Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 9 (1936-1937)

Artikel: Bewegungsgruppen in mehrdimensionalen Räumen.
Autor: Burckhardt, Johann Jakob
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10187

Bewegungsgruppen in mehrdimensionalen Räumen

Von Johann Jakob Burckhardt, Zürich

In einer früheren Arbeit (siehe Commentarii Mathematici Helvetici, Band 6, Seite 159—184; im folgenden stets mit B, 1933 zitiert) habe ich die arithmetischen Methoden von Frobenius und Bieberbach weiterentwickelt, bis mit ihnen die Bewegungsgruppen der Ebene und des Raumes dargelegt werden können. Man erhält auf diese Weise einen gegenüber der früheren geometrischen Theorie differenzierteren Einbau der Bewegungsgruppen in die zugehörigen arithmetischen Klassen, worüber auch eine Arbeit von P. Niggli und W. Nowacki lehrreichen Aufschluß vermittelt. (Zeitschrift für Kristallographie, Band 91, Seite 321—335). Wünscht man über diese Ergebnisse hinausgehenden Einblick in die Struktur diskreter Materie, so ist es naheliegend, die Verhältnisse in höherdimensionalen Räumen zu untersuchen. Dies ist bei unserer Formulierung des Problems möglich, und es wird sich im folgenden zeigen, daß die Verhältnisse für diejenigen Klassen, die aus der regulären Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Permutationsgruppe entspringen, sehr einfach liegen. Diese Klassen sind nach der Theorie der regulären Körper in mehrdimensionalen Räumen die wichtigsten, die zu untersuchen sind.

Ich stelle das für später Notwendige kurz zusammen und verweise auf B, 1933 § 1. Sei $\mathfrak{G}$ die Kristallklasse mit den Elementen $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$, wobei $S_i \cdot S_k = S_l$ gelte. G_1 sei eine zugehörige Bewegungsgruppe mit den Elementen

$$(S_0, s_0), (S_1, s_1), \ldots, (S_{n-1}, s_{n-1}).$$

Dann gilt bei passendem Koordinatensystem:

$$(S_i, s_i) \cdot (S_k, s_k) \equiv (S_l, s_l) \qquad (\text{mod } 1),$$

und hieraus folgen die sogenannten Frobenius'schen Kongruenzen:

$$S_i \cdot s_k + s_i \equiv s_l \qquad (\text{mod } 1). \tag{A}$$

Indem man alle ihre Lösungen sucht, findet man alle zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Bewegungsgruppen. Die Lösung $s_k = 0$ für alle k heißt die Null-Lösung.

Zwei zu $\mathfrak{G}$ gehörende Bewegungsgruppen G_1 und G_2 mit den Elementen (S_i, s_i) und (S_i, t_i) werden dabei äquivalent genannt und als nicht verschieden betrachtet, wenn es eine ganzzahlige unimodulare Matrix U und eine Spalte (x) gibt, so daß

$$(U, x)^{-1} (S_i, s_i) (U, x) = (S_k, t_k) \tag{B}$$

ist. Dies ergibt für die rotativen Bestandteile

$$U^{-1} S_i U = S_k$$

und für die translativen Kolonnen:

$$U^{-1}(S_i \cdot x + s_i - x) \equiv t_k \qquad (\text{mod } 1).$$

Nimmt man insbesondere $U = E$, wo E die Einheitsmatrix ist, so erhält man als hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier Bewegungsgruppen: Es muß sich eine Spalte (x) derart finden lassen, daß für die Differenz zweier Lösungen der Frobenius'schen Kongruenzen gilt:

$$(s_i - t_i) \equiv (E - S_i)(x) \qquad (\text{mod } 1) \tag{C}$$

für alle Elemente S_i der Gruppe.

§ 1. Die zyklische Permutationsgruppe

Sei
$$P = (1, 2, \ldots, n)$$

das erzeugende Element einer zyklischen Permutationsgruppe, als Zyklus geschrieben. Dann ist $P^n = E$, und P hat die reguläre Darstellung als n-reihige Matrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 \\ 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei (p) eine beliebige, zu P gehörende Lösung der Frobenius'schen Kongruenzen, die aus dieser regulären Darstellung der zyklischen Gruppe entspringen. Ich behaupte, daß sie der Null-Lösung äquivalent ist. Zu diesem Zwecke müssen wir zeigen, daß es eine Spalte (x) gibt, so daß

$$(p) \equiv (E - P)(x) \qquad (\mathrm{mod}\ 1). \tag{1.1}$$

Alle übrigen Kongruenzen, die überdies noch zu erfüllen sind, sind Folgerungen aus dieser, wie ich in B, 1933, Seite 168f gezeigt habe.

(1.1) lautet ausführlicher:

$$\begin{aligned} p^1 &\equiv x_1 - x_2 \\ p^2 &\equiv x_2 - x_3 \\ &\vdots \\ p^n &\equiv x_n - x_1 \end{aligned} \qquad (\mathrm{mod}\ 1), \tag{1.2}$$

woraus zu sehen ist, daß die n Linearformen auf der rechten Seite linear abhängig sind, ihre Summe ist gleich Null. Wegen

$$(P, p)^n = (E, 0)$$

gilt

$$(P^{n-1} + P^{n-2} + \cdots + P + E) \cdot (p) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 1).$$

Rechnen wir die Matrix $P^{n-1} + \cdots + P + E$ aus, so erhalten wir die n-reihige quadratische Matrix, deren jedes Element gleich Eins ist. Diese wird im folgenden öfters vorkommen, wir bezeichnen sie daher mit H_n und nennen sie die n-reihige „Einser-Matrix".

Hiermit läßt sich die vorangehende Gleichung kurz schreiben als

$$H_n(p) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 1),$$

was die einzige Kongruenz ergibt:

$$p^1 + p^2 + \cdots + p^n \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 1). \tag{1.3}$$

Somit besteht für die linke Seite des Gleichungssystems (1.2) dieselbe lineare Abhängigkeit wie für die rechte. Die $n - 1$ ersten Kongruenzen aus (1.2) lassen sich lösen, denn man zeigt leicht, daß ihre Determinante gleich Eins ist. So haben wir:

Satz 1: *Zur zyklischen Permutationsgruppe von n Elementen in ihrer regulären Darstellung gibt es nur eine Bewegungsgruppe.*

Für $n = 3$ erhält man die rhomboedrische Klasse, die ich in B, 1933, Seite 184 mit R_1 bezeichnet habe, und als zugehörige Bewegungsgruppe $\mathfrak{C}_3^4$.

§ 2. Die symmetrische Gruppe

Um die symmetrische und die alternierende Gruppe von $n \geqslant 3$ Elementen zu untersuchen, denken wir sie uns durch ein System von Erzeugenden dargestellt. Für die Wahl dieser Erzeugenden verweise ich auf J. A. Todd, The groups of symmetries of the regular polytopes, Proc. Cambridge philosoph. Soc. 27 (1931) Seite 212 ff. Dort wird gezeigt, daß $n-1$ Elemente $S_1, S_2, \cdots, S_{n-1}$ die symmetrische Gruppe erzeugen, wenn zwischen ihnen die Relationen bestehen:

$$S_k^2 = E, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1\,; \tag{I.}$$

$$(S_k \cdot S_{k+1})^3 = E, \quad k = 1, 2, \ldots, n-2\,; \tag{II.}$$

$$(S_k \cdot S_l)^2 = E, \quad \text{wenn } l > k+1\,;\ k = 1, 2, \ldots, n-3. \tag{III.}$$

Wählen wir in der Schreibweise durch Zyklen:

$$S_1 = (1, 2), \quad S_2 = (2, 3), \ldots, \quad S_{n-1} = (n-1, n),$$

so sind die Relationen erfüllt, wie man leicht aus

$$S_k \cdot S_{k+1} = (k, k+2, k+1) \text{ und } S_k \cdot S_l = (k, k+1)\,(l, l+1) \text{ für } l > k+1$$

sieht.

Um die Bewegungsgruppen zu finden, lösen wir die Frobenius'schen Kongruenzen für die erzeugenden Elemente der Bewegungsgruppe, die wir mit

$$(S_1, s_1), \quad (S_2, s_2), \ldots, \quad (S_{n-1}, s_{n-1})$$

bezeichnen. Ebenso ist die Äquivalenzfrage nur für die Erzeugenden zu beantworten, denn diese bestimmen zusammen mit den Relationen die Gruppe eindeutig.

α. Nehmen wir vorerst $n = 3$, so haben wir die beiden Erzeugenden S_1 und S_2. Ihre regulären Darstellungen lauten:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die folgenden Kongruenzen, die stets modulo 1 zu nehmen sind:

I. Aus I folgt für $(s_1): (S_1, s_1)^2 = (E, 0)$, also

$$\text{nach (A):} \quad (S_1 + E) \cdot (s_1) \equiv 0 \ ,$$

das ergibt in Matrizen geschrieben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^1 \\ s_1^2 \\ s_1^3 \end{pmatrix} \equiv 0$$

und somit:

$$s_1^1 + s_1^2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{I}, 1.1)$$

$$2 s_1^3 \equiv 0 \ . \qquad (\mathrm{I}, 1.2)$$

Aus I folgt auf dieselbe Weise für (s_2):

$$2 s_2^1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{I}, 2.1)$$

$$s_2^2 + s_2^3 \equiv 0 \ . \qquad (\mathrm{I}, 2.2)$$

II. Aus II folgt

$$[(S_1, s_1)(S_2, s_2)]^3 = [S_1 S_2, S_1 s_2 + s_1]^3 = (E, 0)$$

und somit:

$$[(S_1 S_2)^2 + S_1 S_2 + E](S_1 s_2 + s_1) \equiv 0 \ .$$

Rechnet man die Matrizen aus, so findet man:

$$H_3(s_1 + s_2) \equiv 0$$

und daher

$$s_1^1 + s_1^2 + s_1^3 + s_2^1 + s_2^2 + s_2^3 \equiv 0 \ . \qquad (\mathrm{II}, 1.1)$$

Ich werde beweisen, daß diese Kongruenzen zwei inäquivalente Lösungen haben. Als Äquivalenzkriterium nehmen wir die Gleichungen (C). Ich werde am Ende dieses Paragraphen zeigen, daß in unserem Falle zwei Lösungen, die nach (C) inäquivalent sind, auch nach (B) inäquivalent sind.

Seien zwei Lösungen gefunden, deren Differenz ich der Einfachheit halber wieder mit (s_1) und (s_2) bezeichne, dann sind sie äquivalent, wenn sich eine Spalte (x) finden läßt, so daß gilt:

$$1.\ (E - S_1)(x) \equiv (s_1) \qquad \text{und} \qquad 2.\ (E - S_2)(x) \equiv (s_2) \ .$$

Ausgeschrieben heißt dies:

$$x_1 - x_2 \equiv s_1^1 \quad (1.a) \qquad\qquad 0 \equiv s_2^1 \quad (2.a)$$
$$-x_1 + x_2 \equiv s_1^2 \quad (1.b) \qquad\qquad x_2 - x_3 \equiv s_2^2 \quad (2.b)$$
$$0 \equiv s_1^3 \quad (1.c) \qquad\qquad -x_2 + x_3 \equiv s_2^3 \quad (2.c)$$

(1.a) ist lösbar; wegen (I, 1.1) ist auch (1.b) lösbar. Ebenso ist (2.b) lösbar und wegen (I, 2.2) auch (2.c). Wegen (I, 1.2) und (I, 2.1) ist

$$s_1^3 \equiv 0 \text{ oder } \equiv \tfrac{1}{2}\ , \qquad s_2^1 \equiv 0 \text{ oder } \equiv \tfrac{1}{2}\ .$$

Setzt man (I, 1.1) und (I, 2.2) in (II, 1.1) ein, so erhält man

$$s_1^3 + s_2^1 \equiv 0\ ,$$

so daß beide Größen entweder zugleich 0 oder zugleich $\frac{1}{2}$ sind. Sind sie beide kongruent Null, so erhält man die eine Lösung der Frobenius'schen Kongruenzen, sind sie beide kongruent $\frac{1}{2}$, die andere. Somit:

Zur symmetrischen Gruppe in drei Variablen in ihrer regulären Darstellung gibt es genau zwei inäquivalente Bewegungsgruppen.

In B, 1933, Seite 184, habe ich diese Klasse mit R_3 bezeichnet, die zugehörigen Bewegungsgruppen heißen in der Kristallographie $\mathfrak{C}_{3v}^5$ und $\mathfrak{C}_{3v}^6$.

β. Ich zeige ferner, daß es zur symmetrischen Gruppe von 4 Elementen zwei Bewegungsgruppen gibt. Dadurch haben wir einen Ausgangspunkt für den Induktionsbeweis zum Nachweis des Satzes für die symmetrische Gruppe in n Elementen gewonnen. Die Matrizen sind jetzt vierreihig und zu den obigen Kongruenzen kommen neu hinzu:

$$2s_1^4 \equiv 0 \qquad (\mathrm{I},\ 1.3)$$
$$2s_2^4 \equiv 0 \qquad (\mathrm{I},\ 2.3)$$
$$3s_1^4 + 3s_2^4 \equiv 0\ . \qquad (\mathrm{II},\ 1.2)$$

Aus $(S_3, s_3)^2 = (E, 0)$ folgt:

$$2s_3^1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{I},\ 3.1)$$
$$2s_3^2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{I},\ 3.2)$$
$$s_3^3 + s_3^4 \equiv 0\ . \qquad (\mathrm{I},\ 3.3)$$

Aus $[(S_2, s_2)\cdot(S_3, s_3)]^3 = (E, 0)$ folgt wie früher:

$$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & H_3\end{pmatrix} (s_2 + s_3) \equiv 0 \;, \qquad \text{und somit}$$

$$3s_2^1 + 3s_3^1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{II}, 2.1)$$

$$s_2^2 + s_2^3 + s_2^4 + s_3^2 + s_3^3 + s_3^4 \equiv 0 \qquad (\mathrm{II}, 2.2)$$

Ferner gilt noch $[(S_1, s_1)(S_3, s_3)]^2 = (E, 0)$, dies gibt

$$\begin{pmatrix}H_2 & 0\\ 0 & H_2\end{pmatrix} (s_1 + s_3) \equiv 0 \;, \qquad \text{und somit}$$

$$s_1^1 + s_1^2 + s_3^1 + s_3^2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{III}, 1.1)$$

$$s_1^3 + s_1^4 + s_3^3 + s_3^4 \equiv 0 \;. \qquad (\mathrm{III}, 1.2)$$

Als Äquivalenzbedingungen kommen zu den früheren hinzu:

$$0 \equiv s_1^4 \qquad (1.\mathrm{d}) \qquad\qquad 0 \equiv s_2^4 \,, \qquad (2.\mathrm{d})$$

und aus

$(E - S_3)(x) \equiv (s_3)$ die weiteren:

$$0 \equiv s_3^1 \qquad (3.\mathrm{a})$$

$$0 \equiv s_3^2 \qquad (3.\mathrm{b})$$

$$x_3 - x_4 \equiv s_3^3 \qquad (3.\mathrm{c})$$

$$-x_3 + x_4 \equiv s_3^4 \qquad (3.\mathrm{d})$$

Die Aequivalenzbedingungen unter α) sind bereits diskutiert.

(3. c) ist lösbar und wegen (I, 3. 3) auch (3. d). Wegen (I, 1. 3), (I, 2. 3), (I, 3. 1) und (I, 3. 2) kommen für s_1^4, s_2^4, s_3^1 und s_3^2 nur die Werte 0 und $\frac{1}{2}$ in Frage. Setzt man (I, 3. 3) in (III, 1. 2) ein, so kommt

$$s_1^3 + s_1^4 \equiv 0 \;,$$

also sind wiederum beide Werte zugleich kongruent 0 oder zugleich kongruent $\frac{1}{2}$. Setzt man (I, 1.1) in (III, 1.1) ein, so folgt

$$s_3^1 + s_3^2 \equiv 0$$

also auch beide zugleich kongruent 0 oder zugleich kongruent $\frac{1}{2}$.

Setzt man (I, 2.2) und (I, 3.3) in (II, 2.2) ein, so folgt

$$s_2^4 + s_3^2 \equiv 0 \;.$$

Setzt man endlich (I, 1.3) und (I, 2.3) in (II, 1.2) ein, so kommt

$$s_1^4 + s_2^4 \equiv 0 \quad .$$

Aus diesen vier Kongruenzen folgt, da ja die betreffenden Größen nur die Werte 0 und $\frac{1}{2}$ annehmen können:

$$s_1^3 \equiv s_1^4 \equiv s_2^4 \equiv s_3^2 \equiv s_3^1 \quad ,$$

so daß bewiesen ist, daß es zur symmetrischen Gruppe in vier Elementen in ihrer regulären Darstellung nur zwei inäquivalente Bewegungsgruppen gibt.

γ. Ich beweise in diesem Abschnitt, daß es zur symmetrischen Gruppe von $n + 1$ Elementen in ihrer regulären Darstellung genau zwei inäquivalente Bewegungsgruppen gibt. Nehmen wir deshalb an, dieser Satz sei für n Elemente bereits bewiesen und zeigen, daß er dann auch für $n + 1$ Elemente richtig ist. Für $n = 4$ haben wir den Beweis unter β geliefert.

Es ist vorteilhaft, sogleich die Äquivalenzbedingungen für die Differenzen zweier Lösungen zu untersuchen. Diese Differenzen bezeichnen wir wiederum mit

$$(s_1), (s_2), \ldots, (s_n) \quad .$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind von den folgenden Kongruenzen jeweils die n ersten diskutiert, während die letzte durch den Schritt von n zu $n + 1$ neu hinzu kommt.

1.) $(E - S_1)\ (x) \equiv (s_1)$ liefert:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\equiv s_1^1 && (1.\mathrm{a}) \\ -x_1 + x_2 &\equiv s_1^2 && (1.\mathrm{b}) \\ 0 &\equiv s_1^3 && (1.\mathrm{c}) \\ &\vdots && \vdots \\ 0 &\equiv s_1^n && (1.\mathrm{n}) \\ 0 &\equiv s_1^{n+1} && (1.\mathrm{n}+1) \end{aligned}$$

2.) $(E - S_2)\ (x) \equiv (s_2)$ liefert:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv s_2^1 && (2.\mathrm{a}) \\ x_2 - x_3 &\equiv s_2^2 && (2.\mathrm{b}) \\ -x_2 + x_3 &\equiv s_2^3 && (2.\mathrm{c}) \\ 0 &\equiv s_2^4 && (2.\mathrm{d}) \\ &\vdots && \vdots \\ 0 &\equiv s_2^n && (2.\mathrm{n}) \\ 0 &\equiv s_2^{n+1} \quad . && (2.\mathrm{n}+1) \end{aligned}$$

So fahren wir weiter für die Elemente $S_3, S_4, \dots,$ bis zu S_{n-1}.

n — 1.) $(E - S_{n-1})\,(x) \equiv (s_{n-1})$ liefert:

$$
\begin{array}{rl}
0 \equiv s_{n-1}^{1} & \text{(n — 1. a)} \\
\vdots & \vdots \\
0 \equiv s_{n-1}^{n-2} & \text{(n — 1. n — 2)} \\
x_{n-1} - x_n \equiv s_{n-1}^{n-1} & \text{(n — 1. n — 1)} \\
-x_{n-1} + x_n \equiv s_{n-1}^{n} & \text{(n — 1. n)} \\
0 \equiv s_{n-1}^{n+1} \,. & \text{(n — 1. n + 1)}
\end{array}
$$

Beim Induktionsbeweis treten vollständig neu hinzu:

n.) $(E - S_n)\,(x) \equiv (s_n)$, woraus folgen:

$$
\begin{array}{rl}
0 \equiv s_{n}^{1} & \text{(n. a)} \\
\vdots & \vdots \\
0 \equiv s_{n}^{n-2} & \text{(n. n — 2)} \\
0 \equiv s_{n}^{n-1} & \text{(n. n — 1)} \\
x_n - x_{n+1} \equiv s_{n}^{n} & \text{(n. n)} \\
-x_n + x_{n+1} \equiv s_{n}^{n+1} & \text{(n. n + 1)}
\end{array}
$$

Lösung: Gleichung $(n.\,n)$ ist durch Wahl von x_{n+1} zu lösen. $(n.\,n+1)$ ist eine Folgerung davon, denn aus

$$(S_n, s_n)^2 = (E, 0)$$

folgt unter anderem:

$$s_n^n + s_n^{n+1} \equiv 0 \,. \qquad \text{(I, n. n + 1)}$$

1.) Gehen wir nun zu Gleichung 1.). Aus

$$[(S_1, s_1) \cdot (S_n, s_n)]^2 = (E, 0)$$

folgt

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & 0 & 2 & & & & 0 \\
\vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & & 2 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & 0 & 1 & 1 \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 1
\end{pmatrix}
(s_n + s_1) \equiv 0 \,,
$$

oder unter anderem:

$$s_n^n + s_n^{n+1} + s_1^n + s_1^{n+1} \equiv 0 \,.$$

Trägt man hierin (I, $n.n+1$) ein, so erhalten wir

$$s_1^n + s_1^{n+1} \equiv 0 \;.$$

Nun ist nach Induktionsvoraussetzung $s_1^n \equiv s_1^3$, somit

$$s_1^{n+1} \equiv -s_1^3 \;.$$

Aus $(S_1, s_1)^2 = (E, 0)$ folgt aber weiter, daß $2 s_1^{n+1} \equiv 0$, also s_1^{n+1} kongruent 0 oder kongruent $\frac{1}{2}$, somit:

$$\underline{s_1^{n+1} \equiv s_1^3} \;.$$

2.) Wir schließen aus

$$(S_1, s_1)^2 = (E, 0)\,, \quad \text{daß} \quad 2 s_1^{n+1} \equiv 0 \text{ ist,}$$

$$\text{aus} \quad (S_2, s_2)^2 = (E, 0)\,, \quad \text{daß} \quad 2 s_2^{n+1} \equiv 0 \text{ ist,}$$

$$\text{aus } [(S_1, s_1) \cdot (S_2, s_2)]^3 = (E, 0), \text{ daß } 3 s_1^{n+1} + 3 s_2^{n+1} \equiv 0 \text{ ist.}$$

Folglich ist $s_2^{n+1} \equiv s_1^{n+1}$ und daher nach Obigem:

$$\underline{s_2^{n+1} \equiv s_1^3} \;.$$

Auf diese Weise fahren wir fort bis:

$n-1$.) Aus $(S_{n-2}, s_{n-2})^2 = (E, 0)$ folgt $2 s_{n-2}^{n+1} \equiv 0$,

aus $(S_{n-1}, s_{n-1})^2 = (E, 0)$ folgt $2 s_{n-1}^{n+1} \equiv 0$,

aus $[(S_{n-2}, s_{n-2})\, (S_{n-1}, s_{n-1})]^3 = (E, 0)$ folgt $3 s_{n-2}^{n+1} + 3 s_{n-1}^{n+1} \equiv 0$,

folglich ist $s_{n-1}^{n+1} \equiv s_{n-2}^{n+1}$ und nach Induktionsannahme daher

$$s_{n-1}^{n+1} \equiv s_1^{n+1}$$

und somit nach Obigem:

$$\underline{s_{n-1}^{n+1} \equiv s_1^3} \;.$$

n.) Um die Gleichungen ($n.a$) bis ($n.n-1$) zu untersuchen, betrachten wir

$$(S_{n-1}, s_{n-1})^2 = (E, 0)$$

$$(S_n, s_n)^2 = (E, 0)$$

und

$$[(S_{n-1}, s_{n-1}) \cdot (S_n, s_n)]^3 = (E, 0) \;.$$

Aus ihnen folgen:

$$2s^1_{n-1} \equiv 0, \ldots, \; 2s^{n-2}_{n-1} \equiv 0, \; s^{n-1}_{n-1} + s^n_{n-1} \equiv 0, \; 2s^{n+1}_{n-1} \equiv 0$$

$$2s^1_n \equiv 0, \ldots, \qquad 2s^{n-1}_n \equiv 0, \qquad s^n_n + s^{n+1}_n \equiv 0,$$

$$3s^1_{n-1} + 3s^1_n \equiv 0, \ldots, \; 3s^{n-2}_{n-1} + 3s^{n-2}_n \equiv 0, \text{ und}$$

$$s^{n-1}_{n-1} + s^n_{n-1} + s^{n+1}_{n-1} + s^{n-1}_n + s^n_n + s^{n+1}_n \equiv 0 .$$

Aus ihnen folgen ähnlich wie früher:

$$s^1_{n-1} \equiv s^1_n, \ldots, s^{n-2}_{n-1} \equiv s^{n-2}_n ,$$

somit nach Induktionsvoraussetzung:

$$s^1_n \equiv \cdots \equiv s^{n-2}_n \equiv s^3_1 .$$

Ferner:

$$s^{n-1}_n + s^{n+1}_{n-1} \equiv 0 ,$$

somit nach dem unter n — 1.) bewiesenen

$$\underline{s^{n-1}_n \equiv s^3_1} .$$

Hierdurch ist unser Induktionsbeweis zu Ende, und wir können sagen:

Die Kongruenzen

$$x_i - x_{i+1} \equiv s^i_i$$

sind stets lösbar. Die Kongruenzen

$$-x_i + x_{i+1} \equiv s^{i+1}_i$$

sind Folgerungen davon. Die Differenzen s^k_i zweier Lösungen mit $k \neq i$ und $k \neq i+1$ sind entweder alle zugleich kongruent Null oder alle zugleich kongruent $\frac{1}{2}$ modulo 1. Daher ist jede beliebige Lösung der Frobenius'schen Kongruenzen einer dieser beiden Lösungen äquivalent und wir haben

Satz 2: *Zur symmetrischen Gruppe von n Elementen in ihrer regulären Darstellung gibt es genau zwei inäquivalente Bewegungsgruppen.*

Ich muß noch begründen, warum es genügt, die Äquivalenz zweier Lösungen nach den Kongruenzen (C) zu entscheiden, anstatt nach dem allgemeineren Kriterium (B). Das heißt, ich muß zeigen, daß es keinen ganzzahligen unimodularen Automorphismus der regulären Darstellung der symmetrischen Permutationsgruppe gibt, außer dem identischen. Gäbe es einen solchen, so hätte diese Gruppe zwei verschiedene reguläre Darstellungen, was unmöglich ist. Diese Bemerkung gilt auch für die alternierende Gruppe, die wir im folgenden Paragraphen untersuchen.

§ 3. Die alternierende Gruppe

Nach Todd kann man die alternierende Gruppe von $n+1$ Symbolen durch $n-1$ Elemente $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ erzeugen, zwischen denen die Relationen bestehen:

$$S_1^3 = E,\ S_2^2 = S_3^2 = \cdots = S_{n-1}^2 = E. \qquad \text{I.}$$

$$(S_{i+1}\cdot S_i)^3 = E, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad \text{II.}$$

$$(S_j \cdot S_i)^2 = E, \qquad i < j-1. \qquad \text{III.}$$

Um zu einer Darstellung zu gelangen, setzen wir in der Schreibweise durch Zyklen

$$T_1 = (1, 2, 3), \quad T_2 = (2, 3, 4), \ldots, \quad T_{n-1} = (n-1, n, n+1).$$

Wählen wir dann

$$\begin{aligned} S_1 &= T_1^{-1} = (1, 3, 2) \\ S_2 &= T_2 \cdot T_1 = (1, 2)(3, 4) \\ S_3 &= T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 = (1, 2)(4, 5) \\ &\vdots \\ S_{n-1} &= T_{n-1} \ldots T_2 \cdot T_1 = (1, 2)(n, n+1), \end{aligned}$$

so sieht man mittels der folgenden Formeln leicht, daß die derart dargestellten $S_1, \ldots, S_{n-1}$ die Relationen I, II und III erfüllen.

Für $i > 1$ ist: $S_{i+1} \cdot S_i = T_{i+1} \cdot (T_i \ldots T_1)^2 = T_{i+1} \cdot S_i^2 = T_{i+1}$.

Für $k \geqslant 2$ ist: $S_{i+k} \cdot S_i = T_{i+k} \ldots T_{i+1} \cdot (T_i \ldots T_1)^2 = T_{i+k} \ldots T_{i+1} =$

$$= (i+1, i+2)(i+k+1, i+k+2).$$

Für $n = 2$ erhalten wir die zyklische Gruppe der Ordnung 3, erzeugt durch $S_1 = (1, 3, 2)$, die bereits in § 1 untersucht ist.

Ich werde im folgenden zeigen, daß es für $n \geqslant 3$ zur alternierenden Gruppe in ihrer regulären Darstellung stets drei inäquivalente Bewegungsgruppen gibt. Zu diesem Zwecke beweise ich wiederum die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ gesondert, um den allgemeinen Fall mittels vollständiger Induktion zu bewältigen.

α.) $n = 3$ ergibt die Tetraedergruppe, regulär dargestellt durch vierreihige Matrizen mit den Erzeugenden

$$S_1 = (1, 3, 2), \quad S_2 = (1, 2)(3, 4),$$

und den Relationen

$$\text{I. } S_1^3 = E,\ S_2^2 = E; \quad \text{II. } (S_2 S_1)^3 = E.$$

Stellen wir die Frobenius'schen Kongruenzen auf! Wir nennen wiederum

$$(S_1, s_1), (S_2, s_2), \ldots, (S_{n-1}, s_{n-1}) \text{ die den } S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$$

entsprechenden Erzeugenden der Bewegungsgruppe und erhalten:

I. Aus $(S_1, s_1)^3 = (E, 0)$ folgt $(S_1^2 + S_1 + E)(s_1) \equiv 0$.

Rechnen wir die Matrizen aus, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} H_3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} (s_1) \equiv 0,$$

und somit

$$s_1^1 + s_1^2 + s_1^3 \equiv 0 \qquad (\text{I}, 1.1)$$
$$3 s_1^4 \equiv 0 \qquad (\text{I}, 1.2)$$

Aus $(S_2, s_2)^2 = (E, 0)$ folgt $(S_2 + E)(s_2) \equiv 0$ oder

$$\begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} (s_2) \equiv 0$$

und somit

$$s_2^1 + s_2^2 \equiv 0 \qquad (\text{I}, 2.1)$$
$$s_2^3 + s_2^4 \equiv 0. \qquad (\text{I}, 2.2)$$

II. Aus $[(S_2, s_2) \cdot (S_1, s_1)]^3 = (E, 0)$ folgt:

$$[(S_2 S_1)^2 + S_2 S_1 + E](S_2 s_1 + s_2) =$$
$$= (S_1^2 + S_2 S_1 S_2 + S_2)(s_1) + (S_2 S_1 S_2 S_1 + S_2 S_1 + E)(s_2) \equiv 0.$$

Dies gibt ausgerechnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (s_1) + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} (s_2) \equiv 0, \quad \text{somit}$$

$$3 s_1^2 + 3 s_2^1 \equiv 0 \qquad (\text{II}, 1.1)$$
$$s_1^1 + s_1^3 + s_1^4 + s_2^2 + s_2^3 + s_2^4 \equiv 0. \qquad (\text{II}, 1.2)$$

Denken wir uns diese Kongruenzen gelöst und fragen nach der Äquivalenz. Diese dürfen wir wiederum nach dem Kriterium (C) beurteilen. Sei daher, wie früher auch, die Differenz zweier Lösungen ebenfalls mit (s_1) und (s_2) bezeichnet. Damit diese beiden Lösungen äquivalent sind, muß es eine Spalte (x) geben, so daß:

$$\begin{aligned} &1.)\ (E - S_1)(x) \equiv (s_1) \quad \text{und} \\ &2.)\ (E - S_2)(x) \equiv (s_2) \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Dies liefert die folgenden acht Bedingungen:

$$\begin{array}{llr} x_1 \qquad - x_3 & \equiv s_1^1 & (1.\mathrm{a}) \\ -x_1 + x_2 & \equiv s_1^2 & (1.\mathrm{b}) \\ \qquad -x_2 + x_3 & \equiv s_1^3 & (1.\mathrm{c}) \\ \qquad\qquad 0 & \equiv s_1^4 & (1.\mathrm{d}) \\ x_1 - x_2 & \equiv s_2^1 & (2.\mathrm{a}) \\ -x_1 + x_2 & \equiv s_2^2 & (2.\mathrm{b}) \\ \qquad\qquad x_3 - x_4 & \equiv s_2^3 & (2.\mathrm{c}) \\ \qquad\qquad -x_3 + x_4 & \equiv s_2^4 & (2.\mathrm{d}) \end{array}$$

(1.a) und (1.b) sind lösbar, wegen (I, 1.1) ist (1.c) eine Folgerung daraus. (2.c) ist lösbar und wegen (I, 2.2) folgt (2.d) daraus. Falls (2.a) lösbar ist, so ist wegen (I, 2.1) auch (2.b) lösbar. Es bleiben somit nur noch (1.d) und (2.a) zu untersuchen übrig. Aus (I, 1.2) schließen wir, daß für s_1^4 nur die drei Werte 0, $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ in Betracht fallen. Hierdurch erhalten wir drei inäquivalente Lösungen. Es gibt aber auch nicht mehr als drei. Denn setzen wir (I, 2.2) und (I, 1.1) in (II, 1.2) ein, so erhalten wir

$$-s_1^2 + s_1^4 + s_2^2 \equiv 0 \quad ,$$

oder mit (I, 2.1)

$$s_2^1 \equiv s_1^4 - s_1^2 \quad .$$

Mit Hilfe der bereits gelösten Gleichung (1.b) dürfen wir hierfür schreiben

$$s_2^1 \equiv s_1^4 + x_1 - x_2 \quad ,$$

und somit ist (2.a) erfüllt, wenn $s_1^4 \equiv 0$ ist. Das heißt aber, daß es außer den drei bereits gefundenen Lösungen keine neuen gibt, denn stets, wenn (1.d) erfüllt ist, ist auch (2.a) erfüllt.

β. Für $n = 4$ erhalten wir die Ikosaedergruppe in ihrer regulären Darstellung durch fünfreihige Matrizen mit den Erzeugenden

$$S_1 = (1, 3, 2), \quad S_2 = (1, 2)(3, 4) \quad \text{und} \quad (S_3 = (1, 2)(4,5)$$

und den Relationen:

$$\text{I.} \quad S_1^3 = S_2^2 = S_3^2 = E \ .$$

$$\text{II.} \quad (S_2 \cdot S_1)^3 = (S_3 \cdot S_2)^3 = E \ .$$

$$\text{III.} \quad (S_3 \cdot S_1)^2 = E \ .$$

Zu den unter α. bereits aufgeführten Kongruenzen treten die folgenden neu hinzu, deren Herkunft leicht aus ihrer Numerierung zu erkennen ist:

$$3 s_1^5 \equiv 0 \qquad (\text{I}, 1.3)$$

$$2 s_2^5 \equiv 0 \ . \qquad (\text{I}, 2.3)$$

Aus $(S_3, s_3)^2 = (E, 0)$ folgt

$$(S_3 + E)\,(s_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (s_3) \equiv 0 \ ,$$

und somit

$$s_3^1 + s_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{I}, 3.1)$$

$$2 s_3^3 \equiv 0 \qquad (\text{I}, 3.2)$$

$$s_3^4 + s_3^5 \equiv 0 \ . \qquad (\text{I}, 3.3)$$

Zu (II. 1) tritt hinzu

$$3 s_1^5 + 3 s_2^5 \equiv 0 \ . \qquad (\text{II}, 1.3)$$

Neu ist ferner $[(S_3, s_3)(S_2, s_2)]^3 = (E, 0)$, und somit

$$[(S_3 S_2)^2 + S_3 S_2 + E]\,[S_3 s_2 + s_3] \equiv (S_2 + S_3 S_2 S_3 + S_3)\,(s_2) +$$

$$+ (S_2 S_3 + S_3 S_2 + E)\,(s_3) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 3 & \\ 3 & 0 & \bigcirc \\ & \bigcirc & H_3 \end{pmatrix} (s_2) + \begin{pmatrix} 3 & 0 & \\ 0 & 3 & \bigcirc \\ & \bigcirc & H_3 \end{pmatrix} (s_3) \equiv 0$$

und daher

$$3 s_2^2 + 3 s_3^1 \equiv 0 \qquad (\text{II}, 2.1)$$

$$3 s_2^1 + 3 s_3^2 \equiv 0 \qquad (\text{II}, 2.2)$$

$$s_2^3 + s_2^4 + s_2^5 + s_3^3 + s_3^4 + s_3^5 \equiv 0 \ . \qquad (\text{II}, 2.3)$$

Aus der dritten Gruppe der Relationen kommt

$$[(S_3, s_3) \cdot (S_1, s_1)]^2 = (E, 0)$$

und liefert:

$$(S_3 S_1 + E)(S_3 s_1 + s_3) \equiv 0 \quad ,$$

oder in Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (s_1) + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (s_3) \equiv 0$$

und somit

$$2 s_1^2 + 2 s_3^1 \equiv 0 \qquad \text{(III, 1.1)}$$

$$s_1^1 + s_1^3 + s_3^2 + s_3^3 \equiv 0 \qquad \text{(III, 1.2)}$$

$$s_1^4 + s_1^5 + s_3^4 + s_3^5 \equiv 0 \qquad \text{(III, 1.3)}$$

Zu den Aequivalenzbedingungen aus α. treten neu hinzu:

$$0 \equiv s_1^5 \qquad \text{(1. e)}$$

$$0 \equiv s_2^5 \, , \qquad \text{(2. e)}$$

und aus

$$(E - S_3)(x) \equiv (s_3):$$

$$x_1 - x_2 \equiv s_3^1 \qquad \text{(3. a)}$$

$$-x_1 + x_2 \equiv s_3^2 \qquad \text{(3. b)}$$

$$0 \equiv s_3^3 \qquad \text{(3. c)}$$

$$x_4 - x_5 \equiv s_3^4 \qquad \text{(3. d)}$$

$$-x_4 + x_5 \equiv s_3^5 \qquad \text{(3. e)}$$

Nach (I, 3.1) folgt (3.b) aus (3.a). (3.d) ist durch Wahl von x_5 zu lösen, und nach (I, 3.3) folgt (3.e) daraus. Setzen wir (I, 1.3) und (I, 2.3) in (II, 1.3) ein, so erhalten wir $s_2^5 \equiv 0$ und somit ist (2.e) erfüllt. Setzen wir ferner (I, 2.2) und (I, 3.3) in (II, 2.3) ein, so kommt

$$s_2^5 + s_3^3 \equiv 0 \quad \text{und somit} \quad s_3^3 \equiv 0 \, , \quad \text{wodurch (3. c) erfüllt ist.}$$

Aus (I, 3.3) und (III, 1.3) folgt $s_1^4 + s_1^5 \equiv 0$, so daß $s_1^5 \equiv - s_1^4$ durch s_1^4 bestimmt ist. Somit ist (1.e) nur lösbar, wenn (1.d) lösbar ist, gibt somit zu keinen neuen Lösungen Anlaß. In (III, 1.2) setzen wir $s_3^3 \equiv 0$ ein, setzen das Resultat hierauf in (II, 1.2) ein und finden mit Hilfe von (I, 2.2):

$$s_1^4 - s_3^2 + s_2^2 \equiv 0 \quad .$$

Berücksichtigen wir (I, 2.1) und (I, 3.1), so folgt hieraus

$$s_1^4 + s_3^1 - s_2^1 \equiv 0 \quad .$$

Ist also $s_1^4 \equiv 0$, so folgt somit (3.a) aus (2.a). Wir haben hierdurch alle Äquivalenzbedingungen diskutiert und können sagen: Zwei Lösungen sind nur dann äquivalent, wenn für ihre Differenz die Komponente s_1^4 kongruent Null ist. Da für diese Komponente die drei Werte 0, $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ möglich sind, erhalten wir drei inäquivalente Lösungen. Hierdurch haben wir die Grundlage, um im folgenden Abschnitt den Induktionsbeweis zu führen.

γ. Nehmen wir an, es sei bekannt, daß es zur alternierenden Gruppe in ihrer regulären Darstellung drei Bewegungsgruppen gibt, falls sie $n+1$ Elemente permutiert, also durch $n-1$ Erzeugende dargestellt wird, und zeigen, daß dies dann auch bei $n+2$ Elementen oder n Erzeugenden der Fall ist. Wir schreiben nochmals die Äquivalenzbedingungen für die Differenz zweier Lösungen auf, von denen nach Induktionsannahme jeweils die $n+1$ ersten diskutiert seien, während die $(n+2)$-te neu hinzutritt.

1.) $$(E - S_1)(x) \equiv (s_1)$$

liefert, wie wir teilweise von früher bereits wissen:

$$\begin{array}{rlr}
x_1 \qquad - x_3 & \equiv s_1^1 & (1.\mathrm{a}) \\
-x_1 + x_2 \qquad & \equiv s_1^2 & (1.\mathrm{b}) \\
-x_2 + x_3 & \equiv s_1^3 & (1.\mathrm{c}) \\
0 & \equiv s_1^4 & (1.\mathrm{d}) \\
\vdots & & \vdots \\
0 & \equiv s_1^{n+1} & (1.\mathrm{n}+1) \\
0 & \equiv s_1^{n+2} & (1.\mathrm{n}+2)
\end{array}$$

2.) $(E - S_2)(x) \equiv (s_2)$ liefert:

$$\begin{array}{rlr}
x_1 - x_2 \qquad & \equiv s_2^1 & (2.\mathrm{a}) \\
-x_1 + x_2 \qquad & \equiv s_2^2 & (2.\mathrm{b}) \\
x_3 - x_4 & \equiv s_2^3 & (2.\mathrm{c}) \\
-x_3 + x_4 & \equiv s_2^4 & (2.\mathrm{d}) \\
0 & \equiv s_2^5 & (2.\mathrm{e}) \\
\vdots & & \vdots \\
0 & \equiv s_2^{n+1} & (2.\mathrm{n}+1) \\
0 & \equiv s_2^{n+2} & (2.\mathrm{n}+2)
\end{array}$$

und so fort bis

n — 1.) $(E - S_{n-1})(x) \equiv (s_{n-1})$ gibt:

$$
\begin{array}{rll}
x_1 - x_2 & \equiv s_{n-1}^1 & \text{(n — 1. a)} \\
-x_1 + x_2 & \equiv s_{n-1}^2 & \text{(n — 1. b)} \\
0 & \equiv s_{n-1}^3 & \text{(n — 1. c)} \\
\vdots & & \vdots \\
0 & \equiv s_{n-1}^{n-1} & \text{(n — 1. n — 1)} \\
x_n - x_{n-1} & \equiv s_{n-1}^{n} & \text{(n — 1. n)} \\
-x_n + x_{n-1} & \equiv s_{n-1}^{n+1} & \text{(n — 1. n + 1)} \\
0 & \equiv s_{n-1}^{n+2}\,. & \text{(n — 1. n + 2)}
\end{array}
$$

n.) Ganz neu kommen aus $(E - S_n)(x) \equiv (s_n)$ hinzu:

$$
\begin{array}{rll}
x_1 - x_2 & \equiv s_n^1 & \text{(n. a)} \\
-x_1 + x_2 & \equiv s_n^2 & \text{(n. b)} \\
0 & \equiv s_n^3 & \text{(n. c)} \\
0 & \equiv s_n^4 & \text{(n. d)} \\
\vdots & & \vdots \\
0 & \equiv s_n^{n-1} & \text{(n. n — 1)} \\
0 & \equiv s_n^{n} & \text{(n. n)} \\
x_{n+1} - x_{n+2} & \equiv s_n^{n+1} & \text{(n. n + 1)} \\
-x_{n+1} + x_{n+2} & \equiv s_n^{n+2}\,. & \text{(n. n + 2)}
\end{array}
$$

Zur Lösung beginnen wir mit (2. n + 2). Aus $(S_1, s_1)^3 = (E, 0)$ folgt aus der letzten Zeile $3 s_1^{n+2} \equiv 0$, und aus $(S_2, s_2)^2 = (E, 0)$ folgt ebenso $2 s_2^{n+2} \equiv 0$. Sodann gibt $[(S_2, s_2)(S_1, s_1)]^3 = (E, 0)$ in der letzten Zeile $3 s_1^{n+2} + 3 s_2^{n+2} \equiv 0$, und aus diesen drei Kongruenzen zusammen folgt $s_2^{n+2} \equiv 0$, somit ist (2. n + 2) stets erfüllt.

Aus $(S_3, s_3)^2 = (E, 0)$ folgt $2 s_3^{n+2} \equiv 0$, aus $[(S_3, s_3)(S_2, s_2)]^3 = (E, 0)$ folgt $3 s_2^{n+2} + 3 s_3^{n+2} \equiv 0$, somit ist in Verbindung mit dem Vorhergehenden $s_3^{n+2} \equiv 0$, und daher ist die Gleichung, die mit (3. n + 2) zu bezeichnen wäre, erfüllt. Auf diese Weise können wir fortfahren, bis wir zu den Gleichungen (n — 1) kommen. Aus $(S_{n-1}, s_{n-1})^2 = (E, 0)$ folgt $2 s_{n-1}^{n+2} \equiv 0$ und aus $[(S_{n-1}, s_{n-1})(S_{n-2}, s_{n-2})]^3 = (E, 0)$ folgt $3 s_{n-1}^{n+2} + 3 s_{n-2}^{n+2} \equiv 0$ und daher $s_{n-1}^{n+2} \equiv 0$, somit ist (n — 1. n + 2) stets erfüllt.

Aus $[(S_3, s_3)(S_1, s_1)]^2 = (E, 0)$ folgt $2 s_1^{n+2} + 2 s_3^{n+2} \equiv 0$, somit nach Obigem $2 s_1^{n+2} \equiv 0$; aus $(S_1, s_1)^3 = (E, 0)$ folgt $3 s_1^{n+2} \equiv 0$ und daher $s_1^{n+2} \equiv 0$, also ist (1. n + 2) stets erfüllt.

Aus $(S_n, s_n)^2 = (E, 0)$ folgt $2 s_n^3 \equiv 0$. Aus $[(S_n, s_n)(S_{n-1}, s_{n-1})]^3 = (E, 0)$ folgt aus der dritten Zeile, daß $3 s_{n-1}^3 + 3 s_n^3 \equiv 0$ ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist $s_{n-1}^3 \equiv 0$, daher ist in Verbindung mit dem Vorangehenden $s_n^3 \equiv 0$. Indem wir die folgenden Zeilen dieser Gleichungen heranziehen, schließen wir, daß auch $s_n^4 \equiv 0, \ldots, s_n^{n-1} \equiv 0$ ist, somit die Gleichungen (n. d), ..., (n. n — 1) erfüllt sind.

Aus $(S_n, s_n)^2 = (E, 0)$ folgt ferner $s_n^{n+1} + s_n^{n+2} \equiv 0$;

aus $(S_{n-1}, s_{n-1})^2 = (E, 0)$ folgt ebenso $s_{n-1}^n + s_{n-1}^{n+1} \equiv 0$, und

aus $[(S_n, s_n)(S_{n-1}, s_{n-1})]^3 = (E, 0)$ folgt

$$s_{n-1}^n + s_{n-1}^{n+1} + s_{n-1}^{n+2} + s_n^n + s_n^{n+1} + s_n^{n+2} \equiv 0 .$$

Berücksichtigt man noch, daß $s_{n-1}^{n+2} \equiv 0$, so folgt hieraus, daß $s_n^n \equiv 0$ und somit (n. n) stets erfüllt ist.

Der Kongruenz (n. n + 1) ist durch Wahl von x_{n+2} zu genügen und aus $s_n^{n+1} + s_n^{n+2} \equiv 0$ sehen wir, daß (n. n + 2) eine Folgerung daraus ist. Aus $(S_n, s_n)^2 = (E, 0)$ folgt ferner, daß $s_n^1 + s_n^2 \equiv 0$ ist, und somit ist (n. b) eine Folge von (n. a). Es bleibt daher nur noch diese Kongruenz zu diskutieren übrig. Aus $[(S_n, s_n)(S_1, s_1)]^2 = (E, 0)$ folgt aus der zweiten Zeile, daß $s_1^1 + s_1^3 + s_n^2 + s_n^3 \equiv 0$ ist. Nach (n. c) ist $s_n^3 \equiv 0$, somit ist $s_1^1 + s_1^3 + s_n^2 \equiv 0$. Setzen wir dies in (II, 1. 2) ein und berücksichtigen noch (I, 2. 2), so erhalten wir $s_1^4 + s_2^2 - s_n^2 \equiv 0$, oder leicht umgeformt

$$s_1^4 - s_2^1 + s_n^1 \equiv 0 .$$

Hieraus schließen wir wie am Ende von β. :

Ist $s_1^4 \equiv 0$, so folgt (n. a) aus (2. a). Da für s_1^4 nur die drei Werte $0, \frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ möglich sind, gibt es drei inaequivalente Bewegungsgruppen, daher

Satz 3: *Zur alternierenden Gruppe von n Elementen in ihrer regulären Darstellung gibt es genau drei inaequivalente Bewegungsgruppen.*

(Eingegangen den 17. März 1937.)