**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 9 (1936-1937)

**Artikel:** Sopra alcune curve e superficie covarianti delle rigate sghembe.
**Autor:** Longhi, Ambrogio
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-10166

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 14.10.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Sopra alcune curve e superficie covarianti delle rigate sghembe

Di Ambrogio Longhi, a Lugano

**1.** In questo lavoro tratto succintamente di certe curve e superficie, annesse ad ogni rigata gobba, le quali credo non siano state finora oggetto di particolari indagini.

Come già in precedenti studî sulle rigate[1]) ricorro qui pure al metodo iperspaziale identificando, secondo il noto punto di vista del Klein, l'ordinaria geometria della retta con la geometria di una quadrica $V_4^2$ dello spazio $S_5$ a cinque dimensioni.

Per brevità, circa ad esempio le *falde* di una rigata algebrica, i loro *caratteri*, le rispettive *varietà osculatrici* di rette e totalità di tangenti a contatto *generalmente* $(i+1)$-*punto*, rimando senz'altro alla prima delle due Memorie testè citate, richiamandola con la semplice indicazione «F».

**2.** In tutto il seguito si designerà con $R_n^p$ una superficie gobba d'ordine $n$ e di genere $p$, con $C_n^p$ la curva (del medesimo ordine e genere) che la rappresenta (n. 1) su $V_4^2$, e con $n_k$ il $k$-esimo rango (in particolare la classe) di tale curva; onde sarà[2]):

$$n_k = (k+1)\,(n+kp-k) - \Sigma\left[k\alpha + (k-1)\,\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1} - \frac{k\,(k+1)}{2}\right],$$

la sommatoria estendendosi ai rami singolari $(\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots)$ di $C_n^p$, o, ciò che è lo stesso («F», n. 1), alle falde singolari $(\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots)$ di $R_n^p$.

La $R_n^p$ si dirà *generica* quando (appartenendo eventualmente a complessi lineari) fra tutte le rigate di ordine $n$ e di genere $p$, non offra altre particolari singolarità che linee multiple ordinarie: ogni sua falda ha quindi i caratteri («F», n. 1) eguali ad 1, tranne al più l'ultimo che può essere 2.

La rigata sarà per altro quasi sempre supposta dotata di falde comunque singolari. Per ottenere allora dai risultati generali stabiliti in tale ipotesi, quelli relativi al caso di una rigata con le più comuni singolarità,

---

[1]) Vedasi la Memoria: Ricerche sulle falde delle rigate algebriche [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, 67, (2), 1933]; e l'altra: Le tangenti multiple delle rigate algebriche [ibidem, 68, (2), 1935].

[2]) Cfr., ad es., *F. Severi*, Trattato di geometria algebrica, Vol. 1, Parte I (Bologna, 1926), p. 142.

si tenga presente che («F», n. 1) una generatrice origine di una falda $g(\alpha\alpha_1\alpha_2...)$ diviene: una ordinaria generatrice stazionaria quando $\alpha = 2$ e $\alpha_i = 1$ per $i \geqslant 1$, una generatrice d'inflessione quando $\alpha_1 = 2$ e $\alpha = \alpha_i = 1$ per $i \neq 1$, ed una generatrice iperbolica quando $\alpha_2 = 2$ e $\alpha = \alpha_i = 1$ per $i \neq 2$.

**3.** Sia $g(\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ una falda, di origine $g$ e di caratteri $\alpha, \alpha_1, ..., \alpha_4$ (cfr. «F», n. 1), della rigata $R_n^p$: supposta questa non contenuta in alcun complesso lineare; e sia $t$ una sua tangente principale (col punto di contatto sulla generatrice $g$) avente la proprietà di appartenere al complesso lineare osculatore lungo $g$ alla falda stessa («F», n$^i$ 1 e 2). In $S_5$ la $t$ è rappresentata (n. 1) da un punto $T$, della quadrica $V_4^2$, comune all'$S_4$ osculatore in $G$ al ramo $G(\alpha\alpha_1...\alpha_4)$, immagine della falda sulla curva $C_n^p$, e all'$S_2'$ polare, rispetto a $V_4^2$, dell'$S_2$ osculatore pure in $G$ a tale ramo.

Ora, può avvenire che l'iperpiano $S_4$ contenga interamente il piano $S_2'$, oppure lo seghi in una retta di $V_4^2$: perchè nessuno di questi casi si verifichi, è necessario e sufficiente ammettere che il piano $S_2$ non appartenga alla quadrica $V_4^2$ e neppure la tocchi lungo una retta, e che lo stesso $S_2$ e l'$S_4$ non siano contemporaneamente tangenti a $V_4^2$ (nè in un medesimo punto, che dovrebbe allora essere $G$, nè in punti diversi).

In tali ipotesi esistono due soli punti $T$, che sono precisamente le intersezioni $T_1$ e $T_2$, con $V_4^2$, della retta $S_1$ comune agli spazi $S_4$ ed $S_2'$: variando la falda $g(\alpha\alpha_1...\alpha_4)$ della rigata $R_n^p$, le due tangenti principali $t_1$ e $t_2$ di essa, rappresentate da $T_1$ e $T_2$, generano un'altra rigata $\Omega$; l'ordine di $\Omega$ uguaglia quello della curva luogo delle coppie di punti $T_1$, $T_2$ ed è quindi il doppio dell'ordine $x$ della superficie $V_2^x$ descritta dalla retta $S_1 \equiv (S_2'S_4)$.

Per determinare $x$ si osserva che sopra un generico $S_3^*$ il piano variabile $S_2'$ segna una curva $W$ (sezione di $S_3^*$ con la varietà polare, rispetto a $V_4^2$, della seconda sviluppabile osculatrice di $C_n^p$), d'ordine $n_2$ (n. 2) e di genere $p$. Da ogni punto $P$ di $W$ esce un $S_2'$, polare dell' $S_2$ osculatore nell'origine $G$ ad un ramo di $C_n^p$; l' $S_4$ osculatore in $G$ a questo ramo incontra $W$ in $n_2$ punti $P'$; e poichè da ogni punto $P'$ partono $n_4$ (n. 2) iperpiani osculatori di $C_n^p$, fra i punti $P$ e $P'$ di $W$ esiste una corrispondenza algebrica $(n_4, n_2)$: il numero dei suoi punti uniti è pure quello delle rette $S_1 \equiv (S_2'S_4)$ incidenti ad $S_3^*$, ossia è l'ordine cercato $x$.

È ora evidente che, sulla curva $W$, il gruppo costituito dagli $n_2$ punti $P'$, corrispondenti ad un punto mobile $P$, varia entro una serie lineare d'ordine $n_2$: quella segnata su $W$ da tutti i piani di $S_3^*$. Ciò basta[3]) per

[3]) Cfr. *F. Severi*, Trattato citato, p. 198.

concludere che si tratta di una corrispondenza $(n_4, n_2)$ a valenza zero; onde, per il principio di Cayley-Brill, si ha:

$$x = n_2 + n_4,$$

cioè (n. 2):

$$x = 8\,n + 26\,p - 26 - \sum(6\,\alpha + 4\,\alpha_1 + 2\,\alpha_2 + \alpha_3 - 13)\,. \qquad (1)$$

Considerando di nuovo la generatrice $S_1 \equiv (S_2' S_4)$ della superficie $V_2^x$, importa notare come essa debba necessariamente appoggiarsi e all'$S_3$ osculatore in $G$ al ramo $G(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ di $C_n^p$ e all'$S_1'$ polare di tale $S_3$ rispetto a $V_4^2$: infatti $S_1$ ed $S_3$ appartengono insieme all'iperpiano $S_4$ (osculatore in $G$ a quel ramo), mentre $S_1$ ed $S_1'$ sono insieme contenuti nel piano $S_2'$ (polare dell'$S_2$ osculatore in $G$ al medesimo ramo).

I punti $T_1$ e $T_2$, intersezioni di $S_1$ con $V_4^2$, sono quindi coniugati nell'omografia involutoria avente per spazî fondamentali, supposti indipendenti, $S_3$ ed $S_1'$ (e trasformante in sè la quadrica $V_4^2$); ne deriva[4]) che nello spazio ordinario le corrispondenti rette $t_1$ e $t_2$ (generatrici della rigata $\Omega$) sono coniugate in una involuzione gobba: gli assi $a_1, a_2$ della quale hanno per immagini in $S_5$ i punti d'incontro di $V_4^2$ con $S_1'$, e per conseguenza («F», n. 3, III) coincidono con le due[5]) tangenti a contatto generalmente quadripunto («F», n. 2) relative alla falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ di $R_n^p$.

Quando poi $S_3$ ed $S_1'$ non sono indipendenti, e per ciò si verifica la coincidenza di $a_1$ e $a_2$ in una sola retta, in questa cade pure una almeno delle rette $t_1, t_2$; le quali, in ogni caso, sono sempre o distinte (e allora anche sghembe) o entrambe sovrapposte ad una delle altre rette $a_1, a_2, g$: come si preciserà meglio nell'enunciato che segue.

Circa il genere $\pi$ della rigata $\Omega$, si può intanto osservare che esso è uguale a quello della curva $V_1^{2x}$ (rappresentativa di $\Omega$ in $S_5$) intersezione di $V_4^2$ con la superficie $V_2^x$; questa ha le sue generatrici $S_1 \equiv (S_2' S_4)$ in corrispondenza biunivoca con gli $S_4$ osculatori di $C_n^p$, ed è quindi di genere $p$. Sussiste allora la formula[6]):

$$2\,x - \pi - \delta = x - 2\,p + 1,$$

---

[4]) Cfr. *E. Bertini*, Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazî, seconda edizione (Messina, 1923), p. 161.

[5]) L'esistenza (di più che due e quindi) di tutto un fascio di tali tangenti, ossia l'eventualità per la falda $g\,(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ di ammettere una congruenza lineare osculatrice degenere («F», n. 3, III), è impossibile a causa dell'ipotesi che gli spazî $S_2$ ed $S_4$, osculatori in $G$ al ramo $G\,(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ di $C_n^p$, non siano entrambi tangenti a $V_4^2$.

[6]) *C. Segre*, Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques (Math. Annalen, 34, 1889, p. 2—3).

nella quale $\delta$ è almeno uguale al numero dei rami di $C_n^p$ aventi l'$S_2$ osculatore nell'origine tangente a $V_4^2$, ossia al numero:

$$\delta' \equiv 2\,(n+2\,p-2) - \sum(\alpha+\alpha_1-2) \tag{2}$$

delle falde di $R_n^p$ dotate di regolo osculatore degenere («F», n. 7).

Si trova così[7]) che in generale il valore di $\pi$ è:

$$x+2\,p-1-2\,(n+2\,p-2)+\sum(\alpha+\alpha_1-2),$$

con $x$ dato dalla (1).

Riassumendo e completando, si può enunciare:

*Sia $R_n^p$ una rigata gobba irriducibile, di ordine $n$ e di genere $p$, non contenuta in alcun complesso lineare e tale che una sua falda variabile $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ ammetta sempre* («F»,n. 1) *un regolo osculatore: mai degenere quando il complesso lineare $\gamma$ osculatore lungo $g$ alla stessa falda è speciale, ed eventualmente composto di due distinti fasci di raggi in ogni altro caso.*

*Fra le tangenti principali* («F», n. 2) *della falda, coi punti di contatto su $g$, ne esistono allora due, $t_1$ e $t_2$, che appartengono al complesso $\gamma$.*

*Il luogo delle coppie di tangenti principali $t_1$, $t_2$ è una rigata $\Omega$ di ordine:*

$$16\,n+52\,(p-1)-2\sum(6\,\alpha+4\,\alpha_1+2\,\alpha_2+\alpha_3-13),$$

*e di genere ordinariamente uguale*[8]) *a:*

$$6\,n+24\,p-23-\sum(5\,\alpha+3\,\alpha_1+2\,\alpha_2+\alpha_3-11)\,;$$

*le somme estendendosi a tutte le falde singolari di $R_n^p$.*

*Se $a_1$ e $a_2$ sono le tangenti*[9]) *della falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ con contatto (in punti di $g$) generalmente quadripunto* («F», n. 2 e n. 3, III), *si ha inoltre:*

1. *Quando $a_1 \neq a_2$, le rette $t_1$ e $t_2$ sono coniugate nella involuzione gobba di assi $a_1$, $a_2$: e coincidono con uno $a_i$ di questi solo se il complesso $\gamma$ è speciale (di asse $a_i$), oppure con $g$ solo se il regolo osculatore alla falda lungo $g$ è degenere.*

---

[7]) E si ritroverà per altra via al n° seguente, trattandosi del genere (eguale a quello di $\Omega$) della curva luogo dei punti di contatto, con $R_n^p$, delle generatrici di $\Omega$.

[8]) E in ogni caso mai superiore: vedasi il successivo n. 4.

[9]) Cfr. nota [5]).

2. *Quando* $a_1 \equiv a_2 \neq g$, *una delle rette* $t_1, t_2$ *coincide sempre con* $a_1 \equiv a_2$, *e avviene lo stesso anche dell'altra se il complesso* $\gamma$ *è speciale* (*di asse* $a_1 \equiv a_2$).

3. *Quando* $a_1 \equiv a_2 \equiv g$, *è pure* $t_1 \equiv t_2 \equiv g$.

*Tutte e sole le generatrici di* $R_n^p$ *origini di falde con regolo osculatore degenere sono generatrici anche della rigata* $\Omega$, *alla quale appartengono pure le tangenti di* $R_n^p$ *a contatto generalmente cinquepunto* («F», n. 2 e n. 3, IV).

**4.** Supposta la rigata $R_n^p$ non contenuta in complessi lineari, le tangenti di una sua falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$, in punti di $g$, che hanno la proprietà di appartenere al complesso lineare $\gamma$ osculatore alla stessa falda lungo $g$, sono rappresentate in $S_5$ («F», n. 3) dai punti della quadrica $V_4^2$ comuni all'$S_4$ osculatore in $G$ al ramo $G(\alpha\alpha_2 \ldots \alpha_4)$ della curva $C_n^p$ e all'$S_3'$ polare dell'$S_1$ tangente in $G$ a tale ramo.

Se si ammette che il polo $P$ di $S_4$ (rispetto a $V_4^2$) non sia un punto di $S_1$, l'$S_4$ non può contenere l'$S_3'$, e quindi lo sega in un piano $S_2''$ il quale giace su $V_4^2$ solo se vi giacciono insieme $P$ ed $S_1$: ciò escluso, sarà $S_2''$ (come $S_3'$) tangente a $V_4^2$ o in $G$ o lungo una retta per $G$, e la sua sezione con $V_4^2$ rappresenterà una coppia di fasci (distinti o no) costituiti da tangenti della falda che appartengono al complesso $\gamma$.

Sia $\Gamma$ la curva descritta dai centri di tali fasci al variare della falda: l'ordine di $\Gamma$, come pure la classe della sviluppabile circoscritta ad $R_n^p$ lungo $\Gamma$, sono entrambi eguali all'ordine $z$ della varietà $V_3^z$ generata dal piano $S_2'' \equiv (S_3' S_4)$; infatti $z$ è anche l'ordine, e insieme la classe, della congruenza di rette a cui dà origine la coppia variabile di quei fasci.

Mediante il principio di corrispondenza di Cayley-Brill si trova[10]):

$$z = n_1 + n_4,$$

ove $n_1$ ed $n_4$ sono (n. 2) il primo rango e la classe di $C_n^p$.

Noto l'ordine $n_1 + n_4$ della curva $\Gamma$, se ne determina subito il genere $\pi$.

---

[10]) Cfr., nel n. 3, la determinazione dell'ordine $x$ della superficie $V_2^x$. — Il valore di $z$ si può del resto ricavare dalla formula (1) del n° seguente, applicata al sistema $\Sigma$ degli iperpiani $S_4$ e a quello $\Sigma'$ degli spazî $S_3'$ considerati, e quindi supponendo:

$$x = z\,,\quad r = 5,\quad h = 3\,,\quad n = 1\,,\quad n' = 1\,,\quad \varrho = n_4\,(\text{n.2})\,,\quad \varrho' = n_1\,(\text{n.2})\,,\quad \alpha = 1\,,\quad \alpha' = 1\,.$$

Infatti, appartenendo $\Gamma$ alla rigata $R_n^p$, di cui incontra ogni generatrice in due punti, per una formula del Segre[11]) si ha:

$$\pi = n_1 + n_4 + 2\,(p - 1) - n + 1$$

cioè (n. 2):

$$\pi = 6\,n + 24\,p - 23 - \sum (5\alpha + 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 11)\,,$$

fatta però l'ipotesi, d'altronde generalmente verificata, che su $\Gamma$ non esistano certi particolari punti multipli[12]), per la presenza dei quali il valore di $\pi$ risulterebbe minore del precedente.

Si può così concludere:

*Essendo $R_n^p$ una rigata gobba irriducibile d'ordine $n$ e di genere $p$, non contenuta in complessi lineari, si supponga che il complesso lineare $\gamma$ osculatore ad ogni sua falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$, lungo la generatrice origine $g$, non sia mai speciale di asse $g$ e neppure, quando $g$ è singolare per la falda, speciale con l'asse passante pel punto cuspidale di $g$ o appartenente al rispettivo piano tangente singolare* («F», n$^{\text{i}}$ 1 e 3).

*Su $g$ esistono allora sempre due punti, distinti o no, aventi la proprietà che tutte le tangenti alla falda in ciascuno di essi appartengono al complesso $\gamma$.*

*Il luogo delle coppie di tali punti, relative a tutte le falde di $R_n^p$, è una linea $\Gamma$ di ordine:*

$$7\,n + 22\,p - 22 - \sum (5\alpha + 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 11)\,,$$

*e di genere ordinariamente uguale*[13]) *a:*

$$6\,n + 24\,p - 23 - \sum (5\alpha + 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 - 11)\,,$$

*estese le somme alle varie falde singolari di $R_n^p$.*

*L'ordine di $\Gamma$ è pure la classe della sviluppabile circoscritta ad $R_n^p$ lungo la linea stessa $\Gamma$.*

Si può inoltre dimostrare facilmente che:

1. *Tutte e sole le generatrici di $R_n^p$ tangenti alla linea $\Gamma$ sono: le generatrici singolari, che toccano $\Gamma$ nei rispettivi punti cuspidali; e le generatrici origini*

---

[11]) *C. Segre*, Intorno alla geometria su una rigata algebrica [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 3, (4), 1887].

[12]) Vedasi su ciò l'altro lavoro del Segre citato nella nota [6]).

[13]) E in ogni caso mai superiore.

*di falde col complesso lineare osculatore speciale, ciascuna delle quali è tangente a $\Gamma$ nel suo punto d'incontro con l'asse di tale complesso*[14]).

2. *Supposte verificate per $R_n^p$ le ipotesi*[15]) *del teorema del* n. 3, *la linea $\Gamma$ diviene il luogo dei punti di contatto con $R_n^p$ delle coppie di tangenti principali $t_1$, $t_2$ ivi considerate*[16]), *e per conseguenza* (n. 3,1.) *i due punti d'incontro con $\Gamma$ di una generatrice di $R_n^p$ separano armonicamente i due punti, della stessa generatrice, nei quali una tangente ha con $R_n^p$ un contatto generalmente quadripunto* («F», n. 3, III).

**5.** Generalizzando il procedimento applicato nel n. 3 a determinare l'ordine $x$ della superficie $V_2^x$, si perviene alla proposizione che segue, di uso frequente più innanzi:

*In uno spazio lineare $S_r$, ad r dimensioni, siano dati un sistema algebrico $\Sigma$ di $\infty^1$ ipersuperficie $V_{r-1}^n$ d'ordine n, ed un sistema algebrico $\Sigma'$ di $\infty^1$ varietà $V_h^{n'}$ della stessa dimensione h (con $o < h < r$) e di ordine $n'$.*

*Se fra gli elementi $V_{r-1}^n$ di $\Sigma$ e gli elementi $V_h^{n'}$ di $\Sigma'$ esiste una corrispondenza algebrica $(\alpha, \alpha')$, la varietà $W_h^x$ luogo della intersezione $V_{h-1}^{nn'}$ di due elementi corrispondenti variabili (supposti sempre distinti e non appartenentisi) ha l'ordine x dato dalla formula:*

$$x = \alpha n \varrho' + \alpha' n' \varrho \,, \tag{1}$$

*ove $\varrho$ è il numero delle ipersuperficie di $\Sigma$ passanti per un punto generico e $\varrho'$ è quello delle varietà di $\Sigma'$ incidenti ad un generico spazio $S_{r-h-1}$.*

Infatti, se $h=r-1$ la formula (1) è facile conseguenza del principio di corrispondenza di Chasles. Supposto poi $h < r - 1$, si osserva che una $V_h^{n'}$ del sistema $\Sigma'$ incontra un $S_{r-h}$, fissato in modo generico, in $n'$ punti, i quali, al variare di $V_h^{n'}$ entro $\Sigma'$, descrivono una curva $V_1^{\varrho'}$ di ordine $\varrho'$ (intersezione dell'$S_{r-h}$ con la $V_{h+1}$, evidentemente d'ordine $\varrho'$, luogo di tutte le $V_h^{n'}$ di $\Sigma'$).

Per ogni punto $M$ (considerato come origine di un ramo) di $V_1^{\varrho'}$ passa una varietà $V_h^{n'}$ di $\Sigma'$, alla quale corrispondono $\alpha$ ipersuperficie $V_{r-1}^n$ di $\Sigma$: sia $M'$ uno qualunque dei loro $\alpha\, n\, \varrho'$ punti d'intersezione con $V_1^{\varrho'}$. Da $M'$ escono $\varrho$ ipersuperficie $V_{r-1}^n$ di $\Sigma$, a ciascuna delle quali corrispondono

[14]) Il quale asse ha con $R_n^p$, nel medesimo punto, un contatto generalmente di 4° ordine («F», n. 3, IV).

[15]) Implicanti quelle del precedente enunciato.

[16]) Che debba intendersi per punto di contatto di $t_1$ o $t_2$ con $R_n^p$, quando $t_1$ e $t_2$ coincidono con una generatrice di $R_n^p$, appare ovviamente dalla dimostrazione svolta in questo n. 4.

$\alpha'$ varietà $V_h^{n'}$ di $\Sigma'$ seganti l'$S_{r-h}$, ossia incidenti a $V_1^{\varrho'}$, in altrettanti gruppi di $n'$ punti $M$.

Sulla curva $V_1^{\varrho'}$ esiste pertanto fra i punti $M$ ed $M'$ una corrispondenza algebrica $(\alpha' n' \varrho, \alpha n \varrho')$.

Ora, è evidente che i punti $M'$, in numero di $\alpha n \varrho'$, corrispondenti ad un punto $M$ formano un gruppo di una serie lineare d'ordine $\alpha n \varrho'$: quella segnata su $V_1^{\varrho'}$ da tutte le ipersuperficie di $S_r$ (o dell'$S_{r-h}$ cui appartiene $V_1^{\varrho'}$) di ordine $\alpha n$.

Ne deriva che si tratta di una corrispondenza $(\alpha' n' \varrho, \alpha n \varrho')$ a valenza zero, cui è applicabile il principio di Cayley-Brill, e quindi dotata di un numero di punti uniti eguale a:

$$\alpha' n' \varrho + \alpha n \varrho',$$

qualunque sia il genere di $V_1^{\varrho'}$.

Tale è dunque il numero dei punti di un generico $S_{r-h}$ comuni ciascuno a due elementi corrispondenti di $\Sigma$ e $\Sigma'$, ossia l'ordine $x$ che figura nella formula (1).

Osservazione. — La formula (1) rimane valida anche se qualche varietà $V_h^{n'}$ di $\Sigma'$ appartiene ad alcune delle ipersuperficie corrispondenti di $\Sigma$, o coincide con esse: però la varietà $W_h^x$ è allora necessariamente riducibile, essendone parte quella $V_h^{n'}$ contata un certo numero di volte.

**6.** Sia $\Delta$ un sistema, d'indice $\lambda$[17]), di $\infty^1$ complessi di rette, tutti di grado $\nu$ e posti in corrispondenza algebrica $(k, k')$ con le falde di una rigata gobba $R_n^p$.

In $S_5$ (n. 1), mentre $R_n^p$ ha per immagine una curva $C_n^p$ della quadrica $V_4^2$, tali complessi sono rappresentati, come è noto[18]), dalle varietà intersezioni complete di $V_4^2$ con $\infty^1$ ipersuperficie di ordine $\nu$, pure formanti un sistema algebrico $\Sigma$ d'indice $\lambda$, e riferite ai rami di $C_n^p$ in una corrispondenza $(k, k')$.

I $k$ complessi di $\Delta$, corrispondenti ad ogni falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots)$ di $R_n^p$, contengono sempre ciascuno $2\,\nu$, e quindi insieme $2\,k\,\nu$, delle sue tangenti principali (coi punti di contatto su $g$): ammesso però che non ne contengano mai infinite[19]).

---

[17]) Cioè tale che per una retta generica passino $\lambda$ complessi del sistema.

[18]) *F. Klein*, Über einen liniengeometrischen Satz (Math. Annalen, 22, 1883).

[19]) La quale ipotesi implica che nessuna falda di $R_n^p$ sia priva di regolo osculatore («F», n. 1).

Siano esse $t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2\,k\,\nu)$: i punti $T_i$, che le rappresentano in $S_5$, sono allora («F», n. 3) le intersezioni di $V_4^2$ con le $k$ curve in cui l'$S_2'$ polare dell'$S_2$ osculatore in $G$ al ramo $G(\alpha\alpha_1\ldots)$, di $C_n^p$, sega le $k$ ipersuperficie a questo corrispondenti in $\Sigma$.

Ora, l'ordine $x$ della superficie $W_2^x$ descritta da tali curve, al variare di $G$ su $C_n^p$, si desume dalla proposizione del n. precedente, applicata in $S_5$ al sistema $\Sigma$ già considerato di ipersuperficie e a quello $\Sigma'$ dei piani $S_2'$; è quindi da supporre in questo caso:

$$r=5,\ h=2,\ n=\nu,\ n'=1,\ \varrho=\lambda,\ \varrho'=n_2\,(\mathrm{n}\cdot 2),\ \alpha=k,\ \alpha'=k',$$

e si ha (n. 5):

$$x = k\nu n_2 + \lambda k'. \tag{1}$$

Ne segue che *l'ordine della rigata costituita dalle tangenti principali $t_i$, relative a tutte le falde di $R_n^p$, è:*

$$2\,(k\nu n_2 + \lambda k').$$

Basta infatti osservare che in $S_5$ il luogo dei corrispondenti punti $T_i$ è la linea $W_1^{2x}$ (d'ordine $2\,x$) intersezione completa della quadrica $V_4^2$ con la superficie $W_2^x$ predetta.

Fra i punti $G$ di $C_n^p$ e i punti $T_i$ di $W_1^{2x}$ esiste una corrispondenza $(1, 2\,k\,\nu)$, immagine di quella in cui sono omologhe ogni generatrice $g$ di $R_n^p$, come origine di una falda, e una qualunque delle $2\,k\,\nu$ tangenti principali $t_i$ (sopra considerate) relative alla falda stessa.

I $2\,k\,\nu$ punti $T_i$ corrispondenti ad un punto $G$, origine di un ramo $G(\alpha\alpha_1\ldots)$ di $C_n^p$, appartengono tutti al piano $S_2'$ polare dell'$S_2$ osculatore in $G$ a tale ramo[20]), e sono quindi coniugati di $G$ rispetto alla quadrica $V_4^2$. Questa contiene allora per intero (quando $G \neq T_i$) le rette $GT_i$, le quali, variando $G$ su $C_n^p$, descrivono una superficie $V_2^{\xi}$ rappresentativa della congruenza $\Gamma$ luogo di tutti i fasci di raggi $(gt_i)$ inerenti alle diverse falde $g(\alpha\alpha_1\ldots)$ di $R_n^p$.

Importa ora notare che le $2\,k\,\nu$ rette $GT_i$, variabili col ramo $G(\alpha\alpha_1\ldots)$, formano la completa intersezione di $V_4^2$ coi $k$ coni $\Gamma_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ proiettanti da $G$ le curve (d'ordine $\nu$) sezioni del piano $S_2'$ con le $k$ ipersuperficie di $\Sigma$ corrispondenti a quel ramo di $C_n^p$[21]).

---

[20]) Affinchè il punto $G$ sia unito nella corrispondenza occorre pertanto (ma non basta) che esso appartenga a entrambi i piani $S_2$ ed $S_2'$, cioè che questi piani siano (l'uno e quindi anche l'altro) tangenti (almeno) in $G$ alla quadrica $V_4^2$ (con nessun piano della quale essi possono coincidere, per l'osservazione fatta nella nota precedente).

[21]) Quando il piano $S_2'$ passa per $G$ (ossia è ivi tangente a $V_4^2$) tali coni si riducono ciascuno al piano stesso ripetuto $\nu$ volte.

Ne deriva che la superficie $V_2^\xi$ è l'intersezione *completa* della quadrica $V_4^2$ con la varietà $V_3^{\xi'}$ generata dai coni variabili $\Gamma_j$; pertanto fra gli ordini $\xi$ e $\xi'$ si ha la relazione $\xi = 2\,\xi'$, e un piano generico $S_2^*$ situato su $V_4^2$ dev'essere incidente a $V_2^\xi$ negli stessi punti in cui incontra $V_3^{\xi'}$: i quali sono sempre in numero di $\xi'$, tanto se $S_2^*$ è immagine di un piano rigato, quanto se esso rappresenta una stella di raggi. In altri termini: l'ordine e la classe della congruenza $\Gamma$ (rappresentata in $S_5$ dalla $V_2^\xi$) luogo dei fasci $(gt_i)$ sono entrambi eguali a $\frac{1}{2}\,\xi$. E per conseguenza: $\frac{1}{2}\,\xi$ *è l'ordine della curva luogo dei centri $G_i$ dei fasci $(gt_i)$, ossia dei punti di contatto con $R_n^p$ delle tangenti $t_i$, ed è insieme la classe dell'inviluppo dei piani di tali fasci, ossia dei piani tangenti ad $R_n^p$ nei punti $G_i$.*

Resta da determinare l'ordine $\xi$ della rigata $V_2^\xi$, le cui generatrici congiungono ciascuna (come fu già osservato) un punto $G$ della curva $C_n^p$ e un punto $T_i$ della curva $W_1^{2x}$, omologhi in una corrispondenza $(1, 2\,k\,\nu)$.

Quando $G$, come origine di un ramo $G(\alpha\alpha_1 \ldots)$ di $C_n^p$, è un punto unito di tale corrispondenza, l'$S_2'$ polare dell'$S_2$ osculatore in $G$ al ramo stesso è tangente[22]) almeno in $G$ alla quadrica $V_4^2$, che sega perciò in una coppia di rette $S_1'$ ed $S_1''$, distinte o no, uscenti da $G$. Di più, il punto $G$ appartiene allora ad un certo numero $\gamma$ $(\geqslant 1)$ delle $k$ ipersuperficie (d'ordine $\nu$) che corrispondono al ramo nel sistema $\Sigma$, e che vengono incontrate dalle rette $S_1'$ ed $S_1''$ nei $2k\nu$ punti $T_i$ omologhi di $G$: fra questi, quelli che coincidono con $G$, senza essere consecutivi a $G$ su alcuna delle $\gamma$ ipersuperficie suddette, sono quindi generalmente in numero di $2\,\gamma$, e in ogni caso[23]) in numero pari.

Considerando, dopo ciò, in un generico fascio d'iperpiani di $S_5$, la corrispondenza $(2x, 2k\nu n)$ che ha luogo fra due iperpiani proiettanti i punti omologhi $G$ e $T_i$ rispettivamente variabili su $C_n^p$ e su $W_1^{2x}$, si trova che l'ordine cercato $\xi$ è esprimibile con la formula:

$$\xi = 2\,x + 2\,k\,\nu\,n - 2\,\omega\,,$$

ove $x$ è dato dall'altra formula (1), e $\omega$ è il numero dei punti $G$ di $C_n^p$, contati ciascuno un debito numero di volte, origini di rami con l'$S_2$ osculatore in $G$ ivi tangente a $V_4^2$, e situati sopra una almeno delle ipersuperficie del sistema corrispondenti ai rami stessi.

In conclusione:

*Sia $\Delta$ un sistema di $\infty^1$ complessi di grado $\nu$, tale che per una retta*

---

[22]) Vedasi la nota [20]).

[23]) Ad esempio anche quando $G$ fosse multiplo per qualcuna delle medesime $\gamma$ ipersuperficie.

*generica ne passino $\lambda$; e sia $R_n^p$ una rigata gobba irriducibile, di ordine $n$ e di genere $p$, priva di falde ammettenti* («F», n. 1) *un piano rigato osculatore o una stella osculatrice di raggi, ed eventualmente contenuta in un complesso o in una congruenza lineari: anche speciali, ma con l'asse o le direttrici non appartenenti a tutti i complessi di $\Delta$.*

*Se fra i complessi di $\Delta$ e le falde di $R_n^p$ esiste una corrispondenza algebrica $(k, k')$, ogni falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots)$ di $R_n^p$ possiede $2\,k\,\nu$ tangenti principali, coi punti di contatto su $g$, appartenenti ciascuna ad uno dei $k$ complessi corrispondenti di $\Delta$: supposto che mai alcuno di questi contenga per intero il regolo costituito da tutte le tangenti principali della falda (nei punti della sua generatrice origine).*

*L'ordine della rigata luogo delle $2\,k\,\nu$ tangenti principali siffatte, relative alle varie falde di $R_n^p$, è:*

$$6\,k\,\nu\,(n+2\,p-2)+2\,\lambda\,k'-2\,k\,\nu\sum(2\alpha+\alpha_1-3),$$

*mentre l'ordine della curva luogo dei loro punti di contatto, e la classe della sviluppabile circoscritta ad $R_n^p$ lungo tale curva, sono entrambi eguali a:*

$$2\,k\,\nu\,(2\,n+3\,p-3)-\omega+\lambda k'-k\,\nu\sum(2\alpha+\alpha_1-3),$$

*estendendosi i sommatorî a tutte le falde singolari di $R_n^p$ e significando $\omega$ $(\geqslant 0)$ il numero delle falde, contate ciascuna un certo numero di volte*[24]*, aventi il rispettivo regolo osculatore degenere e nello stesso tempo la propria generatrice origine appartenente ad uno almeno dei corrispondenti complessi di $\Delta$.*

*Inoltre*[25]*) se $R_n^p$ possiede solo falde lineari, col primo rango eguale ad* 1 *e col regolo osculatore mai ridotto ad un fascio doppio di raggi* («F», n. 1), *il genere comune della rigata, della curva e della sviluppabile suddette, vale:*

$$4\,k^2\,\nu^2\,(n+2\,p-2)-k\nu n+(2k\nu-1)\,(\lambda k'-\omega)+1.$$

I successivi n.i 7—11 concernono alcune delle molteplici proposizioni particolari a cui dà luogo la precedente: dalla quale si possono far derivare, in parte, anche i risultati dei n.i 3 e 4 (cfr. n. 8, Oss. 1a).

---

[24]) Che in generale è uguale al numero di quelli, fra i $k$ corrispondenti complessi di $\Delta$, che contengono la sua generatrice origine.

[25]) Come risulta dalla formula del Segre, citata alla nota [11]), sul genere di una curva appartenente ad una rigata: o meglio da una facile estensione della stessa formula al caso in cui tale curva possiede punti con multiplicità maggiore di 2.

Osservazione. — Si può notare che *gli ordini dei due luoghi, rigata e curva, sopra considerati* (nell'ultimo enunciato) *sono anche eguali rispettivamente a:*

$$2\,(k\nu\tau + \lambda k')\,,$$

*e a:*

$$k\nu\,(n+\tau) + \lambda k' - \omega\,,$$

*ove $\tau$ è l'ordine (e insieme la classe) della congruenza costituita delle tangenti principali di $R_n^p$*[26]).

7. Suppongasi, nel teorema del n. 6, stabilita la corrispondenza $(k, k')$ definendo come omologhi un complesso di $\Delta$ e una falda di $R_n^p$ quando il primo contiene la generatrice origine della seconda: con l'avvertenza di contare una tal falda, fra quelle corrispondenti al complesso, un numero di volte eguale alla sua *multiplicità d'intersezione* con questo[27]).

È allora $k = \lambda$ e $k' = n\nu$; inoltre si trova che $\omega = \lambda\delta'$, avendo $\delta'$ lo stesso significato che nel n. 3 [formula (2)].

Per conseguenza:

*Sia $R_n^p$ una rigata gobba d'ordine $n$ e di genere $p$, senza falde prive di regolo osculatore* («F», n. 1), *ed eventualmente contenuta in un complesso, o in una congruenza, lineare (anche speciale).*

*Data allora, in modo generico rispetto ad $R_n^p$, una totalità $\Delta$ di $\infty^1$ complessi di grado $\nu$, tale che per ogni retta (non comune a tutti) ne passino $\lambda$, si ha che:*

*Le tangenti principali di $R_n^p$, aventi ciascuna la proprietà di appartenere ad un medesimo complesso di $\Delta$ insieme con la generatrice contenente il rispettivo punto di contatto*[28]), *formano una rigata $\Phi$ di ordine:*

$$4\,\lambda\nu\,(2\,n + 3\,p - 3) - 2\,\lambda\nu\Sigma(2\,\alpha + \alpha_1 - 3)\,,$$

*mentre i loro punti di contatto hanno per luogo una linea $\Psi$ di ordine:*

$$\lambda(5\,\nu - 2)\,n + 2\lambda(3\,\nu - 2)\,(p-1) - \lambda(2\,\nu - 1)\,\Sigma(\alpha - 1) - \lambda(\nu - 1)\,\Sigma(\alpha_1 - 1)\,,$$

*eguale alla classe della sviluppabile $S$ circoscritta ad $R_n^p$ lungo la linea stessa.*

*I sommatorî vanno estesi alle varie falde singolari $g(\alpha\alpha_1 \ldots)$ di $R_n^p$.*

---

[26]) Vedasi il § 1 della seconda Memoria citata nella nota [1]).

[27]) Ossia (cfr. «F», n. 1) alla multiplicità d'intersezione, in $S_5$, del ramo di $C_n^p$ rappresentativo della falda, con l'ipersuperficie segante la quadrica $V_4^2$ nella varietà immagine del complesso.

[28]) Intendasi, più precisamente, la generatrice origine di quella falda (sempre unica, poichè $\Delta$ è in posizione generica rispetto ad $R_n^p$) con la quale la tangente principale ha un contatto generalmente tripunto («F», n. 2).

*Se è sempre* $\alpha = \alpha_1 = 1$ *e se nessun regolo osculatore di* $R_n^p$ *riducesi ad un fascio doppio di raggi, il genere comune di* $\Phi$, *di* $\Psi$ *e di* $S$ *è:*

$$2\lambda(2\lambda\nu^2 - 2\lambda\nu + 1)(n + 2p - 2) + 4\binom{\lambda\nu}{2} n + 1.$$

*Introducendo il rango* $r$ *della rigata* $R_n^p$ *e l'ordine* $\tau$ *(eguale alla classe) della congruenza costituita dalle sue tangenti principali*[26]*, gli ordini di* $\Phi$ *e di* $\Psi$ *si possono sempre rispettivamente esprimere nella forma:*

$$2\lambda\nu(n + \tau),$$

*e:*

$$\lambda(2\nu - 1)n + \lambda(\nu - 1)\tau + \lambda r.$$

Se, in particolare, $\Delta$ è un fascio di complessi lineari, si ha $\lambda = \nu = 1$ e quindi:

*L'ordine*[29]*) della linea luogo dei punti di* $R_n^p$ *che corrispondono ai rispettivi piani tangenti in un sistema nullo variabile in un fascio generico*[30]*), come pure la classe dell'inviluppo di tali piani, sono entrambi eguali a:*

$$n + r,$$

*ossia a:*

$$3n + 2p - 2 - \Sigma(\alpha - 1).$$

*E le tangenti principali di* $R_n^p$ *nei punti stessi generano una rigata di ordine:*

$$2(n + \tau),$$

*ossia:*

$$4(2n + 3p - 3) - 2\Sigma(2\alpha + \alpha_1 - 3).$$

*Il genere, sia di questa rigata che di quella linea, vale:*

$$2n + 4p - 3$$

*quando* $R_n^p$ *è generica* (n. 2).

Se invece si suppone che $\Delta$ sia il sistema di tutti i complessi lineari osculatori alle falde di una rigata $R_{n'}^{p'}$, di ordine $n'$ e di genere $p'$, è $\nu = 1$ e $\lambda$ eguale alla classe $n_4'$ (cfr. n. 2) della curva $C_{n'}^{p'}$ rappresentativa di $R_{n'}^{p'}$ sulla quadrica $V_4^2$ di $S_5$.

---

[29]) Cfr. *A. Voss*, Zur Theorie der windschiefen Flächen (Math. Annalen, 8, 1875, p. 84—85): ove si determina tale ordine nell'ipotesi che la rigata $R_n^p$ sia intersezione di tre complessi.

[30]) Ossia: *nel sistema nullo inerente ad un complesso lineare variabile in un fascio generico.*

Ammettendo, per semplicità, che $R_n^p$ e $R_{n'}^{p'}$ siano generiche (n. 2), si può dire:

*Date, in posizione mutua generica, due rigate gobbe generiche* (n. 2) $R_n^p$ *ed* $R_{n'}^{p'}$ *(la seconda delle quali non sia contenuta in complessi lineari), di ordini* $n$ *e* $n'$, *e di generi* $p$ *e* $p'$, *si ha che:*

*La curva luogo dei punti di* $R_n^p$ *coniugati ai rispettivi piani tangenti nel sistema nullo inerente al complesso lineare osculatore ad* $R_{n'}^{p'}$ *lungo una sua generatrice variabile, è di ordine:*

$$5\,(3\,n+2\,p-2)\,(n'+4\,p'-4)\,,$$

*eguale alla classe della sviluppabile inviluppo di quei piani tangenti. Mentre la rigata luogo delle tangenti principali di* $R_n^p$, *nei punti di tale curva, è di ordine:*

$$20\,(2\,n+3\,p-3)\,(n'+4\,p'-4)$$

*e, come la curva stessa, di genere:*

$$4n\binom{5n'+20p'-20}{2}+10\,(n+2p-2)\,(n'+4p'-4)+1\,.$$

8. Quando $R_n^p$ non appartiene a complessi lineari, il penultimo risultato del n. 7 rientra pure come caso particolare (corrispondente alle ipotesi $h=1$, $k=0$) nel seguente altro:

*Sia* $g(\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$ *una falda variabile, supposta sempre dotata di regolo osculatore, di una qualunque rigata gobba irriducibile* $R_n^p$, *d'ordine* $n$ *e di genere* $p$, *non contenuta in complessi lineari.*

*Esiste allora un complesso lineare (e uno solo) avente lungo* $g$, *con la falda, una multiplicità d'intersezione* («F», n. 1) *eguale a* $\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_{h-1}$[31]), *e passante per* $5-h$ *rette fisse,* $k$ *delle quali siano generatrici generiche di* $R_n^p$.

*Fra le tangenti principali, nei punti di* $g$, *della falda variabile, ve ne sono due appartenenti a tale complesso; il loro luogo è una rigata di ordine:*

$$2\,(h+3)\,n+2\,(h^2-h+6)\,(p-1)-2hk-2\,\xi-2\sum(2\,\alpha+\alpha_1-3)\,,$$

*ove:*

[31]) Si ritenga tale somma eguale ad $\alpha$ quando $h=1$.

$$\xi = \sum [(h-1)\alpha + (h-2)\alpha_1 + \cdots + \alpha_{h-2} - \frac{1}{2}h(h-1)],$$

*mentre il luogo dei loro punti di contatto è una curva di ordine:*

$$(h+2)n + (h^2 - h + 2)(p-1) - hk - \xi - \sum(\alpha - 1)$$

*eguale alla classe della sviluppabile circoscritta ad* $R_n^p$ *lungo la curva stessa.*

*Tutti i sommatorî si estendono alle varie falde singolari* $(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ *di* $R_n^p$.

*Se* $R_n^p$ *è generica* (n. 2), *i due luoghi sono entrambi di genere:*

$$(h+1)n + (h^2 - h + 4)(p-1) - hk + 1.$$

Per la dimostrazione si osserva intanto che il complesso lineare suddetto, variabile con la falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$, descrive una totalità $\Delta$ i cui elementi corrispondono biunivocamente alle falde di $R_n^p$.

Il numero $\lambda$ dei complessi di $\Delta$ contenenti una data retta generica è poi eguale al numero degli iperpiani di $S_5$ passanti: per un punto generico $O$ della quadrica $V_4^2$ (n. 1), per uno spazio fisso $S_{4-h}$ incidente a $C_n^p$ (n. 2) in $k$ punti, e per l'$S_{h-1}$ osculatore nell'origine a qualche ramo di $C_n^p$.

Proiettando dallo spazio $S_{5-h} \equiv OS_{4-h}$ sopra un generico $S_{h-1}^*$, risulta che $\lambda$ è pure il numero degli iperpiani stazionari della curva $C^*$, d'ordine $n-k$ e di genere $p$, proiezione di $C_n^p$. Quindi:

$$\lambda = h[n-k+(h-1)(p-1)] - \sum[(h-1)\alpha + (h-2)\alpha_1 + \cdots + \alpha_{h-2} - \frac{1}{2}h(h-1)],$$

estesa la somma a tutti i rami singolari di $C^*$ (o di $C_n^p$).

Dopo ciò, basta applicare la proposizione del n. 6, attribuendo a $\lambda$ il valore ora indicato, a $k$, $k'$, $\nu$ il valore 1, e ad $\omega$ il valore $\delta'$ espresso dalla formula (2) del n. 3.

Osservazione 1a. — Applicando il teorema nell'ipotesi $h = 5$, e quindi $k = 0$, si ritrovano alcuni dei risultati esposti nei n$^i$ 3 e 4.

Osservazione 2a. — Il teorema vale anche se le $k$ generatrici fisse di $R_n^p$ sono, tutte o in parte, coincidenti o consecutive: purchè le falde a cui appartengono abbiano i loro caratteri («F», n. 1) eguali ad 1. Si ha così, ad esempio:

*Essendo* $R_n^p$ *una generica* (n. 2) *rigata gobba d'ordine* $n$ *e di genere* $p$, *non appartenente a complessi lineari, si consideri la rete* $\Sigma$ *di tutti i com-*

*plessi lineari passanti per un dato regolo osculatore ad $R_n^p$ (lungo una sua generatrice fissa).*

*In $\Sigma$ esiste allora un (unico) complesso avente la proprietà di contenere una generatrice variabile $g$ di $R_n^p$ e la sua consecutiva in qualche falda di origine $g$: le due tangenti principali di questa falda (in punti di $g$), che appartengono a tale complesso, generano una rigata di ordine:*

$$2\,(5\,n + 8\,p - 14)$$

*e di genere:*

$$3\,n + 6\,p - 11\ ;$$

*mentre i loro punti di contatto descrivono una curva (dello stesso genere e) di ordine:*

$$2\,(2\,n + 2\,p - 5)\ ,$$

*eguale alla classe della sviluppabile inviluppo dei piani tangenti alla falda nei punti stessi.*

**9.** Sia $\Delta$ il sistema di tutti i complessi lineari osculatori alla rigata $R_n^p$ (cioè alle sue falde): l'indice $\lambda$ (n. 6) di $\Delta$ è evidentemente la classe $n_4$ (n. 2) della curva $C_n^p$ che rappresenta in $S_5$ la $R_n^p$. Supposta questa generica (n. 2), si facciano corrispondere fra di loro un complesso di $\Delta$ e una falda di $R_n^p$ quando la generatrice origine della falda appartiene al complesso, senza però essere una delle cinque generatrici consecutive di $R_n^p$ individuanti il complesso medesimo.

Si ha così una corrispondenza algebrica $(n_4 - 5,\ n - 5)$ fra i complessi di $\Delta$ e le falde di $R_n^p$: infatti, in $S_5$, l'iperpiano osculatore in un punto generico $G$ della curva $C_n^p$ incontra questa in altri $n - 5$ punti, mentre da $G$ escono $n_4 - 5$ iperpiani che osculano altrove $C_n^p$.

Le falde di $R_n^p$ per le quali la generatrice origine è singolare («F», n. 3, I) sono in questo caso le sole («F», n. 7) dotate di regolo osculatore degenere. Il loro numero è:

$$2\,(n + 2\,p - 2)\ ,$$

e ciascuna di esse ha la propria generatrice origine contenuta (per la definizione stessa della corrispondenza) in tutti gli $n_4 - 5$ complessi corrispondenti di $\Delta$.

Si può allora applicare il teorema del n. 6 nelle ipotesi:

$$\lambda = n_4 \quad , \quad \nu = 1 \quad , \quad k = n_4 - 5 \quad , \quad k' = n - 5$$

e:

$$\omega = 2\,(n + 2\,p - 2)\,(n_4 - 5).$$

In tal modo, tenendo anche presente il n. 2, si trova che:

*Il luogo delle coppie di tangenti principali di una generica* (n. 2) *rigata gobba* $R_n^p$ (*d'ordine* $n > 5$, *di genere* $p$ *e non contenuta in complessi lineari*) *aventi i punti di contatto su una generatrice variabile* $g$ *e appartenenti con* $g$ *al complesso lineare osculatore ad* $R_n^p$ *lungo* un'altra *generatrice, è una rigata di ordine:*

$$20\,(n + 3\,p - 5)\,(2\,n + 5\,p - 5) - 60\,p\,(p - 1)$$

*e di genere:*

$$100\,(n - 5)\binom{n + 4p - 4}{2} + 20\,(n + 4p - 4)\,p + 1\,,$$

*mentre il luogo dei loro punti di contatto è una curva* (*dello stesso genere* $e$) *di ordine:*

$$5\,(n + 2\,p - 2)\,(3\,n + 8\,p - 15) - 40\,p\,(p - 1)$$

*eguale alla classe della sviluppabile circoscritta ad* $R_n^p$ *lungo la curva stessa.*

**10.** Data una superficie gobba $R_n^p$, che non stia in un complesso lineare, esiste tutto un sistema $\Delta$ di $\infty^1$ complessi lineari aventi ciascuno la proprietà di contenere per intero i regoli osculatori a due diverse falde di $R_n^p$ (lungo le rispettive generatrici origini).

Il numero $\lambda$ dei complessi, di $\Delta$, a cui appartiene una retta generica, è anche quello degli iperpiani di $S_5$ passanti per un punto generico $O$ della quadrica $V_4^2$ (n. 1) e aventi due contatti di 2° ordine (almeno) con la curva $C_n^p$ immagine di $R_n^p$ su $V_4^2$.

Proiettando da $O$ sopra un generico iperpiano $S_4^*$, si vede che $\lambda$ è pure il numero degli spazî $S_3^*$ (di $S_4^*$) aventi due contatti tripunti con la curva $C^*$ (di ordine $n$ e di genere $p$) proiezione di $C_n^p$. Supposta questa, e quindi $C^*$, non dotata di altre singolarità che di punti multipli ordinarî, si ha[32]):

$$\lambda = \frac{9}{2}\,(n - 4)\,(n - 5) + 18\,(n - 5)\,p + 18\,p\,(p - 1)\,.$$

Chiamando ora corrispondenti un complesso di $\Delta$ ed una falda di $R_n^p$ quando il regolo osculatore a questa appartiene al complesso, si

[32]) Per una nota formula di E. De-Jonquières: cfr. *F. Severi*, Trattato citato, Vol. I, Parte I, p. 244.

stabilisce fra i complessi di $\Delta$ e le falde di $R_n^p$ una corrispondenza $(k, k')$, con $k' = 2$ e $k$ eguale al numero degli $S_4$ di $S_5$ che, passando per l'$S_2$ osculatore nell'origine a un dato ramo generico di $C_n^p$, hanno con $C_n^p$ un ulteriore contatto di 2° ordine. E' quindi ovvio che $k$ è pure il numero dei flessi della curva, di ordine $n - 3$ e di genere $p$, proiezione di $C_n^p$ da quell' $S_2$ sopra un piano generico; dunque:

$$k = 3\,(n + 2\,p - 5).$$

Dopo ciò, dal teorema del n. 6, per la cui applicazione è in questo caso da porre (cfr. n. 9):

$$\omega = 2\,(n + 2\,p - 2)\,k,$$

si deduce:

*Sia $R_n^p$ una rigata gobba generica* (n. 2) *di ordine $n > 5$, di genere $p$ e non contenuta in complessi lineari.*

*I regoli osculatori ad $R_n^p$ si possono associare a due a due in modo che entrambi quelli di una stessa coppia appartengano insieme ad un complesso lineare $\gamma$*[33]).

*Sulla generatrice di contatto, con $R_n^p$, di ciascun regolo di una tale coppia variabile esistono allora due punti $P_i$ $(i = 1, 2)$ aventi per coniugati, nel sistema nullo inerente a $\gamma$, i rispettivi piani tangenti $\pi_i$ ad $R_n^p$.*

*L'ordine della linea luogo dei punti $P_i$, e la classe della sviluppabile inviluppo dei piani $\pi_i$, sono entrambi eguali a:*

$$3\,(n + 4\,p - 4)\,(n + 4\,p - 5) + 6\,(n - 5)\,(2\,n + 5\,p - 5),$$

*mentre le tangenti principali di $R_n^p$, nei punti $P_i$, generano una rigata di ordine:*

$$36\,(n + 3\,p - 3)\,(n + p - 5) + 36\,p\,(p - 1)$$

*e (come la linea e la sviluppabile suddette) di genere:*

$$324\binom{n+2p-3}{3} - 228\binom{n+2p-4}{2} - 318\,(n+2p-5)\,p + 54p + 1\,.$$

**11.** Sia la rigata $R_n^p$, di cui al n. 10, di ordine $n > 7$: la curva $C_n^p$, sua immagine sulla quadrica $V_4^2$ di $S_5$, possiede allora $\infty^1$ iperpiani quadritangenti, fra i quali quelli passanti per un dato punto sono in numero di:

[33]) Variabile con la coppia di regoli.

$$\lambda = 16 \sum_{i=0}^{4} \binom{n-4-i}{4-i} \binom{p}{i}, \tag{1}$$

altrettanti essendo[32]) gli spazî a tre dimensioni quadritangenti di una curva di ordine $n$ e di genere $p$ (con soli punti multipli ordinarî) appartenente ad uno spazio a quattro dimensioni.

Fra gli iperpiani suddetti e i loro punti di contatto esiste una corrispondenza $(k, k')$, con $k' = 4$ e $k$ eguale al numero degli iperpiani tangenti a $C_n^p$ in un dato punto generico $G$, e aventi con $C_n^p$ tre ulteriori contatti (semplici).

Ora, $k$ è pure il numero dei piani tritangenti della curva, d'ordine $n-2$ e di genere $p$, proiezione di $C_n^p$ dall'$S_1$ tangente in $G$ sopra un $S_3$. Quindi[32]):

$$k = 8 \sum_{i=0}^{3} \binom{n-5-i}{3-i} \binom{p}{i}, \tag{2}$$

Interpretando tutto nello spazio ordinario, e applicando poi il teorema del n. 6, con l'avvertenza di attribuire ad $\omega$ (cfr. n$^i$ 9 e 10) il valore:

$$2\,(n + 2\,p - 2)\,k,$$

si perviene alla seguente proposizione:

*Una generica* (n. 2) *rigata gobba $R_n^p$, di ordine $n > 7$, di genere $p$, e non contenuta in complessi lineari, ammette $\infty^1$ complessi lineari quadritangenti, cioè tali che delle $n$ generatrici di $R_n^p$ situate in ciascuno di essi, otto coincidano a due a due in quattro* «generatrici di contatto» *del complesso con $R_n^p$.*

*Fra le tangenti principali di $R_n^p$ nei punti delle generatrici di contatto di un complesso lineare quadritangente, ve ne sono quattro coppie (una per ciascuna di quelle generatrici) appartenenti al complesso medesimo; al variare di questo esse generano una rigata di ordine:*

$$16 \sum_{i=0}^{4} (20+3i) \binom{n-4-i}{4-i} \binom{p}{i} + 48 \sum_{i=0}^{3} (2+3i) \binom{n-5-i}{3-i} \binom{p}{i},$$

*mentre i loro punti di contatto descrivono una curva di ordine:*

$$128 \sum_{i=0}^{4} \binom{n-4-i}{4-i} \binom{p}{i} + 16 \sum_{i=0}^{3} (3+2i) \binom{n-5-i}{3-i} \binom{p}{i}$$

*eguale alla classe della sviluppabile circoscritta ad $R_n^p$ lungo la curva stessa.*

*Il genere comune della rigata, della curva e della sviluppabile è:*

$$4\,\lambda\,(2\,k-1)+k\,(n+4\,p-4)+1\,,$$

*con $\lambda$ e $k$ definiti dalle formule* (1) *e* (2).

In modo analogo si dimostra che:

*Supposto $n>8$, i punti $P_i$ $(i=1,2,\ldots,2\,n-16)$ della rigata $R_n^p$, che corrispondono ai rispettivi piani tangenti $\pi_i$ nel sistema nullo inerente ad un complesso lineare quadritangente variabile, e non appartengono alle generatrici di contatto di questo, formano una linea di ordine:*

$$16\sum_{i=0}^{5}(15-i)\binom{n-4-i}{5-i}\binom{p}{i}+32\sum_{i=0}^{4}(3+2i)\binom{n-5-i}{4-i}\binom{p}{i}$$

*eguale alla classe dell'inviluppo dei piani $\pi_i$; mentre le tangenti principali di $R_n^p$ nei punti $P_i$ generano una rigata di ordine:*

$$64\sum_{i=0}^{5}(10+i)\binom{n-4-i}{5-i}\binom{p}{i}+96\sum_{i=0}^{4}(2+3i)\binom{n-5-i}{4-i}\binom{p}{i}$$

*e (come la linea e l'inviluppo predetti) di genere:*

$$\lambda\,(2\,\bar{k}-1)\,(n-8)+\bar{k}\,(n+4\,p-4)+1\,,$$

*ove $\lambda$ è dato dalla formula* (1) *e:*

$$\bar{k}=16\sum_{i=0}^{4}\binom{n-5-i}{4-i}\binom{p}{i}.$$

**12.** Sia $G$ un punto *generico* della curva $C_n^p$ rappresentativa, sulla quadrica $V_4^2$ di $S_5$ (n. 1), di una rigata $R_n^p$, d'ordine $n$ e di genere $p$, non appartenente a complessi lineari.

L'$S_4$ polare del punto $G$, immagine di una generatrice $g$ di $R_n^p$, sega ulteriormente $C_n^p$ in $n-2$ punti $G_i'$ $(i=1,2,\ldots\ldots,n-2)$, ai quali corrispondono su $R_n^p$ altrettante generatrici $g_i'$ incidenti a $g$: ciò vale anche per un punto $G$ *qualunque* di $C_n^p$ se si conviene di contare fra i punti $G_i'$ (coniugati a $G$ su $C_n^p$) lo stesso $G$ ripetuto $\mu-2$ volte, essendo $\mu$ la multiplicità d'intersezione, in $G$, della curva $C_n^p$ con l'$S_4$ polare di $G$.

Si consideri ora lo spazio $S_3$ osculatore in $G$ ad un ramo $G(\alpha\alpha_1\ldots\alpha_4)$

di $C_n^p$ e il suo $S_1'$ polare (rispetto a $V_4^2$), che si supporrà sempre non incidente a $C_n^p$ nè appartenente a $V_4^2$. Ogni punto $G_i'$ è pertanto esterno ad $S_1'$, e individua con $S_1'$ un piano $S_2^*$ mai situato su $V_4^2$: sia poi $S_4^*$ l'iperpiano congiungente $S_3$ con lo stesso punto $G_i'$, oppure con un punto fisso $U$ generico, secondochè $G_i'$ è esterno o no ad $S_3$.

Perchè $S_2^*$ appartenga ad $S_4^*$ occorre e basta che $S_3$ ed $S_1'$ abbiano in comune un punto $D$ (e quindi siano tangenti in $D$ a $V_4^2$) e che il punto $G_i'$[34]) sia coniugato a $D$ (rispetto a $V_4^2$).

Ammettendo allora che, quando una falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ di $R_n^p$ possiede una congruenza lineare osculatrice speciale di direttrice $d$, non esista nessuna generatrice $g_i'$ (distinta da $g$) incidente ad entrambe le rette $g$ e $d$, il piano $S_2^*$ non potrà mai appartenere all'iperpiano $S_4^*$: onde $S_2^*$ ed $S_4^*$ avranno sempre in comune una retta $S_1^*$.

Al variare del ramo $G(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ di $C_n^p$, tale retta descrive una superficie $V_2^x$, la quale, corrispondendosi gli spazî $S_2^*$ ed $S_4^*$ biunivocamente, è di ordine (n. 5):

$$x = y + z\,, \tag{1}$$

supposto che le varietà descritte da $S_2^*$ e da $S_4^*$ abbiano rispettivamente l'ordine $y$ e la classe $z$.

La retta $S_1^*$ passa per il punto $G_i'$ (comune ad $S_2^*$ e ad $S_4^*$) di $C_n^p$ e, quando non giace sulla quadrica $V_4^2$, incontra questa in un ulteriore punto $G_i''$; inoltre $S_1^* \equiv (S_2^* S_4^*)$ è incidente a entrambi gli spazî, polari l'uno dell'altro, $S_3$ (contenuto in $S_4^*$) ed $S_1'$ (contenuto in $S_2^*$).

Ne segue[35]) che, nello spazio ordinario, le rette $g_i'$ e $g_i''$, corrispondenti ai punti $G_i'$ e $G_i''$ di $S_5$, sono coniugate nella involuzione gobba avente per assi le rette rappresentate in $S_5$ dalle intersezioni di $S_1'$ con $V_4^2$, cioè («F», n. 3, III) le direttrici della congruenza lineare osculatrice lungo $g$ alla falda $g(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$: si noti che, secondo una precedente considerazione, $g_i'$ è una qualunque delle $n - 2$ generatrici di $R_n^p$ incidenti a $g$.

Qual è l'ordine $\xi$ della superficie luogo di tutte le rette $g_i''$ relative alle varie falde di $R_n^p$?

Tale ordine è pure quello della curva luogo di tutti i punti $G_i''$, e quindi parziale intersezione della quadrica $V_4^2$ con la rigata $V_2^x$ prima considerata: la residua intersezione di $V_4^2$ con $V_2^x$ si compone della curva $C_n^p$, contata $n - 2$ volte (giacchè da un punto generico $G_i'$ di $C_n^p$, coniugato ad altri $n - 2$ punti $G$ della stessa curva, escono $n - 2$ generatrici $S_1^*$ di $V_2^x$) e di tutte le rette $S_1^* \equiv (S_2^* S_4^*)$ aventi la proprietà di appartenere a $V_4^2$.

[34]) Allora (attesa la genericità di $U$) certamente esterno ad $S_3$.

[35]) Cfr. *E. Bertini*, loc. cit., p. 161.

Queste ultime sono, come è facile stabilire, in numero eguale a quello degli iperpiani $S_4^*$ tangenti a $V_4^2$: ammesso però che, quando l'$S_3$ osculatore in $G$ ad un ramo $G(\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_4)$ è tangente a $V_4^2$ [36]), gli $n-2$ punti $G_i'$ di $C_n^p$ coniugati a $G$ siano tutti distinti da $G$[37]).

Ora, si è già supposto che per un punto generico di $S_5$ passino $z$ iperpiani $S_4^*$: perciò $z$ è anche l'ordine della linea luogo dei poli di tali iperpiani rispetto a $V_4^2$, e quindi $2z$ è il numero di quelli, fra questi iperpiani, che hanno il proprio polo su $V_4^2$, ossia sono tangenti a $V_4^2$.

Ne deriva, per il calcolo di $\xi$, la formula:

$$\xi = 2x - n(n-2) - 2z,$$

cioè, tenendo conto della (1):

$$\xi = 2y - n(n-2). \tag{2}$$

Rimane da determinare l'ordine $y$ della varietà descritta dal piano $S_2^* \equiv (G_i' S_1')$, ovvero l'ordine, che è lo stesso, della varietà polare descritta dal piano intersezione dell'iperpiano $S_4'$ polare di $G_i'$ con l'$S_3$ polare di $S_1'$.

Ad ogni $S_4'$ corrispondono $n-2$ spazî $S_3$ (osculatori a rami di $C_n^p$ negli $n-2$ punti $G$ coniugati a $G_i'$), e inversamente ad ogni $S_3$ corrispondono $n-2$ iperpiani $S_4'$. Inoltre per un punto generico di $S_5$ passano $n$ iperpiani $S_4'$, mentre sono $n_3$ (n. 2) gli spazî $S_3$ incidenti ad una generica retta.

Dalla proposizione del n. 5 segue allora che l'ordine $y$ della varietà luogo di tutti i piani $(S_3 S_4')$ è:

$$(n-2)\,n + (n-2)\,n_3\ ;$$

onde, per la (2), si ha infine:

$$\xi = (n-2)(n + 2n_3).$$

A questo stesso risultato si perviene anche nel caso che la rigata $R_n^p$ appartenga ad un complesso lineare non speciale, e si può quindi concludere:

---

[36]) In un punto necessariamente diverso da $G$, per l'ipotesi già fatta che l'$S_1'$ polare di $S_3$ non sia incidente a $C_n^p$.

[37]) Ciò equivale a supporre [«F», n. 4, A), III] che le falde di $R_n^p$ dotate di congruenza lineare osculatrice speciale abbiano ciascuna come origine una generatrice $g$ semplice per $R_n^p$ e non singolare.

*Essendo $R_n^p$ una rigata gobba d'ordine $n$ e di genere $p$, eventualmente contenuta in un complesso lineare non speciale, si supponga che ogni sua falda ammetta una congruenza lineare osculatrice non degenere* («F», n. 3, I e III) *con le direttrici mai situate su $R_n^p$, e che, quando tale congruenza è speciale con la direttrice $\delta$, l'origine $g$ della falda sia una generatrice non singolare, nè multipla, per $R_n^p$: mentre nello stesso tempo il punto $(g\,\delta)$ sia semplice e il piano $[g\,\delta]$ non sia bitangente per $R_n^p$.*

*Qualunque sia la generatrice $g$, sulla rigata $R_n^p$ esistono sempre $n-2$ generatrici incidenti a $g$: purchè si convenga di includere fra queste la stessa $g$ contata $\mu-2$ volte, se $\mu$ è la multiplicità d'intersezione (lungo $g$) di $R_n^p$ col complesso lineare speciale di asse $g$*[38]).

*Considerando allora una falda di $R_n^p$ e l'involuzione gobba avente per assi le due tangenti della falda, in punti della sua generatrice origine $g$, a contatto generalmente quadripunto* («F», n. 2 e n. 3, III) *si ha che le rette coniugate, in tale involuzione*[39]), *delle $n-2$ generatrici di $R_n^p$ incidenti a $g$, descrivono, al variare della falda, una rigata di ordine:*

$$3\,(n-2)\,(3\,n+8\,p-8)-2\,(n-2)\sum(3\,\alpha+2\,\alpha_1+\alpha_2-6),$$

*estesa la somma a tutte le falde $(\alpha\alpha_1\alpha_2\ldots)$ singolari di $R_n^p$.*

**13.** È facile verificare che (con opportuni adattamenti) le considerazioni svolte nel n. 6 non cessano di essere valide quando il sistema $\Delta$ di complessi, ivi supposto semplicemente infinito, si riduce ad un unico complesso: purchè, naturalmente, si faccia allora $\lambda = 0$ e $k = 1$. Ne consegue:

*Sia $R_n^p$ una rigata gobba irriducibile, d'ordine $n$ e di genere $p$, priva di falde ammettenti* («F», n. 1) *un piano rigato osculatore o una stella osculatrice di raggi, ed eventualmente contenuta in un complesso, o in una congruenza, lineare (anche speciale).*

*Dato allora, in posizione generica rispetto ad $R_n^p$, un qualunque complesso di rette, di grado $\nu$, si ha che le tangenti principali* («F», n. 2) *di $R_n^p$, appartenenti a tale complesso, formano una rigata di ordine:*

$$6\,\nu\,(n+2\,p-2)-2\,\nu\sum(2\,\alpha+\alpha_1-3)\,,$$

[38]) Intendasi che $\mu$ è la somma delle multiplicità d'intersezione («F», n. 1), con tale complesso, delle varie falde di $R_n^p$ uscenti da $g$: se $g$ è generica si ha $\mu = 2$.

[39]) Quando gli assi dell'involuzione coincidono in una sola retta (il che si verifica per le falde dotate di congruenza lineare osculatrice speciale), in questa va intesa coincidente la coniugata di ogni altra retta (non contenuta in quella congruenza: nel qual caso la retta stessa sarebbe unita nella involuzione).

*mentre i loro punti di contatto costituiscono una linea di ordine*[40]):

$$2\,\nu\,(2\,n+3\,p-3)-\nu\,\Sigma\,(2\,\alpha+\alpha_1-3)$$

*eguale alla classe della sviluppabile circoscritta ad $R_n^p$ lungo la linea stessa.*

*I sommatorî si estendono a tutte le falde singolari $g(\alpha\alpha_1\ldots)$ di $R_n^p$.*

Supposta la rigata $R_n^p$ in posizione generica rispetto al circolo assoluto $C_\infty$, sia $S_\infty$ la sua sezione col piano improprio e $S'_\infty$ la polare reciproca di $S_\infty$ rispetto a $C_\infty$.

Se ad un punto $T'_\infty$ di $S'_\infty$ corrisponde, nella polarità assoluta, la retta $t_\infty$ tangente ad $S_\infty$ in un punto $T_\infty$, si ha che una qualunque $t'$ delle tangenti principali di $R_n^p$, uscenti da $T'_\infty$, è perpendicolare al piano asintotico relativo alla generatrice $g$, di $R_n^p$, passante per $T_\infty$: ossia al piano $\gamma \equiv [g t_\infty]$, tangente ad $R_n^p$ nel punto improprio $T_\infty$ di $g$.

Variando $T'_\infty$ su $S'_\infty$, la retta $t'$ descrive la rigata luogo delle tangenti principali di $R_n^p$ che si appoggiano alla curva $S'_\infty$ (di ordine eguale al rango di $R_n^p$), mentre $\gamma$ genera la sviluppabile asintotica di $R_n^p$. Come corollario della proposizione che precede, si ha quindi l'altra:

*Le tangenti principali di una rigata gobba, d'ordine $n$ e di genere $p$, aventi la proprietà di essere perpendicolari a piani della sua sviluppabile asintotica [ossia parallele a tangenti della sua linea di stringimento, quando questa è una traiettoria ortogonale delle generatrici*[41]*)] costituiscono una rigata di ordine:*

$$2\,(2\,n+2\,p-\varrho-2)\,(3\,n+6\,p-2\,\varrho-\varrho_1-6)\,,$$

*e i loro punti di contatto una linea di ordine:*

$$(2\,n+2\,p-\varrho-2)\,(4\,n+6\,p-2\,\varrho-\varrho_1-6)\;;$$

*ammesso che la rigata non abbia speciali relazioni con l'assoluto dello spazio, nè altre particolari singolarità che* (n. 2): *$\varrho$ generatrici stazionarie, $\varrho_1$ generatrici d'inflessione, e quante si vogliano generatrici multiple ordinarie.*

---

[40]) Circa gli altri principali caratteri di tale linea, nel caso di una rigata $R_n^p$ generica (n. 2), cfr. *A. Longhi*, Sopra le tangenti principali e i punti circolari delle superficie algebriche (Commentarii math. Helvetici, vol. VI, fasc. IV, 1934), n. 19.

[41]) Si può notare che tale circostanza si verifica soltanto se la rigata è il luogo delle binormali di una curva: cfr. *L. Bianchi*, Lezioni di geometria differenziale (Pisa, 1894), p. 211.

**14.** Si supponga la superficie gobba $R_n^p$ contenuta in un complesso di rette, di grado $\nu$. Sopra ogni generatrice $g$ di $R_n^p$ si possono allora considerare[42]) due punti tali che il cono del complesso, col vertice in ciascuno $M_i$ di essi ($i = 1, 2$), è toccato lungo $g$ dal piano tangente in $M_i$ ad $R_n^p$.

Al complesso corrisponde in $S_5$ (n. 1) una varietà $W_3^{2\nu}$ passante per la curva $C_n^p$ (immagine di $R_n^p$) e intersezione completa della quadrica $V_4^2$ con una ipersuperficie $W_4^\nu$ d'ordine $\nu$; invece la congruenza di tutte le tangenti ad $R_n^p$, nei punti di $g$, viene rappresentata («F», n. 3, I) dal cono $V_2^2$ sezione di $V_4^2$ con l'$S_3'$ polare della tangente a $C_n^p$ in un suo punto $G$: ed è subito visto che, in particolare, i due fasci costituiti dalle tangenti ad $R_n^p$ in $M_1$ e $M_2$ hanno per immagini le generatrici $\mu_1$ e $\mu_2$ di $V_2^2$ che appartengono all'iperpiano $S_4^*$ tangente in $G$ a $W_4^\nu$.

Quando il punto $G$ percorre la linea $C_n^p$, il cono $V_2^2$ descrive una varietà di ordine $2\,n_1$ (n. 2), mentre l'iperpiano $S_4^*$ genera un inviluppo la cui classe eguaglia il numero $n\,(\nu - 1)$ delle intersezioni di $C_n^p$ con la prima polare di un punto generico rispetto a $W_4^\nu$.

Risultando inoltre biunivoca la corrispondenza fra $V_2^2$ ed $S_4^*$, si può applicare il teorema del n. 5 nelle ipotesi:

$$\alpha = 1\ ,\quad \alpha' = 1\ ,\quad \varrho = 2\,n_1\ ,\quad \varrho' = n\,(\nu - 1)\ ,\quad n = 2\ ,\quad n' = 1$$

e quindi dedurne che il luogo delle coppie di rette $\mu_1$, $\mu_2$, è una superficie $V_2^x$ di ordine:

$$x = 2\,n_1 + 2\,n\,(\nu - 1).$$

Ma le rette $\mu_1$ e $\mu_2$ si ottengono pure segando la quadrica $V_4^2$ col piano $S_2^* \equiv (S_3' S_4^*)$, onde $V_2^x$ è l'intersezione completa di $V_4^2$ con la varietà $V_3^{x'}$ descritta da $S_2^*$ ed avente quindi l'ordine $x' = \dfrac{x}{2}$.

Ne deriva (cfr. n. 6) che la congruenza rappresentata dalla superficie $V_2^x$ (costituita dalle tangenti ad $R_n^p$ nelle $\infty^1$ coppie di punti $M_1$, $M_2$) è di ordine e classe entrambi eguali ad $x'$. Pertanto:

*Se una qualunque rigata gobba $R_n^p$, d'ordine $n$ e di genere $p$, appartiene, in modo generico, ad un complesso $\Theta^\nu$ di grado $\nu$, sopra ogni sua generatrice $g$ esistono due punti (distinti o no) caratterizzati dalla proprietà che il cono del complesso col vertice in ciascuno di essi, e il piano ivi tangente ad $R_n^p$, si tocchino lungo $g$.*

---

[42]) Cfr. *F. Klein*, Über Liniengeometrie und metrische Geometrie (Math. Annalen, 5, 1872), § 4.

*Al variare di $g$, tali punti generano una curva di ordine*[43]):

$$(\nu+1)\,n+2\,p-2-\sum(\alpha-1)\,,$$

*eguale anche alla classe della sviluppabile descritta dai piani tangenti ad $R_n^p$ nei punti stessi.*

*Il sommatorio si estende a tutte le falde superlineari* («F», n. 1) *di $R_n^p$.*

In modo simile può dimostrarsi che:

*Sulla generatrice variabile $g$, della rigata anzidetta $R_n^p$ (da supporre ora non contenuta in complessi lineari), esistono due punti $G_1$ e $G_2$ tali che il cono del complesso $\Theta^\nu$, col vertice in $G_i$ ($i=1, 2$), è toccato lungo $g$ dal piano $\gamma_i$ del fascio di tutte le rette passanti per $G_i$ e appartenenti al complesso lineare osculatore lungo $g$ ad $R_n^p$.*

*L'ordine della linea luogo dei punti $G_i$, e la classe della sviluppabile inviluppo dei piani $\gamma_i$, sono entrambi eguali a:*

$$(\nu+5)\,n+20\,p-20-\sum(4\,\alpha+3\,\alpha_1+2\,\alpha_2+\alpha_3-10),$$

*estesa la somma alle varie falde singolari di $R_n^p$.*

**15.** Sia la rigata $R_n^p$ generica (n. 2) e si indichi con $C^t_{m,s}$ una sua curva $s$-upla (ordinaria) d'ordine $m$, che ne incontri ogni generatrice in $t$ punti.

Il contorno apparente di $R_n^p$ rispetto ad un punto generico è una curva $C^{t'}_{m',s'}$, per la quale si ha:

$$m'=2\,(n+p-1)\,,\quad s'=1\,,\quad t'=1\,.$$

Le due curve hanno in comune un numero di punti eguale a[44]):

$$mst'+m's't-ntt'\,.$$

---

[43]) Quando $\nu=1$, questa curva diviene la nota asintotica di Lie esistente su ogni rigata gobba contenuta in un complesso lineare. Circa gli altri caratteri di tale asintotica, pel caso di una $R_n^p$ generica (n. 2), veggasi: *A. Voss*, loc. cit. (Math. Annalen, 8, p. 114); *G. Pittarelli*, Le asintotiche delle rigate algebriche di genere qualunque, che fanno parte di una congruenza lineare [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei 9, (5), 1900]; *A. Longhi*, loc. cit. in [40]), n. 17.

[44]) Cfr. *B. Levi*, Dell'intersezione di due varietà contenute in una varietà semplicemente infinita di spazi (Atti della R. Accademia di Torino, 34, 1899), n. 1.

Se, fra tali punti, $k$ sono cuspidali per $R_n^p$, ne deriva che:

*I piani tangenti ad una generica rigata gobba* $R_n^p$ (n. 2), *nei punti di una sua linea irriducibile s-upla, d'ordine m, passante (semplicemente) per k punti cuspidali e t-secata da ogni generatrice, costituiscono un inviluppo di classe:*

$$ms + (n + 2p - 2)t - k.$$

Per dualità:

*È:*

$$\mu\sigma + (\mu + 2p - 2)\tau - \chi$$

*l'ordine della linea di contatto, con* $R_n^p$, *di una sviluppabile irriducibile* $\Omega$ *di classe* $\mu$, *quando: ogni piano di* $\Omega$ *contenga* $\sigma$ *generatrici di* $R_n^p$, *ogni generatrice di* $R_n^p$ *appartenga a* $\tau$ *piani di* $\Omega$, *ed esistano* $\chi$ *piani (semplici) di* $\Omega$ *tangenti ciascuno ad* $R_n^p$ *lungo una generatrice singolare.*

Ponendo:

$$m = \mu = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p, \quad s = \sigma = 2, \quad t = \tau = n-2, \quad k = \chi = 2(n + 2p - 2),$$

si trova in particolare che:

*La classe della sviluppabile circoscritta alla rigata* $R_n^p$ *lungo la sua linea doppia, supposta irriducibile, e l'ordine della curva luogo dei punti di contatto di un piano bitangente variabile di* $R_n^p$, *valgono entrambi:*

$$\binom{2n-4}{2} + 2(n-5)p.$$

Siano $g_1$ e $g_2$ le due generatrici che escono da un punto doppio $M$ di $R_n^p$. Il piano $\gamma \equiv [g_1 g_2]$ è allora tangente ad $R_n^p$ in due punti: $M_1$ (su $g_1$) e $M_2$ (su $g_2$). Al variare di $M$ sulla curva doppia di $R_n^p$, essi descrivono una linea $\Gamma_\nu$, il cui ordine $\nu$ risulta dal precedente enunciato; e in generale solo quando $M$ diviene il punto cuspidale di una generatrice singolare $g$ di $R_n^p$, si verifica che $M_1$ ed $M_2$ coincidono (nel centro di uno dei due fasci costituenti il regolo osculatore ad $R_n^p$ lungo $g$).

Su $\Gamma_\nu$ esiste quindi fra $M_1$ ed $M_2$ una corrispondenza biunivoca e simmetrica, con:

$$2(n + 2p - 2)$$

punti uniti; onde la retta $M_1 M_2$ ha per luogo una superficie di ordine:

$$\nu - n - 2p + 2.$$

Ragionando anche dualmente, si conclude che:

*La retta passante pei punti di contatto di un piano bitangente variabile di $R_n^p$ genera una superficie $\Sigma'$ di ordine:*

$$2(n-2)(n-3)+2(n-6)p,$$

*eguale a quello della superficie $\Sigma$ descritta dalla retta intersezione dei due piani tangenti ad $R_n^p$ in un suo punto doppio variabile.*

È subito visto che:

*Le superficie $\Sigma$ e $\Sigma'$ sono rispettivamente le sviluppabili osculatrici della curva doppia $\Delta$ di $R_n^p$ e dello spigolo di regresso $\Delta'$ della sviluppabile bitangente di $R_n^p$.*

Per conseguenza:

1. *Le linee $\Delta$ e $\Delta'$ hanno entrambe il rango:*

$$2(n-2)(n-3)+2(n-6)p$$

*e il genere:*

$$\frac{1}{2}(n-5)(n+2p-2)+1.$$

2. *La classe di $\Delta$ e l'ordine di $\Delta'$ sono eguali a:*

$$\frac{3}{2}(n-2)(3n-11)+3(2n-11)p.$$

3. *Il numero dei piani osculatori stazionari di $\Delta$, e quello delle cuspidi di $\Delta'$, è:*

$$8(n-2)(n-4)+4(3n-16)p.$$

Conoscendosi[45]) il numero dei piani tripli e dei piani tritangenti di $R_n^p$, da quanto precede si deduce pure che:

4. *È:*

$$\frac{1}{4}(n^2-5n+8)\binom{n-2}{2}-\binom{n-3}{2}p+\binom{p}{2}$$

*il numero dei punti doppi apparenti di $\Delta$, e quello degli assi[46]) di $\Delta'$ situati in un piano generico.*

---

[45]) Cfr. *G. Castelnuovo*, Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche (Rendiconti del Circolo matem. di Palermo, 3, 1887), n. 4.

[46]) Cioè delle rette intersezioni ciascuna di due distinti piani osculatori di $\Delta'$.

Sia $g_1$ una generatrice di $R_n^p$ tangente a $\Delta$ in un punto $M_2$, e $g_2$ l'ulteriore generatrice di $R_n^p$ passante per $M_2$. Il piano $\gamma$ di $g_1$ e $g_2$ è allora tangente in $M_2$ alla falda di $R_n^p$ con l'origine $g_2$, mentre è tangente in un certo punto $M_1$ di $g_1$ alla falda che esce da $g_1$: la retta $g_1$, congiungendo i punti di contatto $M_1$ ed $M_2$ di $\gamma$ con $R_n^p$, deve quindi (secondo una precedente proposizione) essere una tangente della curva $\Delta'$. Pertanto:

5. *Le generatrici di $R_n^p$ tangenti a $\Delta$ sono tangenti anche a $\Delta'$, e il loro numero è* [47]:

$$2\,(n-2)\,(n-3)+2\,(n-6)\,p,$$

*eguale al rango comune di $\Delta$ e $\Delta'$.*

**16.** Due generatrici variabili $g$ e $g'$ della rigata generica $R_n^p$ (n. 2), fra loro incidenti, sono rappresentate, sulla quadrica $V_4^2$ di $S_5$, da due punti $G$ e $G'$, della curva $C_n^p$, coniugati nella polarità rispetto a $V_4^2$.

La corrispondenza fra i punti $G$ e $G'$, simmetrica d'indice $n-2$, è di valenza 2 e possiede quindi un numero di punti uniti[48]) eguale a:

$$2\,(n+2\,p-2)\,.$$

Una corrispondenza pure simmetrica, dello stesso indice e con altrettanti punti uniti, intercede allora fra i poli $P$ e $P'$ degli iperpiani osculatori a $C_n^p$ in $G$ e $G'$: le cui sezioni con $V_4^2$ sono immagini dei due complessi lineari osculatori ad $R_n^p$ lungo le generatrici $g$ e $g'$.

La congruenza comune a tali complessi ha per direttrici le rette che corrispondono nello spazio ordinario ai punti d'incontro $Q$ e $Q'$ di $V_4^2$ con la retta $PP'$. Questa, variando $P$ e $P'$ sulla curva $\Gamma$ polare reciproca (rispetto a $V_4^2$) di $C_n^p$, e quindi di ordine:

$$\nu \equiv 5\,(n+4\,p-4)\,,$$

descrive una rigata $V_2^x$, il cui ordine è:

$$x = \nu\,(n-2)-(n+2\,p-2).$$

Risulta così determinato anche l'ordine $2\,x$ della curva $V_1^{2x}$, intersezione di $V_2^x$ con $V_4^2$, luogo delle coppie di punti $Q, Q'$.

---

[47]) Come si trova applicando la formula di Zeuthen alla corrispondenza $(2,n-2)$ esistente fra le generatrici di $R_n^p$ e i loro punti di appoggio con $\Delta$.

[48]) Immagini delle generatrici singolari di $R_n^p$.

Il genere $\pi'$ della rigata $V_2^x$ è evidentemente eguale a quello della superficie descritta dalla retta variabile $GG'$, che appartiene a $V_4^2$ ed è l'immagine del fascio di raggi individuato dalle generatrici $g$ e $g'$ di $R_n^p$. Dunque $\pi'$ è pure il genere della curva doppia di $R_n^p$; se quindi tale curva è irriducibile, si ha (n. 15):

$$\pi' = \frac{1}{2}(n-5)(n+2p-2)+1.$$

Dopo ciò, la formula del Segre già applicata al n. 4, fornisce pel genere di $V_1^{2x}$ il valore[49]):

$$x+2\pi'-1.$$

Concludendo:

*Se $g$ e $g'$ sono due generatrici di una generica* (n. 2) *rigata gobba $R_n^p$ (d'ordine $n$, di genere $p$ e non contenuta in complessi lineari) uscenti da un punto variabile sulla sua curva doppia (supposta irriducibile), le direttrici della congruenza intersezione dei complessi lineari osculatori ad $R_n^p$, uno lungo $g$ e l'altro lungo $g'$, descrivono una superficie di ordine:*

$$2(5n-21)(n+2p-2)+20np$$

*e di genere:*

$$2(3n-13)(n+2p-2)+10np+1.$$

---

[49]) Si avverta che la presenza, su $V_1^{2x}$, dei $2\nu$ punti $(n-2)$-upli situati nelle intersezioni della curva $\Gamma$ con $V_4^2$, non infirma la validità della formula del Segre: perchè delle $n-2$ generatrici di $V_2^x$ uscenti da uno qualunque $Q$ di quei punti multipli, nessuna ha i suoi due punti di appoggio con $V_1^{2x}$ riuniti in $Q$.

(Reçu le 5 mars 1936.)