. gl. bezw. einer hyperg. Funktion vergl. *E. Hilb*, Lineare Diff. gl. im komplexen Gebiet, Enz. d. math. Wiss., Bd. 2, 2. Teil (Leipzig, 1913), pag. 542 und pag. 547—548.

[2]) Nova acta Petrop., Bd. 12 (1794), pag. 58 ff. oder op. omn., 1. Serie, Bd. 16, 2. Teil (Basel, 1935), pag. 41 ff.

[3]) Werke, Bd. 3 (Göttingen, 1876), pag. 207 ff.

[4]) Journ. f. Math., Bd. 15 (1836).

[5]) Werke, 2. Aufl. (Leipzig, 1892), pag. 67 ff.

in den Nachträgen zu seinen Werken teilweise veröffentlichten Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion[6]) das Transformationsproblem unter ganz neuen Gesichtspunkten. Riemann verwendet dort erstmals die durch den Quotienten zweier linear unabhängiger Partikularintegrale einer hypergeometrischen Differentialgleichung vermittelte konforme Abbildung als systematisches Verfahren zur Untersuchung der Differentialgleichung, ein Gedanke, der später, vor allem durch *H. A. Schwarz* und *F. Klein*, in hervorragender Weise weiterverwertet wurde. Demgemäß ist das Problem, alle Transformationsgleichungen zu finden, äquivalent mit der geometrischen Aufgabe, alle Fälle zu ermitteln, in denen sich eine Anzahl Kreisbogendreiecke, die durch Spiegelung an ihren Seiten auseinander hervorgehen, zu einem neuen Dreieck zusammenfügen. Der Gedankengang ist dabei der folgende: Zunächst kann man voraussetzen, daß bei einer rationalen Transformation die ursprüngliche sowie die transformierte Gleichung reelle Koeffizienten besitzen. Es bezeichne (H_1) eine derartige Gleichung; ferner sei q_1 der Quotient irgend zweier linear unabhängiger Partikularintegrale von (H_1) und Q_1 dessen Umkehrfunktion. Q_1 ist dann eine sogenannte Dreiecksfunktion; als Fundamentalbereiche für Q_1 können lauter Kreisbogendoppeldreiecke angenommen werden, von denen je zwei aneinandergrenzende spiegelbildlich in bezug auf die gemeinsame Seite liegen. Geht nun (H_1) durch eine rationale Transformation in eine ebensolche Gleichung (H_2) über, so geht q_1 durch die gleiche rationale Transformation in den Quotienten q_2 zweier Partikularintegrale von (H_2) über und Q_1 ist eine rationale Funktion der Umkehrfunktion Q_2 von q_2. Geometrisch besagt das, daß jeder Fundamentalbereich von Q_2 aus einer bestimmten endlichen Anzahl von Fundamentalbereichen von Q_1 bestehen muß. Daraus ergibt sich, vermittelst einiger elementargeometrischer Sätze die angegebene geometrische Formulierung des Problems. Die Durchführung der Theorie auf diesem geometrischen Wege wird jedoch von Riemann nicht gegeben. Er begnügt sich, die geometrische Formulierung herzuleiten und an einigen wenigen Beispielen zu erläutern.

Später hat *E. Goursat* die rationale Transformationstheorie der hypergeometrischen Differentialgleichung auf anderem Wege wieder in Angriff genommen und erstmals vollständig durchgeführt[7]). Er stellte vermittelst eines analytisch-arithmetischen Verfahrens alle möglichen Transformationsgleichungen auf. Darüber hinausgehend hat *E. Papperitz* auf einem ähnlichen Wege wie Goursat das Problem der algebraischen Trans-

[6]) Nachträge zu *Riemanns* Werken (Leipzig, 1902), pag. 82—84.

[7]) Vergl. die Literaturangaben auf pag. 547 des genannten Artikels von *E. Hilb*.

formation behandelt und gelöst[7]). Seither hat das Transformationsproblem keine wesentliche Bearbeitung mehr erfahren.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun, die von Riemann formulierte, aber seither nicht wieder aufgegriffene geometrische Theorie der rationalen Transformation vollständig durchzuführen. In § 1 wird die geometrische Aufgabe formuliert. § 2 enthält einige allgemeine Betrachtungen über das gestellte Problem, aus denen hervorgeht, daß bei der Lösung drei vollständig verschiedene Fälle zu unterscheiden sind (Satz 4). § 3 und § 4 enthalten die Lösung für die beiden ersten dieser Fälle. Beim dritten Fall sind vier Unterfälle zu unterscheiden (§ 5). Die vier letzten Paragraphen enthalten die Lösung für jede dieser vier Möglichkeiten.

§ 1. Formulierung des geometrischen Problems

Unter einem Kreisbogendreieck im Sinne von H. A. Schwarz und F. Klein versteht man einen schlichten oder nach Art einer Riemannschen Fläche mehrblättrigen Bereich, der die drei folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Er ist topologisch dem Kreis äquivalent.
2. Seine Berandung besteht aus drei Kreisbogen; dabei gelten, wie im folgenden immer, Geraden auch als Kreise.
3. Im Innern liegt kein Windungspunkt[8]).

Der auf diese Weise definierte Dreiecksbegriff unterscheidet sich wesentlich von andern gebräuchlichen Dreiecksbegriffen[9]); das Wichtige an ihm ist, daß das Dreieck stets als (ein- oder mehrblättrige) Fläche aufgefaßt wird. Im folgenden ist der Begriff des Kreisbogendreiecks stets in diesem Sinne zu verstehen. Die Ebene, in der wir unsere Operationen vornehmen, betrachten wir immer als erweiterte Gaußsche Ebene; ein Kreisbogendreieck kann also auch den Punkt ∞ in seinem Innern oder auf seiner Berandung enthalten.

Wenn man ein Kreisbogendreieck an einer seiner Seiten spiegelt[10]), so

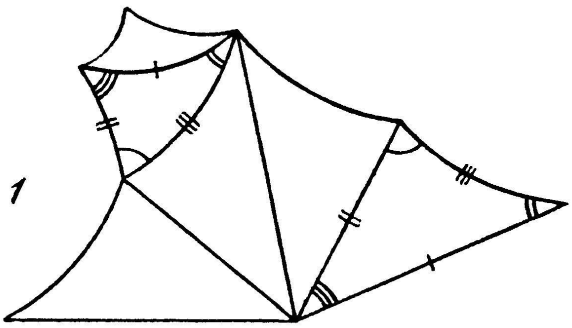
[8]) Nach dieser Definition sind Kreisbogenzweiecke und Vollkreise nicht als Kreisbogendreiecke anzusehen, da ihre Berandung aus nur zwei bezw. aus nur einem Kreisbogen besteht. Im Gegensatz dazu werden in den einschlägigen Arbeiten von *F. Klein* und *Fr. Schilling* (bes. in den auf Seite 68 genannten) Zweiecke und Vollkreise auch noch als Kreisbogendreiecke betrachtet, z. B. stellt ein Vollkreis ein Dreieck dar, dessen sämtliche Winkel die Größe π haben.

[9]) Vergl. *J. Sommer*, Elemente der Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus, Enz. d. math. Wiss., Bd. 3, 1. Teil, 2. Hälfte (Leipzig, 1914), pag. 833—839. Daselbst wird auch auf die einschlägige Originallitteratur verwiesen.

[10]) Über den Begriff der Spiegelung eines Bereiches an einem Kreisbogen vergl. z. B. *Hurwitz-Courant*, Lehrbuch der Funktionentheorie, 3. Aufl. (Berlin, 1929), pag. 351 ff.

erhält man ein zweites, zum ersten spiegelbildlich gelegenes Dreieck. Diesen Prozeß können wir wiederholen; wir können mit einem der beiden Dreiecke wieder eine Spiegelung an einer freien Seite vornehmen, wodurch wir wieder ein zum betreffenden Dreieck spiegelbildlich gelegenes Dreieck erhalten. In gleicher Weise können wir fortfahren und durch Spiegelung der neu entstehenden oder der bereits vorhandenen Dreiecke an ihren freien Seiten immer neue Dreiecke ableiten. Die entstehenden Dreiecke können sich auch teilweise oder ganz überdecken, und wir können das angegebene Verfahren offenbar beliebig fortsetzen, indem bei der Ableitung eines Dreiecks jedesmal zwei neue freie Seiten entstehen, an denen wir weiterspiegeln können. Jedes der auf diese Weise erhaltenen Dreiecke kann durch eine endliche Zahl von Spiegelungen in jedes andere übergeführt werden. Wir nennen deshalb irgend zwei solcher Dreiecke äquivalent. Wir sagen ferner von zwei Stücken in äquivalenten Dreiecken ebenfalls, sie seien äquivalent, wenn sie durch eine Anzahl Spiegelungen

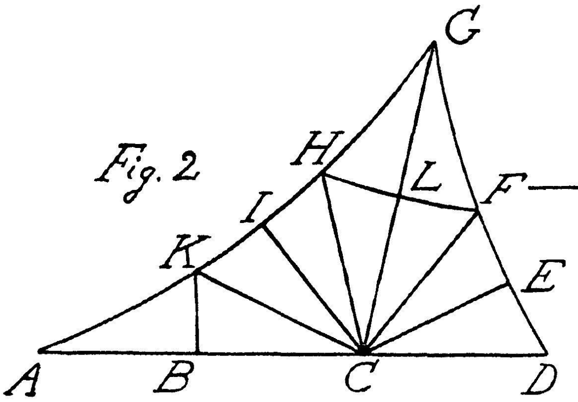
Fig. 1

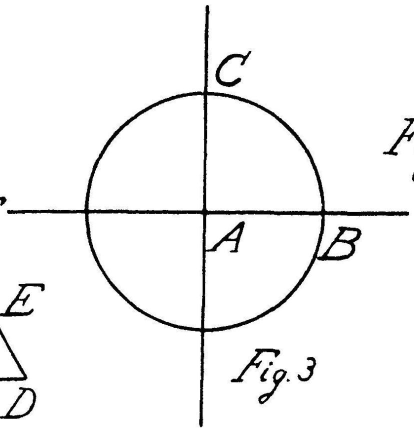


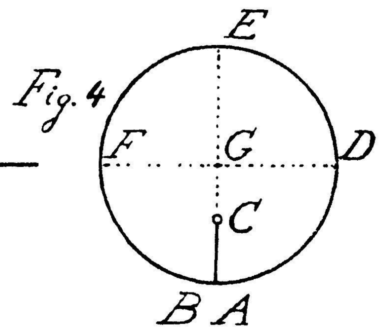
ineinander übergeführt werden können. In Fig. 1 sind einige äquivalente Dreiecke gezeichnet und in zweien von ihnen die äquivalenten Stücke gleich bezeichnet.

Gemäß den eben angestellten Betrachtungen erzeugt jedes Kreisbogendreieck in eindeutiger Weise eine Dreiecksteilung oder ein Dreiecksnetz. Dazu gelangt man auf folgende Weise: Wir denken uns durch fortwährende Spiegelung in der eben beschriebenen Weise aus dem ursprünglichen Dreieck immer neue Dreiecke abgeleitet. Immer dann, wenn zwei Seiten der entstehenden Dreiecke erstens übereinstimmen, zweitens äquivalent sind, denken wir uns die beiden Dreiecke längs dieser Seite miteinander verbunden. Indem wir dieses Verfahren entweder so lange fortsetzen, bis wir dadurch keine neuen Dreiecke mehr erhalten können (indem in der entstehenden, aus lauter Dreiecken bestehenden Fläche keine freien Dreiecksseiten mehr vorkommen), oder falls es nicht abbricht (indem unendlich viele Dreiecke auftreten), auf alle möglichen Arten ins

Unendliche fortgesetzt denken, erhalten wir eine endliche oder unendliche Menge von Kreisbogendreiecken, die sich zu einer Überlagerungsfläche der schlichten Ebene zusammenfügen, und die wir die durch das ursprüngliche Dreieck erzeugte Dreiecksteilung nennen. Im allgemeinen wird sie aus unendlich vielen Blättern bestehen. Sie ist, wie erstmals H. A. Schwarz gezeigt hat[11]), dann und nur dann schlicht, wenn sämtliche Winkel der ursprünglichen Dreiecke echte Teiler von π[12]) sind oder verschwinden. Unter den schlichten Teilungen gibt es wieder drei grundsätzlich von einander verschiedene Kategorien: Je nachdem die Winkelsumme der äquivalenten Dreiecke größer, gleich oder kleiner ist als π, bedeckt die Teilung die Ebene lückenlos, die Ebene mit Ausnahme eines Punktes oder nur das Innere eines gewissen Kreises. Im letzten Fall bezeichnen wir die Teilung als eine schlichte Teilung mit Grenzkreis.







Oft tritt der Fall ein, daß sich ein Kreisbogendreieck durch eine Anzahl Kreisbogen unterteilen läßt in eine Anzahl äquivalenter Dreiecke. Umgekehrt können wir in einem solchen Fall auch sagen, eine Anzahl von äquivalenten Dreiecken füge sich zu einem neuen Dreieck zusammen oder sie lasse sich zu einem neuen Dreieck zusammensetzen. Wir bezeichnen deshalb einen solchen Sachverhalt als eine Dreieckszusammensetzung. In den Fig. 2, 3 und 4 sind charakteristische Beispiele solcher Dreieckszusammensetzungen gegeben. In Fig. 2 fügen sich zehn äquivalente Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$ zu einem neuen Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{7}, \frac{\pi}{7}$ zusammen.

[11]) *H. A. Schwarz,* Über diejenigen Fälle, in denen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt. Journ. f. Math., Bd. 75 (1872). In dieser Arbeit findet sich auch eine ausführliche Theorie der Dreiecksteilungen.

[12]) Unter einem echten Teiler von π verstehen wir eine Zahl von der Form $\frac{\pi}{n}$ wobei n eine natürliche Zahl $\geqq 2$ ist.

Fig. 3 zeigt eine Dreiecksteilung, die aus acht Dreiecken besteht, deren sämtliche Winkel die Größe $\frac{\pi}{2}$ haben, und die die ganze Ebene schlicht und lückenlos bedeckt. Wenn wir diese Teilung etwa längs der Strecke AB aufschneiden und an das dadurch entstehende Zweieck etwa längs des unteren Randes ein über dem Dreieck ABC gelegenes, weiteres äquivalentes Dreieck anheften, so erhalten wir ein (nicht mehr schlichtes) Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, das aus neun äquivalenten Dreiecken besteht. In Fig. 4 ist ein letztes Beispiel dargestellt. Das Dreieck ABC, das dadurch entsteht, daß man in einem Vollkreis bei der Peripherie beginnend, in radialer Richtung einen Schnitt führt, wird durch zwei Strecken (in Fig. 4 sind sie punktiert gezeichnet) in vier äquivalente Dreiecke eingeteilt.

Die geometrische Aufgabe, die wir uns dem Riemannschen Vorgang gemäß zu stellen haben, ist nun diese: Alle überhaupt möglichen Dreieckszusammensetzungen aufzusuchen.

§ 2. Allgemeine Gesichtspunkte für die Lösung

Wir wollen in diesem Paragraphen zunächst einige allgemeine Eigenschaften der Dreieckszusammensetzungen studieren:

A. Es sei irgendeine Dreieckszusammensetzung vorgelegt. Die äquivalenten Dreiecke, die sich zu dem neuen Dreieck zusammenfügen, nennen wir die zusammensetzenden Dreiecke und bezeichnen sie durch $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, \cdots \mathfrak{D}_n$, wobei n ihre Anzahl ist. Das neu entstehende Dreieck nennen wir das zusammengesetzte und bezeichnen es durch $\mathfrak{D}^*$. Einen Punkt der Dreiecksfläche $\mathfrak{D}^*$ bezeichnen wir als Teilpunkt, wenn er entweder Eckpunkt des Dreiecks $\mathfrak{D}^*$ oder Eckpunkt von mindestens einem Dreieck $\mathfrak{D}_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ ist, oder, wenn beides der Fall ist. Offenbar kann ein Teilpunkt in vier verschiedenen Rollen auftreten:

1. Der Teilpunkt kann Eckpunkt von mindestens einem Dreieck $\mathfrak{D}_i$ und gleichzeitig Eckpunkt von $\mathfrak{D}^*$ sein.
2. Der Teilpunkt kann Eckpunkt von mindestens einem Dreieck $\mathfrak{D}_i$ sein und auf dem Rande von $\mathfrak{D}^*$, aber nicht in einer Ecke liegen.
3. Der Teilpunkt kann Eckpunkt von mindestens einem Dreieck $\mathfrak{D}_i$ sein und ganz im Innern von $\mathfrak{D}^*$ liegen.
4. Der Teilpunkt kann Eckpunkt von $\mathfrak{D}^*$ sein, ohne daß er Eckpunkt eines Dreiecks $\mathfrak{D}_i$ ist.

Dieser Einteilung gemäß sagen wir von einem Teilpunkt, er sei bezw. von erster, zweiter, dritter oder vierter Art. Offenbar gibt es bei einer Dreieckszusammensetzung höchstens drei Teilpunkte erster Art.

B. Wenn man ein Kreisbogendreieck $\mathfrak{D}$ einer direkten oder indirekten Möbiustransformation[13]) unterwirft, so geht es über in ein Kreisbogendreieck $\mathfrak{D}'$, dessen Winkel mit denen von $\mathfrak{D}$ übereinstimmen. Aus den elementaren Eigenschaften der Möbiustransformationen[13]) ergibt sich, daß dabei auch die durch $\mathfrak{D}$ erzeugte Dreiecksteilung übergeht in die Teilung, die zu $\mathfrak{D}'$ gehört; ebenso geht eine Dreieckszusammensetzung, die aus $\mathfrak{D}$ abgeleitet ist, über in eine solche, die aus $\mathfrak{D}'$ abgeleitet ist. Zu jedem Kreisbogendreieck, und infolgedessen auch zu jeder Dreiecksteilung und jeder Dreieckszusammensetzung gehört demnach eine unendliche Schar kreisverwandter Konfigurationen. Jede Konfiguration einer Schar geht aus jeder andern in elementarer Weise durch eine Möbiustransformation hervor. Wir werden deshalb im folgenden Kreisbogendreiecke, Teilungen und Zusammensetzungen, die zueinander in Kreisverwandtschaft stehen, nicht als verschieden betrachten und nur für jede Gesamtheit von kreisverwandten derartigen Konfigurationen eine einzige als Repräsentant angeben.

Für Kreisbogendreiecke gilt der Satz: Zwei Kreisbogendreiecke sind dann und nur dann kreisverwandt, wenn sie in den Winkeln übereinstimmen[14]). Zwei Kreisbogendreiecke sind also nach unserer Abmachung dann und nur dann als gleich zu betrachten, wenn sie gleiche Winkel haben. Das Wesentliche an einem Kreisbogendreieck, auf das wir im folgenden allein zu achten haben, sind demnach die Winkel. Da jedem Dreieck eindeutig eine Dreiecksteilung entspricht, so gelten diese Betrachtungen unmittelbar auch für Dreiecksteilungen.

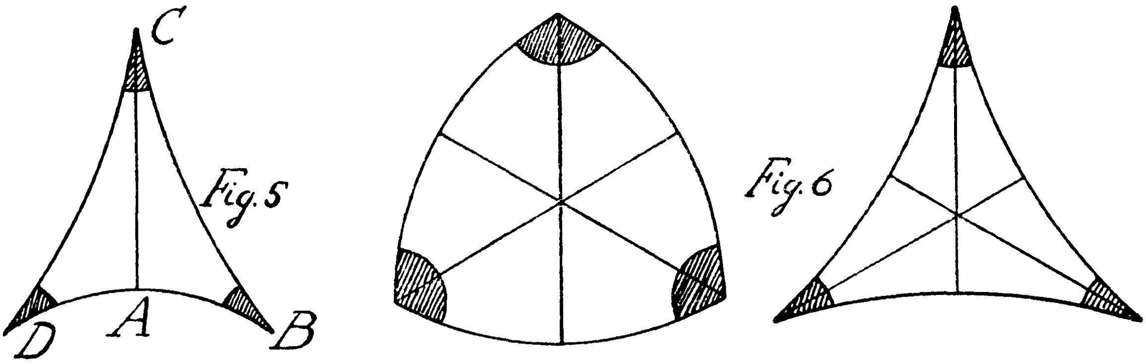
C. Für die Lösung der in § 1 gestellten Aufgabe ist die Tatsache von besonderer Bedeutung, daß es Dreieckszusammensetzungen gibt, bei denen man einen oder mehrere Winkel der zusammensetzenden Dreiecke ganz willkürlich wählen kann. Das einfachste Beispiel für diese Möglichkeit ist in Fig. 5 dargestellt. Ein Kreisbogendreieck ABC hat bei A einen rechten Winkel, während seine beiden übrigen Winkel völlig willkürliche Werte haben können, was, wie im folgenden immer, dadurch kenntlich gemacht ist, daß die Winkel dunkel ausgefüllt sind. Durch Spiegelung an

---

[13]) Eine kurze Darstellung der Theorie der Möbiustransformationen findet sich in *Carathéodory*, Conformal representation (Cambridge, 1932), Kapitel 1.

[14]) Für den Beweis dieses Satzes vergl. *Vivanti*, Fonctions polyédriques et modulaires (Paris, 1910), pag. 22.

der Seite AC entsteht das Dreieck ACD. Beide Dreiecke fügen sich zum zusammengesetzten Dreieck BCD zusammen. Wir bezeichnen eine solche Zusammensetzung, bei der zwei Winkel der zusammensetzenden Dreiecke völlig willkürlich gewählt werden können, während der dritte einen festen, unveränderlichen Wert haben muß, als eine Dreieckszusammensetzung



mit zwei willkürlichen und einem bestimmten Winkel. Allgemein reden wir von einer Zusammensetzung mit k willkürlichen und $3 - k$ bestimmten Winkeln ($0 \leq k \leq 3$), wenn in ihr k Winkel willkürlich wählbar sind, während die übrigen $3 - k$ bestimmte unveränderliche Werte haben müssen.

D. Es besteht folgender Hilfssatz:

Satz 1. *Bei jeder Zusammensetzung müssen diejenigen Winkel der zusammensetzenden Dreiecke, die einen Teilpunkt zweiter oder dritter Art umlagern, bestimmte echte Teiler sein von π. Treten demnach unter den Winkeln der zusammensetzenden Dreiecke willkürlich wählbare auf, so müssen sich diese stets um Teilpunkte erster Art lagern.*

In der Tat fügt sich bei einem Teilpunkt zweiter Art stets eine endliche Zahl gleicher Winkel zu einem Winkel der Größe π zusammen; bei einem Teilpunkt dritter Art fügt sich eine gerade Anzahl gleicher Winkel zu einem Winkel der Größe 2π zusammen. Daraus ergibt sich unmittelbar der Satz.

E. Wir wollen ein Kriterium angeben dafür, daß in einer Dreieckszusammensetzung willkürlich wählbare Winkel auftreten. Dies leistet

Satz 2. *Ein Winkel der zusammensetzenden Dreiecke ist bei einer Dreieckszusammensetzung dann und nur dann willkürlich wählbar, wenn er überall, wo er auftritt (also in allen äquivalenten Exemplaren) sich immer nur um Teilpunkte erster Art lagert. Treten demnach in einer Zusammensetzung k derartige Winkel auf ($0 \leq k \leq 3$), so sind in ihr k Winkel willkürlich wählbar.*

Zunächst ergibt sich aus Satz 1, daß die aufgestellte Bedingung notwendig ist. Wir wollen nun zeigen, daß sie auch hinreicht. In der Tat ist die Bildung einer Dreieckszusammensetzung ein geometrischer Prozeß, dessen Ausführbarkeit allein von der Größe derjenigen Winkel der zusammensetzenden Dreiecke abhängt, die sich in der Zusammensetzung um Teilpunkte zweiter und dritter Art lagern. Diese Winkel müssen bestimmte echte Teiler sein von π und können nicht verändert werden, da sich immer eine bestimmte, endliche Anzahl solcher Winkel zu einem Winkel der Größe π zusammenfügen muß. Dagegen kommt es auf die Größe derjenigen Winkel, die sich immer nur um Teilpunkte erster Art lagern, gar nicht an. Wenn man ihnen verschiedene Werte erteilt, so hat das nur zur Folge, daß auch die Winkel des zusammengesetzten Dreiecks verschiedene Werte erhalten.

In der am Anfang dieses Paragraphen betrachteten Zusammensetzung mit zwei willkürlichen Winkeln treten zwei Winkel auf, die sich, samt ihren äquivalenten Winkeln, immer nur um Teilpunkte erster Art lagern; infolgedessen sind sie beliebig wählbar. Der dritte Winkel lagert sich um einen Teilpunkt zweiter Art und muß deshalb ein echter Teiler von π sein. Ein weiteres Beispiel ist in Fig. 6 dargestellt. Der dunkel ausgefüllte Winkel lagert sich überall, wo er auftritt, nur um Teilpunkte erster Art und ist deshalb beliebig wählbar, was in Fig. 6 dadurch veranschaulicht ist, daß die Zusammensetzung für zwei verschiedene Werte dieses Winkels aufgezeichnet ist. Jeder der beiden übrigen Winkel lagert sich hingegen um mindestens einen Teilpunkt zweiter oder dritter Art und muß infolgedessen ein echter Teiler sein von π.

Aus Satz 2 ergibt sich unmittelbar

Satz 3. *Zu jedem in einer Dreieckszusammensetzung auftretenden bestimmten (also nicht willkürlichen) Winkel gibt es mindestens einen Teilpunkt zweiter oder dritter Art der Zusammensetzung, um den sich solche Winkel lagern.*

Denn, wenn das nicht der Fall wäre, so würde sich der Winkel immer nur um Teilpunkte erster Art lagern und wäre damit nach Satz 2 willkürlich wählbar.

F. Aus den vorstehenden Betrachtungen ergibt sich eine Arteinteilung aller überhaupt möglichen Dreieckszusammensetzungen. Es bestehen nach den Entwicklungen dieses Paragraphen für jeden der drei Winkel der zusammensetzenden Dreiecke nur die beiden folgenden Möglichkeiten: Entweder lagert sich der Winkel stets nur um Teilpunkte erster

Art; dann ist er nach Satz 2 willkürlich wählbar; oder er lagert sich um mindestens einen Teilpunkt zweiter oder dritter Art, dann muß er nach Satz 1 ein echter Teiler sein von π. Es existieren demnach für eine Dreieckszusammensetzung keine andern Möglichkeiten als die bereits genannten, bei denen k Winkel willkürlich wählbar sind ($0 \leqq k \leqq 3$), während die übrigen $3 - k$ bestimmte, unveränderliche Teiler von π sein müssen. Eine dieser vier Möglichkeiten ist überdies ausgeschlossen: Es können nicht alle drei Winkel willkürlich sein. Denn gäbe es eine solche Zusammensetzung, so müßten in ihr sicher zwei zusammensetzende Dreiecke auftreten, die längs eines Kreisbogens aneinandergrenzen. In der von ihnen gebildeten Figur würden aber mindestens vier Teilpunkte auftreten, um die sich willkürliche Winkel lagern, was nach Satz 1 ein Widerspruch ist. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich unmittelbar der folgende

Satz 4. Die Gesamtheit aller möglichen Dreieckszusammensetzungen zerfällt in folgende drei Gruppen:

1. *Zusammensetzungen mit zwei willkürlichen und einem bestimmten Winkel.*
2. *Zusammensetzungen mit einem willkürlichen und zwei bestimmten Winkeln.*
3. *Zusammensetzungen mit lauter bestimmten Winkeln.*

Dabei müssen bei jeder der drei Arten die auftretenden bestimmten Winkel echte Teiler sein von π.

Aus Satz 3 und Satz 4 ergibt sich unmittelbar

Satz 5. In jeder Dreieckszusammensetzung tritt mindestens ein Teilpunkt auf, der von zweiter oder von dritter Art ist.

Wir gehen nun daran, jede der nach Satz 4 unterschiedenen Gruppen einzeln zu besprechen.

§ 3. Lösung für den Fall von zwei willkürlichen und einem betimmten Winkel

Zunächst ist leicht zu sehen, daß im vorliegenden Fall kein Teilpunkt vierter Art auftreten kann. Denn in jeder Konfiguration, die aus einer Anzahl äquivalenter Dreiecke mit zwei willkürlichen Winkeln besteht, treten mindestens drei Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln auf. Falls also noch ein Teilpunkt vierter Art vorkommt, müssen mindestens vier Eckpunkte auftreten.

Weiterhin ergibt es sich, daß der auftretende bestimmte Winkel nur den Wert $\frac{\pi}{2}$ haben kann. Wäre er nämlich bei einer Zusammensetzung $< \frac{\pi}{2}$, so müßte in ihr ein Teilpunkt zweiter oder dritter Art auftreten, um den sich mehr als drei zusammensetzende Dreiecke lagern würden. In ihnen würden aber mindestens vier Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln auftreten, was unmöglich ist.

Aus der letzten Betrachtung folgt gemäß Satz 3, daß in jeder Zusammensetzung des vorliegenden Falles ein Teilpunkt zweiter oder dritter Art auftritt, um den sich rechte Winkel lagern. Man erkennt leicht, daß die zweite Möglichkeit ausgeschlossen ist. Im Fall eines Teilpunktes zweiter Art fügen sich die beiden ihn umlagernden Dreiecke zu einem neuen Dreieck zusammen, was die bereits auf Seite 57 besprochene und in Fig. 5 dargestellte Zusammensetzung ergibt. Falls noch andere Zusammensetzungen existieren, muß man durch Hinzufügen von weiteren äquivalenten Dreiecken zu den beiden bereits vorhandenen noch weitere zusammengesetzte Dreiecke erhalten können. Dies ist aber unmöglich; denn zunächst kann keines der beiden Dreiecke an der freien Seite gespiegelt werden, die dem rechten Winkel anliegt, da der auftretende Teilpunkt von zweiter Art ist. Aber auch durch Spiegelung der Dreiecke an den Seiten, die dem rechten Winkel gegenüberliegen, kann man zu keinem neuen Dreieck gelangen. Irgendwelche weiteren Spiegelungen sind aber ausgeschlossen, weil dann wieder mehr als drei Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln auftreten würden.

Es ergibt sich also

Satz 6. *Die einzig mögliche Dreieckszusammensetzung mit zwei willkürlichen und einem bestimmten Winkel ist die in Fig. 5 dargestellte*[15]).

§ 4. Lösung für den Fall von einem willkürlichen und zwei bestimmten Winkeln

Wir wollen zuerst zeigen, daß auch bei diesen Zusammensetzungen kein Teilpunkt vierter Art auftreten kann. Angenommen, es trete ein

[15]) Bei der hier besprochenen Zusammensetzung, sowie bei den in § 4 besprochenen Zusammensetzungen mit einem willkürlichen Winkel kommt es für gewisse Ausnahmewerte der willkürlichen Winkel vor, daß die zusammensetzenden oder das zusammengesetzte Dreieck in Zweiecke oder in Vollkreise ausarten. Diese Ausnahmefälle sind aber so leicht zu überblicken, daß wir sie jeweils nicht ausdrücklich angeben.

solcher auf, so muß es, wie in Fig. 7 dargestellt, zwei ihn umlagernde zusammensetzende Dreiecke geben, die längs eines im Teilpunkt beginnenden (in Fig. 7 punktiert gezeichneten) Bogens zusammenhängen. Wir wollen etwa annehmen, daß der in den beiden Dreiecken auftretende willkürliche Winkel wie in Fig. 7 dem Teilpunkt vierter Art gegenüberliege. Es muß dann möglich sein, durch Hinzufügen weiterer äquivalenter Dreiecke zu den beiden genannten ein neues, zusammengesetztes Dreieck zu erhalten. Dabei kommen nur solche äquivalente Dreiecke in Betracht, die sich um einen der beiden Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln lagern, da andernfalls in der entstehenden Figur mehr als drei Eckpunkte auftreten würden. Man erkennt aber unmittelbar, daß man durch Hinzufügen von Dreiecken der genannten Art niemals zu einem neuen Dreieck gelangen kann. Wenn man annimmt, daß der Teilpunkt eine der beiden andern möglichen Lagen gegenüber dem Teilpunkt vierter Art einnehme, gelangt man in ganz ähnlicher Weise zu einem Widerspruch.

Weiterhin beruht die Lösung unseres Problems für den vorliegenden Fall auf folgendem Hilfssatz:

Satz 7. Bei einer Dreieckszusammensetzung mit einem willkürlichen und zwei bestimmten Winkeln kann keiner der bestimmten Winkel kleiner als $\frac{\pi}{4}$ *sein; ebenso können nicht beide bestimmten Winkel gleichzeitig kleiner als* $\frac{\pi}{2}$ *sein; demgemäß kommen für die Größen der bestimmten Winkel nur die folgenden drei Wertepaare in Betracht:*

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \qquad \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \qquad \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$$

Wir beweisen zuerst die erste Aussage des Satzes. Es ist zunächst leicht zu sehen, daß keiner der bestimmten Winkel kleiner als $\frac{\pi}{6}$ sein kann. Denn wäre das der Fall, so gäbe es nach Satz 4 einen Teilpunkt, um den sich mehr als 6 Dreiecke lagern würden. Das ist aber unmöglich, denn in dem Kreisbogenpolygon, das durch die 7 oder mehr Dreiecke gebildet würde, würden mindestens vier Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln auftreten, was ausgeschlossen ist. Wir wollen nun zeigen, daß die Werte $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{5}$ ebenfalls ausgeschlossen sind. Nehmen wir etwa an, einer der bestimmten Winkel habe die Größe $\frac{\pi}{5}$; der andere kann dabei gleich irgendeinem der Werte $\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{6}$ sein. Es existiert dann ein Teilpunkt zweiter oder dritter Art, um den sich Winkel von der Größe $\frac{\pi}{5}$ lagern. Nun kann der Teilpunkt nicht von dritter Art sein, denn in dem Kreisbogenpolygon, das durch die 10 ihn umlagernden Dreiecke gebildet würde, würden 5 Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln auftreten. Es bleibt nur die Möglichkeit, daß der Teilpunkt von zweiter Art ist. Es lagern sich dann, wie in Fig. 8 dargestellt, 5 Dreiecke um ihn, wobei wieder die willkürlichen Winkel dadurch gekennzeichnet sind, daß sie dunkel ausgefüllt sind. In dem durch die 5 Dreiecke gebildeten Kreisbogenpolygon treten bereits 3 Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln auf.

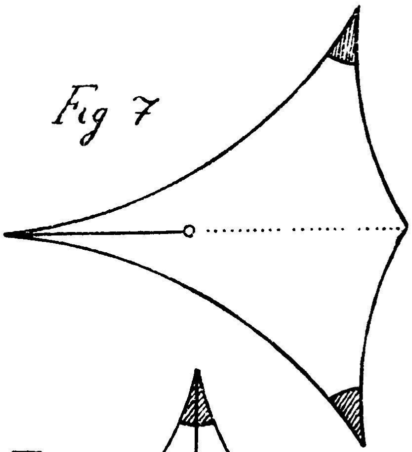


Fig 7

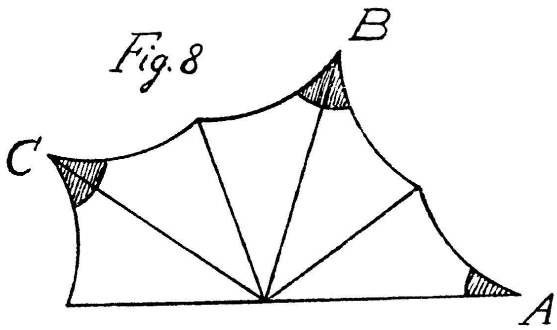


Fig. 8

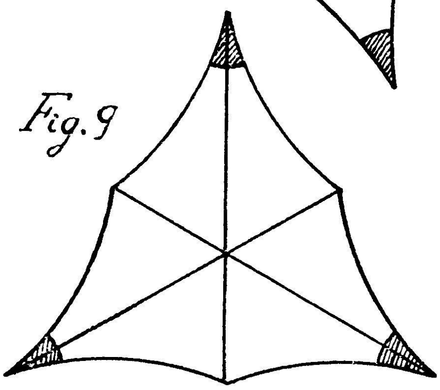


Fig. 9

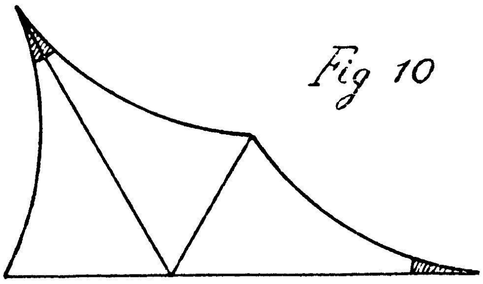


Fig 10

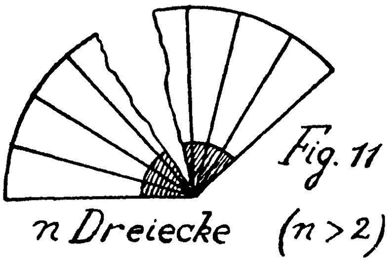
Sie seien etwa durch A, B, C bezeichnet (Fig. 8). Diese Punkte müssen, falls sich ein zusammengesetztes Dreieck bilden läßt, dessen Ecken bilden. Das führt aber zu einem Widerspruch; denn, wenn A, B, C die Ecken eines zusammengesetzten Dreiecks sein sollen, so muß es, wie auch immer die Größe des willkürlichen Winkels gewählt wird, stets zu je zweien der 3 Punkte einen Kreisbogen der durch unsere 5 Dreiecke erzeugten Dreiecksteilung geben, der sie miteinander verbindet. Man erkennt aber unmittelbar, daß es z. B. für den Wert 0 des willkürlichen Winkels keinen Kreisbogen der entstehenden Teilung gibt, der A mit C verbindet. Unsere Behauptung ist damit für den Wert $\frac{\pi}{5}$ bewiesen; für den Wert $\frac{\pi}{6}$ verläuft der Beweis genau analog.

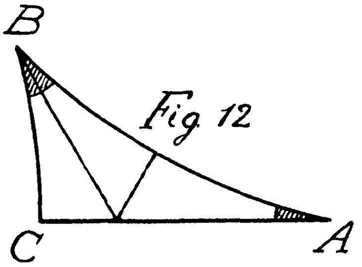
Wir kommen nun zum Beweis der zweiten Aussage von Satz 7. Es möge etwa der ungünstigste Fall vorliegen, daß beide bestimmten Winkel den Wert $\frac{\pi}{3}$ haben. Falls es möglich ist, aus Dreiecken mit einem willkürlichen und zwei bestimmten Winkeln von der Größe $\frac{\pi}{3}$ eine Zusammensetzung zu bilden, so muß in ihr nach Satz 3 ein Teilpunkt zweiter oder dritter Art auftreten, um den sich Winkel von der Größe $\frac{\pi}{3}$ lagern. Es ist zunächst leicht zu sehen, daß der Teilpunkt nicht von dritter Art sein kann. Denn dann würden sich, wie in Fig. 9 dargestellt, 6 Dreiecke um ihn lagern. In der von ihnen gebildeten Konfiguration würden aber bereits 3 Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln auftreten. Diese müßten wieder die Eckpunkte des zusammengesetzten Dreiecks bilden und es müßte, wie groß auch der willkürliche Winkel gewählt wird, stets zu je zweien der drei Punkte einen Kreisbogen der durch die 6 Dreiecke erzeugten Teilung geben, der sie miteinander verbindet. Man erkennt aber, daß z. B. für den Wert 0 des willkürlichen Winkels wieder kein derartiger Kreisbogen existiert. Der Teilpunkt kann aber auch nicht von zweiter Art sein, denn dann würden sich, wie in Fig. 10 dargestellt, 3 Dreiecke um ihn lagern. In dem von ihnen gebildeten Polygon würden 2 Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln auftreten; diese müßten wieder Eckpunkte des zusammengesetzten Dreiecks sein. Man erkennt aber, genau wie im eben besprochenen Fall des Teilpunktes dritter Art, daß das unmöglich ist. Der Beweis ist damit erbracht für den Fall, daß beide bestimmten Winkel den Wert $\frac{\pi}{3}$ haben; falls einer oder beide bestimmten Winkel $< \frac{\pi}{3}$ sind, verläuft der Beweis genau entsprechend.

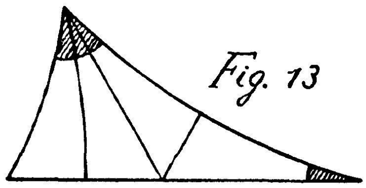
Nach dem eben bewiesenen Satz 7 kommen für die Größen der bestimmten Winkel nur drei Wertepaare in Betracht. Wir wollen nun zeigen, daß zu jedem dieser Wertepaare wirklich Zusammensetzungen existieren.

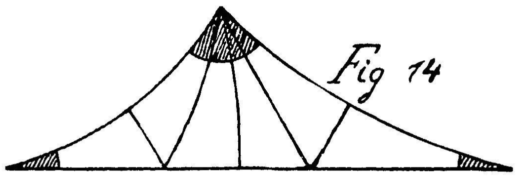
A. Beide Winkel sind rechte. Es ist leicht zu sehen, daß sich aus Dreiecken mit einem willkürlichen und zwei rechten Winkeln unendlich viele Dreieckszusammensetzungen bilden lassen. Wie in Fig. 11 dargestellt, fügt sich nämlich eine beliebige Anzahl n von äquivalenten, den Scheitelpunkt eines willkürlichen Winkels umlagernden derartigen Dreiecken stets zu einem neuen, zusammengesetzten Dreieck zusammen; dabei muß $n > 2$ vorausgesetzt werden, denn der Fall von nur zwei Dreiecken ergäbe die bereits in § 3 besprochene Zusammensetzung, bei der zwei Winkel willkürlich gewählt werden können, während dies für

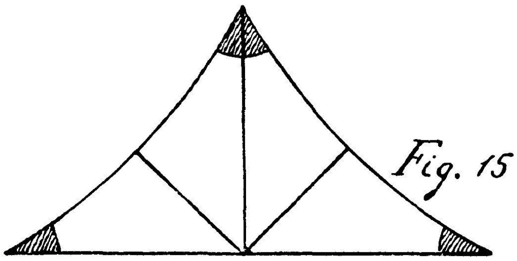
$n > 2$ nur noch für den einen nach Voraussetzung willkürlichen Winkel gilt. Wir wollen nun zeigen, daß die eben besprochenen Zusammensetzungen die einzig möglichen des vorliegenden Falles sind. In der Tat erkennt man, daß jede von den genannten Dreiecken verschiedene Konfiguration, die aus einer Anzahl äquivalenter Dreiecke mit zwei rechten und einem willkürlichen Winkel besteht und in der kein Teilpunkt vierter Art auftritt, stets eine gerade Anzahl von Eckpunkten besitzt und also niemals ein Kreisbogendreieck sein kann.











B. Die bestimmten Winkel haben die Größen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{3}$. Nach Satz 3 muß in jeder hieher gehörenden Zusammensetzung ein Teilpunkt zweiter oder dritter Art auftreten, um den sich Winkel von der Größe $\frac{\pi}{3}$ lagern. Wir wollen zuerst annehmen, der Teilpunkt sei von dritter Art. Es lagern sich dann 6 Dreiecke um ihn, die sich zu einem neuen Dreieck zusammenfügen, was die bereits auf Seite 59 betrachtete und in Fig. 6 dargestellte Zusammensetzung mit einem willkürlichen Winkel ergibt. Diese Zusammensetzung ist auch die einzig mögliche, wenn wir annehmen, daß der Teilpunkt von dritter Art ist. Denn die 3 Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln, die in den 6, den Teilpunkt umlagernden Dreiecken auftreten, müssen sicher stets die Eckpunkte des zusammengesetzten Dreiecks sein. Wenn es nun mehrere zusammengesetzte Dreiecke gäbe, so müßte es, welchen Wert man auch dem willkürlichen Winkel erteilt, stets auf mehrere Arten möglich sein, zu je zweien der 3 Punkte einen Kreisbogen der durch die 6 Dreiecke erzeugten Teilung anzugeben, der sie miteinander verbindet. Man erkennt aber, daß dies z. B. für den Wert $\frac{\pi}{6}$, für welchen die zugehörige Teilung geradlinig angenommen werden kann, nicht der

Fall ist. Wir wollen nun annehmen, der nach Satz 3 auftretende Teilpunkt sei von zweiter Art. Es lagern sich dann 3 Dreiecke um ihn, die sich zu einem neuen Dreieck zusammenfügen, dessen Ecken durch A, B, C bezeichnet seien (Fig. 12). Falls sich noch weitere Zusammensetzungen bilden lassen, so müssen die beiden Teilpunkte A und B mit willkürlichen Winkeln sicher stets Eckpunkte des zusammengesetzten Dreiecks sein. Der dritte Eckpunkt muß, da der nach Satz 3 auftretende Teilpunkt von zweiter Art ist, auf dem (eindeutig bestimmten) Kreisbogen liegen, der durch A und den Teilpunkt zweiter Art geht. Dadurch ergeben sich zwei weitere mögliche Lagen für den dritten Eckpunkt; die beiden Möglichkeiten liefern die in den Fig. 13 und 14 dargestellten Zusammensetzungen. Genau wie eben erkennt man, daß diese Zusammensetzungen auch die einzig möglichen sind, wenn wir annehmen, daß der Teilpunkt von zweiter Art ist.

C. Die bestimmten Winkel haben die Werte $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$. Nach Satz 3 muß in jeder dieser Zusammensetzungen ein Teilpunkt zweiter oder dritter Art auftreten, um den sich Winkel von der Größe $\frac{\pi}{4}$ lagern. Nun kann der Teilpunkt nicht von dritter Art sein, da dann in den ihn umlagernden Dreiecken bereits 4 Teilpunkte mit willkürlichen Winkeln auftreten würden. Der Teilpunkt kann also nur von zweiter Art sein. Die 4 ihn umlagernden Dreiecke bilden dann die in Fig. 15 dargestellte Zusammensetzung. Man erkennt wieder, daß diese auch die einzig mögliche des vorliegenden Falles ist.

Wir fassen die in diesem Paragraphen erhaltenen Resultate nochmals zusammen in

Satz 8. *Die einzig möglichen Dreieckszusammensetzungen mit einem willkürlichen und zwei bestimmten Winkeln sind die in den Fig. 6, 11, 12, 13, 14, 15 dargestellten*[15]*).*

§ 5. Einteilung der Dreieckzusammensetzungen mit lauter bestimmten Winkeln

Nach Satz 4 kommen zur Bildung dieser Zusammensetzungen nur solche Dreiecke in Betracht, deren sämtliche Winkel echte Teiler sind von π. Es bezeichne $\mathfrak{D}$ ein derartiges Dreieck. Wir denken uns die zu $\mathfrak{D}$ gehörende Dreiecksteilung gebildet; sie ist, da alle Winkel echte Teiler sind von π, schlicht. Falls sich aus $\mathfrak{D}$ Dreieckszusammensetzungen mit lauter bestimmten Winkeln bilden lassen, so besitzen die zusammengesetzten Dreiecke (die, wie man aus den in § 1 gegebenen Beispielen erkennt, schlicht oder mehrblättrig sein können) sicher die beiden folgenden Eigenschaften: Erstens liegen sie mit Einschluß der Berandung über dem Innern der Teilung; zweitens liegen ihre Seiten über 3 Kreisbogen der Teilung. Es sei nun umgekehrt ein Dreieck $\mathfrak{D}^*$ vorgelegt, das diese beiden Eigenschaften besitzt. Dann bestehen die beiden folgenden Möglichkeiten: Entweder besteht $\mathfrak{D}^*$ aus einem einzelnen, mit $\mathfrak{D}$ äquivalenten Dreieck oder $\mathfrak{D}^*$ läßt sich einteilen in eine endliche Anzahl von über den Dreiecken der Teilung liegenden, also äquivalenten Dreiecken. Im letzten Fall stellt $\mathfrak{D}^*$ eine Dreieckszusammensetzung dar. Indessen brauchen bei dieser Zusammensetzung nicht alle Winkel unveränderlich zu sein, indem es sehr wohl eintreten kann, daß ein Winkel der entstehenden äquivalenten Dreiecke sich immer nur um Teilpunkte erster Art, also um Eckpunkte des Dreiecks $\mathfrak{D}^*$, lagert. Das Dreieck $\mathfrak{D}^*$ stellt also dann und nur dann eine aus $\mathfrak{D}$ ableitbare Zusammensetzung mit lauter bestimmten Winkeln dar, wenn es aus mehr als einem äquivalenten Dreieck besteht und wenn es keine Dreieckszusammensetzung mit willkürlichen Winkeln darstellt.

Für die folgenden Untersuchungen ist es vorteilhaft, eine Fallunterscheidung vorzunehmen. Wir schließen zunächst diejenigen Fälle aus, bei denen es eintritt, daß zwei oder alle drei Seiten des zusammengesetzten Dreiecks über dem gleichen Kreis liegen. Die Besprechung dieser Fälle wird den Inhalt von § 9 bilden. Sicher wird, wenn wir die genannten Fälle ausschließen, niemals ein Teilpunkt vierter Art auftreten können.

Bei den übrigen Fällen treten vollständig verschiedene Verhältnisse auf, je nachdem die Winkelsumme der äquivalenten Dreiecke $\lesseqgtr \pi$ ist. Es ist dies die gleiche Fallunterscheidung, die, wie in § 1 erwähnt, in anderem Zusammenhange von H. A. Schwarz vorgenommen wurde. Wir werden deshalb im folgenden die drei Fälle getrennt behandeln.

§ 6. Erster Fall: Die Winkelsumme der zusammensetzenden Dreiecke ist $> \pi$

Da die Winkel der zusammensetzenden Dreiecke einerseits echte Teiler von π sein müssen, anderseits ihre Summe $> \pi$ sein soll, kommen, wie bereits H. A. Schwarz erkannt hat, für ihre Größen nur die folgenden Wertekombinationen in Betracht:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{n}; \quad \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}; \quad \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}.$$

Bei der ersten Möglichkeit kann n irgend eine natürliche Zahl $\geqq 2$ sein. Man bezeichnet die vier Fälle bezw. als Dieder-, Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaederfall.

Es sei nun irgend ein Dreieck gegeben, dessen Winkel gleich einem der angegebenen Werttripel sind. Wir wollen zeigen, wie man alle aus ihm ableitbaren Zusammensetzungen mit lauter bestimmten Winkeln finden kann. Aus den Entwicklungen von § 5 folgt, daß wir alle diese Zusammensetzungen und nur sie erhalten, wenn wir erstens alle möglichen Systeme von drei (von einander verschiedenen) Kreisen der durch unser Dreieck erzeugten Teilung aufsuchen, zweitens zu jedem der erhaltenen Kreistripel die Gesamtheit der Kreisbogendreiecke angeben, deren Seiten über den Kreisen des Tripels liegen, drittens schließlich aus der Gesamtheit der erhaltenen Dreiecke diejenigen aussondern, die nur aus einem einzelnen Dreieck bestehen, ebenso diejenigen, die Zusammensetzungen mit willkürlichen Winkeln darstellen. Der erste dieser Schritte ist eine triviale Aufgabe, denn, da die Winkelsumme der Dreiecke $> \pi$ vorausgesetzt wurde, besitzt unsere Teilung nur endlich viele Kreise. Der zweite Schritt führt auf das erstmals von F. Klein gestellte und gelöste Problem, alle möglichen Kreisbogendreiecke anzugeben, deren Seiten über drei gegebenen Kreisen liegen[16]). Das Verfahren von F. Klein ist dabei das folgende: Zuerst bildet man die zu dem betreffenden Dreieck gehörenden sogenannten reduzierten Dreiecke; von diesen letzteren geht man sodann vermittelst der Prozesse der lateralen und polaren Anhängung von Kreisscheiben zum allgemeinsten Dreieck über, dessen Seiten über den Kreisen des Tripels liegen. Falls die 3 Kreise so liegen, daß die Ebene durch sie in 8 Kreisbogendreiecke eingeteilt wird, existieren stets unendlich viele Dreiecke, deren Seiten über den 3 Kreisen liegen. In betreff einer genauen Durchführung sei auf die genannten Originalabhandlungen verwiesen. Der dritte der angegebenen Schritte ist wieder trivial.

Die durch unser Verfahren erhaltenen Zusammensetzungen sind, wie man unmittelbar erkennt, nicht alle voneinander verschieden, indessen ist es offenbar sehr leicht, das Verfahren so zu modifizieren, daß man jede Zusammensetzung nur einmal erhält.

[16]) *F. Klein*, Über die Nullstellen der hypergeometrischen Funktion, Math. Ann. Bd. 37 (1890), §§ 5—7. Eine vereinfachte und ausführlichere Darstellung findet sich in *F. Klein*, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion (Berlin, 1933), §§ 48—51. Ferner ist die Theorie durchgeführt in der Arbeit von *Fr. Schilling*, Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s-Funktion. Math. Ann., Bd. 44 (1894), §§ 16—17.

Wir fassen die erhaltenen Resultate nochmals zusammen in

Satz 9. *Im vorliegenden Fall existieren unendlich viele Dreieckszusammensetzungen; man kann sie alle nach dem von F. Klein l. c. angegebenen Verfahren erhalten.*

§ 7. Zweiter Fall: Die Winkelsumme der zusammensetzenden Dreiecke ist $= \pi$

Da die Winkel der zusammensetzenden Dreiecke einerseits sämtlich echte Teiler sein müssen von π, anderseits ihre Summe gleich π sein soll, kommen, wie man sofort erkennt, für ihre Größen nur die drei folgenden Wertekombinationen in Betracht:

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \qquad \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$

Es sei nun ein Dreieck gegeben, dessen Winkel gleich einem der angegebenen Werttripel sind; es kann geradlinig angenommen werden. Wir wollen wieder alle aus ihm ableitbaren Dreieckszusammensetzungen mit lauter bestimmten Winkeln angeben. Wir denken uns dazu die zu dem Dreieck gehörende Dreiecksteilung gebildet; sie ist ebenfalls geradlinig und bedeckt die ganze Ebene mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes schlicht[17]). Es ist nun leicht zu sehen, daß sich aus dem gegebenen Dreieck unendlichviele Zusammensetzungen mit lauter bestimmten Winkeln ableiten lassen. Wenn wir nämlich irgend 3 Geraden der Teilung herausgreifen, die ein endliches Dreieck einschließen, so stellt dieses endliche Dreieck gemäß den Betrachtungen von § 5 im allgemeinen eine Dreieckszusammensetzung mit lauter bestimmten Winkeln dar, die sich aus dem gegebenen Dreieck ableiten läßt. Eine Ausnahme liegt nur dann vor, wenn das endliche Dreieck aus nur einem äquivalenten Dreieck besteht, oder wenn es eine Zusammensetzung mit willkürlichen Winkeln darstellt. Es ist nun leicht zu sehen, daß die so erhaltenen Zusammensetzungen die einzig möglichen mit lauter bestimmten Winkeln sind, die sich aus dem gegebenen Dreieck ableiten lassen; denn die genannten endlichen Dreiecke sind die einzigen, die mit Einschluß der Berandung über dem Innern der Teilung liegen (die also den Punkt ∞ weder im

[17]) Die drei möglichen Teilungen dieses Falles finden sich dargestellt in *Vivanti*, Fonctions polyédriques et modulaires, pag. 106—107.

Innern noch auf ihrer Berandung enthalten), und deren 3 Seiten über 3 Geraden der Teilung liegen. Wir brauchen also, um alle Zusammensetzungen zu bilden, nur alle endlichen Dreiecke aufzusuchen, die von 3 Geraden der Teilung begrenzt werden, und aus ihnen diejenigen, die aus nur einem Dreieck bestehen und diejenigen, die Zusammensetzungen mit willkürlichen Winkeln darstellen, auszuscheiden.

Die entstehenden Zusammensetzungen sind nicht alle voneinander verschieden; es ist aber offenbar leicht, ein Verfahren anzugeben, wodurch man jede Zusammensetzung einmal und nur einmal erhält.

Wir fassen die erhaltenen Resultate nochmals zusammen in

Satz 10. *Im vorliegenden Fall existieren unendlich viele Dreieckszusammensetzungen; man kann sie alle in elementarer Weise aus den drei in Betracht fallenden Dreiecksteilungen erhalten.*

§ 8. Die Winkelsumme der zusammensetzenden Dreiecke ist $< \pi$

Die hier auftretenden Verhältnisse werden beherrscht durch

Satz 11. *Im vorliegenden Fall existieren nur endlich viele Dreieckszusammensetzungen.*

Dieser Satz ergibt sich aus einer Reihe weiterer, hierher gehörender Sätze, auf die wir zuerst eingehen wollen.

Es sei eine schlichte Dreiecksteilung mit Grenzkreis gegeben. In Verallgemeinerung unserer früheren Ausdrucksweise bezeichnen wir einen ihrer Punkte als Teilpunkt, wenn sich um ihn eine Anzahl Dreiecke der Teilung lagern. Je nachdem diese Anzahl endlich oder unendlich ist, heiße der Teilpunkt elliptisch oder parabolisch. Ferner legen wir den folgenden Betrachtungen die ebene hyperbolische nichteuklidische Geometrie[18]) zugrunde. Wir erhalten den Anschluß an diese Geometrie, wenn wir den von unserer Teilung eingenommenen Kreis als hyperbolische Ebene betrachten[18]). Die Kreisbogen der Teilung sind dann nichteuklidische Geraden. Weiterhin verstehen wir unter dem nichteuklidischen Gesichtswinkel 2φ eines Kreisbogens $\mathfrak{B}$ unserer Teilung in bezug auf irgendeinen nicht auf $\mathfrak{B}$ liegenden, der Teilung angehörenden Punkt T, den Winkel,

[18]) Für die Elemente dieser nichteuklidischen Geometrie und ihren Zusammenhang mit der Theorie der Dreiecksteilungen vergl. *C. Carathéodory,* Conformal representation, Kapitel 2, ferner *F. Klein,* Vorl. über nichteuklidische Geometrie (Berlin, 1928), pag. 311 ff.

der von den beiden nichteuklidischen Parallelen eingeschlossen wird, die sich durch T zum Bogen $\mathfrak{B}$ ziehen lassen (Fig. 16). Wir sagen dann, $\mathfrak{B}$ erscheine von T aus gesehen unter dem Gesichtswinkel 2φ. Der auf diese Weise eingeführte Begriff des nichteuklidischen Gesichtswinkels ist, wie alle Begriffe unserer nichteuklidischen Geometrie, invariant gegenüber irgendwelchen Möbiustransformationen, die man mit der Teilung vornimmt. Es gilt nun

Satz 12. *Es sei eine schlichte Dreiecksteilung mit Grenzkreis vorgelegt. $\mathfrak{B}$ sei irgendeiner ihrer Kreisbogen, T irgendein nicht auf $\mathfrak{B}$ liegender Teilpunkt. Die Anzahl der Dreiecke, die sich um T lagern, sei mit $2n$ bezeichnet. Dann gilt für den nichteuklidischen Gesichtswinkel 2φ von $\mathfrak{B}$ in bezug auf T stets die Relation $2\varphi \leqq \frac{6\pi}{n}$, und das Gleichheitszeichen steht dann und nur dann, wenn T parabolisch ist.*

Beweis: Zunächst ist klar, daß im Fall eines parabolischen Teilpunktes das Gleichheitszeichen steht. Wir wollen nun zeigen, daß im Fall eines elliptischen Teilpunktes stets das Kleinerzeichen stehen muß. Dazu denken wir uns zunächst die Teilung durch eine Möbiustransformation so umgeformt, daß der Teilpunkt T in den Mittelpunkt M des Grenzkreises fällt. Die beiden von T aus an einen Bogen $\mathfrak{B}$ gezogenen nichteuklidischen Parallelen und der von ihnen eingeschlossene nichteuklidische Gesichtswinkel stimmen dann überein mit den beiden von M aus an $\mathfrak{B}$ gezogenen euklidischen Tangenten und dem von ihnen eingeschlossenen euklidischen Gesichtswinkel von $\mathfrak{B}$ in bezug auf M, und unser Beweis ist auf die euklidische Aufgabe zurückgeführt, zu zeigen, daß kein Kreisbogen der Teilung von M aus gesehen unter einem euklidischen Gesichtswinkel $2\varphi < \frac{6\pi}{n}$ erscheinen kann. Dies ist zunächst unmittelbar klar, wenn $n \leqq 6$. Wir werden also im folgenden stets voraussetzen, daß

$$n \geqq 7 \tag{1}$$

Sodann erkennt man, daß diejenigen nicht durch M gehenden Kreisbogen von M aus gesehen unter dem größten Gesichtswinkel erscheinen, die von M den geringsten Abstand haben. Wir brauchen also die in Satz 12 ausgesprochene Ungleichung nur für einen dieser Kreisbogen zu beweisen; für alle andern wird sie um so mehr erfüllt sein. Die Kreisbogen, die von M den geringsten Abstand haben, sind aber gerade diejenigen, die zusammen mit den n durch M gehenden Geraden die $2n$ äquivalenten

Dreiecke begrenzen, die den Punkt M umlagern. Jedes dieser Dreiecke hat einen Winkel von der Größe $\frac{\pi}{n}$, dessen Scheitelpunkt der Punkt M ist und zwei andere Winkel, die wir durch α und β bezeichnen, wobei wir die Bezeichnung stets so wählen, daß $\alpha \geqq \beta$. Da α und β einerseits echte Teiler sind von π, anderseits ihre Summe $< \pi$ ist, gilt

$$\alpha \leqq \frac{\pi}{2}, \quad \beta \leqq \frac{\pi}{3} \tag{2}$$

Wir wollen nun zuerst zeigen, daß die Ungleichung von Satz 12 erfüllt ist, wenn in den beiden Relationen (2) das Gleichheitszeichen steht; nachher zeigen wir, daß sie um so mehr gilt, wenn in einer oder in beiden Rela-

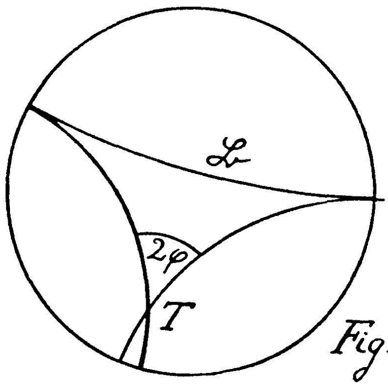


Fig. 16

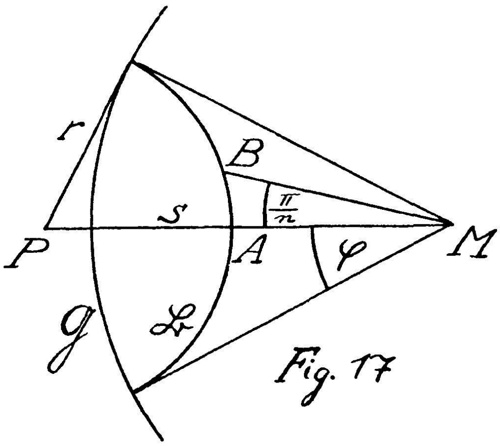


Fig. 17

tionen das Kleinerzeichen steht. Fig. 17 zeigt die auftretenden Verhältnisse für den ersten Fall. Das sich um den Mittelpunkt M des Grenzkreises $\mathfrak{G}$ lagernde Kreisbogendreieck AMB hat bei A und B die Winkel $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = \frac{\pi}{3}$. Die Seite AB liegt auf dem Kreisbogen $\mathfrak{B}$ mit dem maximalen Gesichtswinkel $2\,\varphi$. Der Mittelpunkt von $\mathfrak{B}$ sei durch P, sein Radius durch r bezeichnet; schließlich bedeute s den Abstand der Punkte M und P. Es ergibt sich unmittelbar, daß

$$\sin \varphi = \frac{r}{s}. \tag{3}$$

Da ferner die Gerade MB den Bogen $\mathfrak{B}$ unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$ schneidet, folgt, daß P von dieser Geraden den Abstand $\frac{r}{2}$ hat, so daß

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{r}{2s}. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt

$$\sin \varphi = 2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{5}$$

Anderseits ist

$$\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) = 3\ \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) - 4\ \sin^3\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{6}$$

woraus sich, unter Berücksichtigung von (5) ergibt:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{n}\right) = \sin\varphi + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\left[1 - 4\ \sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]. \tag{7}$$

Da nach (1) $n > 6$ vorausgesetzt wurde, ist $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) < \frac{1}{2}$ und infolgedessen das zweite Glied auf der rechten Seite von (7) positiv. Daraus ergibt sich:

$$\sin\varphi < \sin\left(\frac{3\pi}{n}\right)$$

oder

$$\varphi < \frac{3\pi}{n} \qquad\qquad 2\varphi < \frac{6\pi}{n} \tag{8}$$

Wir wollen nun auch zulassen, daß in einer oder in beiden Relationen (2) das Kleinerzeichen steht. Wir denken uns α und β alle in Betracht fallenden Werte durchlaufen und zu jedem Wertepaar, genau entsprechend wie in Fig. 17, den maximalen Gesichtswinkel konstruiert. Man erkennt leicht, daß dieser Winkel eine Funktion von α und β ist, die mit ihren Argumenten monoton wächst, dergestalt, daß, wenn man α oder β oder beide Winkel vergrößert, sich auch der maximale Gesichtswinkel vergrößert. Indem wir also die Ungleichung von Satz 12 für die größten Werte bewiesen haben, die α und β annehmen können, gilt sie um so mehr für alle andern Wertepaare. Damit ist Satz 12 in allen Stücken bewiesen.

Aus Satz 12 folgt weiter

Satz 13. *Bei einer Dreieckszusammensetzung des vorliegenden Falles kann keiner der bestimmten Winkel* $< \frac{\pi}{12}$ *sein.*

Angenommen, einer der bestimmten Winkel sei $< \frac{\pi}{12}$, so muß in der Zusammensetzung ein Teilpunkt T von zweiter oder dritter Art auftreten, um den sich mehr als 12 Dreiecke lagern. Ferner muß es möglich sein, das zusammengesetzte Dreieck derart über einer schlichten Dreiecksteilung mit Grenzkreis auszubreiten, daß jede Seite über einem Kreisbogen der Teilung liegt. Nehmen wir etwa an, daß T von dritter Art sei, so erscheint jeder dieser Kreisbogen von T aus gesehen unter einem bestimmten nichteuklidischen Gesichtswinkel, und es muß die Summe dieser Gesichtswinkel sicher $> 2\pi$ sein, da andernfalls die 3 Kreisbogen kein Dreieck umschließen könnten. Das steht aber im Widerspruch zu Satz 12, denn nach diesem Satz erscheint jeder Kreisbogen von T aus gesehen unter einem Gesichtswinkel $2\varphi \leqq \frac{6\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$. Im Fall eines Teilpunktes zweiter Art gelangt man in ganz ähnlicher Weise zu einem Widerspruch.

Aus Satz 13 ergibt sich unmittelbar

Satz 14. *Es gibt nur endlichviele Werttripel, die als Größen für die drei bestimmten Winkel der Dreieckszusammensetzungen des vorliegenden Falles in Betracht kommen.*

Schließlich beweisen wir noch

Satz 15. *Zu jedem der nach Satz 14 in Betracht kommenden Werttripel gibt es nur eine endliche Zahl von Dreieckszusammensetzungen.*

Es sei irgendeines dieser Werttripel vorgelegt; wir denken uns die zu ihm gehörende Teilung gebildet. Wenn wir irgend drei ihrer Kreisbogen herausgreifen, die sich paarweise schneiden und nicht alle durch den gleichen Punkt gehen, so daß die Bogen ein ganz innerhalb der Teilung gelegenes, schlichtes Dreieck einschließen, so stellt dieses Dreieck gemäß den Betrachtungen von § 5 eine Zusammensetzung dar, die zu dem gegebenen Werttripel gehört, falls es aus mehr als einem äquivalenten Dreieck besteht und falls es keine Zusammensetzung mit willkürlichen Winkeln darstellt. Wie in § 7 erkennt man, daß die so erhaltenen (schlichten) Zusammensetzungen die einzigen sind, die zu dem vorgelegten Werttripel gehören. Es bezeichne nun T irgendeinen Teilpunkt unserer Teilung. Dann läßt sich sicher jedes zu dem vorgelegten Werttripel gehörende zusammengesetzte Dreieck dergestalt über der Teilung ausbreiten, daß jede seiner Seiten über einem Kreisbogen der Teilung liegt, und daß einer seiner Teilpunkte zweiter oder dritter Art über den Punkt T zu liegen kommt. Nehmen wir etwa an, T falle mit einem Teilpunkt dritter Art zusammen, so erscheint jeder der Kreisbogen, auf dem eine Seite des zusammengesetzten Dreiecks liegt, von T aus unter einem bestimmten nichteuklidischen Gesichtswinkel, und es muß die Summe dieser 3 Winkel $> 2\pi$ sein. Nun bilden aber die Gesichtswinkel sämtlicher Kreise unserer Teilung in bezug auf T, wenn wir sie ihrer Größe nach fallend anordnen, eine Zahlenfolge mit der einzigen Häufungsstelle 0; infolgedessen gibt es nur endlichviele Kreisbogentripel, so daß die Summe der 3 Gesichtswinkel in bezug auf $T > 2\pi$ ist. Da es aber, wie wir eben sahen, zu jedem dieser Tripel höchstens ein zusammengesetztes Dreieck gibt, dessen Seiten über seinen Kreisbogen liegen, ist die Anzahl dieser letzteren ebenfalls endlich. Wenn wir annehmen, daß T mit einem Teilpunkt zweiter Art zusammenfällt, gelangt man durch ganz ähnliche Betrachtungen zum Ziel.

Aus Satz 14 und Satz 15 ergibt sich nun unmittelbar der anfangs aufgestellte Satz 11. Schließlich erkennt man, daß die Entwicklungen dieses Paragraphen auch eine Methode zur wirklichen Aufstellung der endlichvielen Dreieckszusammensetzungen darstellen.

§ 9. Lösung im Falle zusammenfallender Seiten

Wir wollen zuerst zeigen, daß zur Bildung dieser Zusammensetzungen nur solche äquivalente Dreiecke in Betracht kommen, deren Winkelsumme $> \pi$ ist. Betrachten wir etwa den Fall zweier zusammenfallender Seiten. Es sei $\mathfrak{D}^*$ ein derartiges zusammengesetztes Dreieck; seine Seiten mögen über den Kreisen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ liegen. Durch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ wird die Ebene in 4 Zweiecke eingeteilt. Sicher bedeckt dann $\mathfrak{D}^*$ zwei aneinandergrenzende dieser Zweiecke, also auch den von ihnen eingenommenen Vollkreis. Nun tritt aber nach den Betrachtungen von § 5 nur dann, wenn die zusammensetzenden Dreiecke eine Winkelsumme $> \pi$ haben, der Fall ein, daß das zusammengesetzte Dreieck einen Kreis, auf dem eine seiner Seiten liegt, vollständig überdeckt; daraus ergibt sich unmittelbar unsere Behauptung. Wenn alle drei Seiten über dem gleichen Kreis liegen, verläuft der Beweis ganz analog.

Wir können also unsere Aufgabe, entsprechend, wie in § 6 so formulieren: Zu jeder der in § 6 besprochenen, die Ebene vollständig und lückenlos überdeckenden Dreiecksteilungen sollen sämtliche Dreiecke angegeben werden, deren Seiten über zwei bezw. über nur einem Kreis der Teilungen liegen und die keine Zusammensetzungen mit willkürlichen Winkeln darstellen. Das führt aber auf einen Spezialfall des in § 6 besprochenen Problems, alle Kreisbogendreiecke zu finden, deren Seiten über drei gegebenen Kreisen liegen, nämlich auf den Fall, daß mindestens zwei dieser Kreise zusammenfallen. Die auf Seite 68 zitierten Arbeiten enthalten auch für diesen Fall die Lösung des Problems; wir begnügen uns deshalb, auf diese Arbeiten zu verweisen[19]).

[19]) Besonders eingehend ist die Theorie durchgeführt in der genannten Arbeit von *Fr. Schilling*, § 17.

Wir wollen noch kurz auf einen Umstand eingehen, der für die Zusammensetzungen des vorliegenden Falles charakteristisch ist. Bei den Zusammensetzungen mit zwei zusammenfallenden Seiten kann stets derjenige Eckpunkt, von dem die beiden zusammenfallenden Seiten ausgehen, innerhalb eines gewissen Intervalls und mit Ausnahme gewisser Punkte völlig willkürlich gewählt werden. Zum Beispiel kann bei der in Fig. 4 dargestellten Zusammensetzung der Eckpunkt C ein beliebiger Punkt der Strecke AE mit Ausnahme der Punkte A, G, E sein. Entsprechend können bei den Zusammensetzungen mit lauter zusammenfallenden Seiten sämtliche Eckpunkte innerhalb gewisser Grenzen willkürlich gewählt werden. Die Gesamtheit der Zusammensetzungen des vorliegenden Falles zerfällt demnach in lauter ein- bezw. dreiparametrige Scharen. Wir fassen die erhaltenen Resultate nochmals zusammen in

Satz 16. *Zur Bildung der Zusammensetzungen des vorliegenden Falles kommen nur solche Dreiecke in Betracht, deren Winkelsumme* $> \pi$ *ist; die Gesamtheit aller Zusammensetzungen zerfällt in lauter ein- und dreiparametrige Scharen; diese lassen sich alle nach der von F. Klein l. c. angegebenen Methode aufstellen.*

Im vorliegenden Paragraphen wird der letzte der Fälle erledigt, die sich bei der Lösung des in § 1 gestellten Problems darbieten können. Dieses ist damit gelöst; wir haben alle möglichen Dreieckszusammensetzungen gefunden.

(Eingegangen den 21. August 1936.)