

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 9 (1936-1937)

Artikel: Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes.
Autor: Blanc, Charles
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-10182>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes

Par CHARLES BLANC, Lausanne

Introduction

Depuis quelques années, la recherche de critères de type de surfaces de Riemann simplement connexes a été l'objet de nombreux travaux. Ces critères concernent en général des surfaces assez simples, notamment ceux d'entre eux qui donnent des conditions suffisantes pour le type parabolique; le principe de Bloch (§ 11) permet d'indiquer dans quelle direction on peut trouver des généralisations de ces critères. M. Ahlfors a complété dans ce sens des conditions suffisantes pour le type hyperbolique (généralisation du théorème de Picard par exemple).

Dans le chapitre premier (§ 1 à 3), nous rappelons les résultats acquis concernant la définition des surfaces de Riemann, et leur représentation par des arbres ou des réseaux.

La classification, due à M. Iversen, des singularités des surfaces de Riemann simplement connexes, fait l'objet du § 4; nous donnons ensuite (§ 5) des exemples de singularités plus compliquées que celles qui rentrent dans cette classification.

Le chapitre 3 expose l'extension aux surfaces les plus générales de la représentation par les réseaux de M. Speiser; nous montrons qu'à tout réseau (avec quelques restrictions nécessaires) correspond une surface de Riemann. En passant, nous étudions les relations qui doivent exister entre deux réseaux d'une même surface.

Le chapitre 4 traite du type des surfaces de Riemann. Au § 11, nous exposons l'idée de M. Bloch et proposons une forme précise pour ce que nous appelons le principe de Bloch, à la place du terme de continuité topologique qu'il a donné lui-même et qui prête à confusion.

Le § 12 donne un critère de type qui constitue une démonstration partielle du principe de Bloch. Aux §§ 13 et 14, nous indiquons des généralisations (dans le sens indiqué par M. Bloch) d'un théorème de M. R. Nevanlinna. Le critère donné au § 15 est également inspiré par le principe de Bloch; celui du § 16 montre qu'on peut obtenir le type parabolique non seulement en raréfiant les singularités, mais aussi en les disposant de façon assez régulière.

Enfin, aux §§ 17 à 19, nous introduisons, pour l'étude du type des sur-

faces, une méthode nouvelle; elle peut être utile lorsqu'on s'occupe de surfaces dont la symétrie, ou la dissymétrie, joue un rôle prépondérant. Nous donnons quelques critères obtenus grâce à cette méthode, et indiquons, au § 19, comment une étude plus complète pourrait donner la démonstration du principe de Bloch dans sa forme la plus simple, celle où la transformation de la surface ne concerne qu'une singularité isolée.

En terminant, il m'est agréable de remercier tous ceux à qui je dois d'avoir pu préparer et faire imprimer ce travail; ma gratitude va en particulier à M. Valiron, dont les remarques et les bienveillants conseils m'ont été d'un si grand prix.

CHAPITRE I

Définitions. Rappel de résultats

§ 1. Définition de la surface de Riemann

La définition que nous donnons est due à *Radó*¹⁾; voir aussi *Bochner*²⁾ et *de Possel*³⁾.

Espace topologique: C'est un ensemble d'éléments, les „points“; à chaque „point“ P correspond un sous-ensemble, contenant P , appelé *voisinage* de P : $V(P)$. Un voisinage est tel qu'il peut être représenté topologiquement sur l'intérieur d'un cercle, l'image de P étant le centre du cercle. De plus, cet ensemble est tel que:

Axiome 1: Si V_1 et V_2 sont deux voisinages de P , P possède un voisinage contenu dans V_1 et V_2 .

Axiome 2: Si Q est contenu dans $V(P)$, on peut trouver un $V(Q)$ tel que

$$V(Q) \subset V(P)$$

Axiome 3: Si $P \neq Q$, on peut choisir $V(P)$ et $V(Q)$ avec

$$V(P) \cdot V(Q) = 0$$

Surface: Espace topologique topologiquement équivalent à un domaine plan („schlichtartig“).

¹⁾ Acta Szeged, 2, 1925, p. 101.

²⁾ Math. Annalen, 98, 1928, p. 26.

³⁾ Thèse, J. Ecole Polytechnique, 2^{me} série, 30, 1932, p. 9.

Surface de Riemann : Soit F une surface, $\{V\}$ le système des voisinages. Chaque voisinage est représenté topologiquement sur un cercle par une représentation $T(V)$. Soient V_1 et V_2 deux voisinages avec

$$V_1 \cdot V_2 = G$$

et soient G'_1 et G'_2 les images de G par $T(V_1)$ et $T(V_2)$. Si la transformation

$$T(V_1)^{-1} \cdot T(V_2)$$

qui représente G'_1 sur G'_2 est conforme et directe, alors on dit que F est une surface de Riemann.

On peut définir une surface de Riemann à partir d'une fonction analytique $z(w)$. Un „point“ est un élément de la fonction (régulier ou algébrique); le voisinage est formé des éléments d'un cercle concentrique et intérieur au cercle de convergence; $T(V)$ est donné par

$$\zeta = w$$

si l'élément est régulier, par

$$\zeta = (w - a)^{\frac{1}{p}}$$

si l'élément est algébrique.

Un élément algébrique sera considéré comme un „point“ distingué de F , „point“ que nous appellerons „point“ critique algébrique ou singularité algébrique.

La fonction $z(w)$ peut avoir des points *singuliers transcendants*. Il ne leur correspond aucun „point“ de F ; en effet, il ne serait pas possible de représenter le voisinage correspondant, l'image du point venant au milieu du cercle.

Soit a un point singulier transcendant de $z(w)$. Il est isolé si dans un domaine assez petit D de la sphère de Riemann, contenant a , la branche considérée de $z(w)$ est prolongeable rationnellement⁴⁾ sur tout chemin sauf en a . L'exemple du point zéro pour $\log w$ démontre l'existence de tels points singuliers.

Soit une suite de domaines emboîtés $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ tendant vers a . Il lui correspond une suite de domaines emboîtés $D'_1, D'_2, \dots, D'_n, \dots$ de F ; nous dirons que cette suite définit une singularité logarithmique (ou singularité isolée) de F . Cette singularité fait partie de la frontière de F . Par définition, elle ne peut être limite d'une suite infinie de points critiques algébriques.

⁴⁾ C'est-à-dire qu'en chaque point w_0 elle y admet un développement en série de puissances entières de $(w - w_0)$.

a est la trace de la singularité, de même que la trace d'un point de F est le point du plan ou de la sphère simple où on a l'élément correspondant de $z(w)$.

On sait que $z(w)$ peut posséder des points singuliers de nature plus complexe⁵⁾. Ils forment les singularités non isolées de F .

Chemin sur F : C'est un ensemble de points de F , topologiquement équivalent à un intervalle rectiligne ouvert. La *trace d'un chemin* est l'ensemble des traces de ses points, où on compte n fois un point de la sphère de Riemann ou du plan qui est trace de n points du chemin sur la surface. C'est une courbe, que nous supposons toujours rectifiable.

Distance de deux points de F : C'est la borne inférieure de la longueur de la trace des chemins ayant les deux points pour extrémités.

Distance d'un point à une singularité: C'est la borne inférieure de la longueur de la trace des chemins dont les extrémités sont le point et la singularité.

Distance de deux singularités: C'est la borne inférieure de la longueur de la trace des chemins dont les extrémités sont les deux singularités.

On définit de la même façon les *distances sphériques*, en mesurant les longueurs sur la sphère de Riemann.

Type d'une surface de Riemann simplement connexe: Une surface de Riemann simplement connexe peut être représentée conformément sur un cercle $|z| < 1$ ou sur le plan ouvert. Dans le premier cas, on dit que la surface est du type hyperbolique, dans le second, qu'elle est du type parabolique.

§ 2. Quelques définitions sur les surfaces de Riemann

Pavage δ de la sphère de Riemann. Soit $\delta > 0$. On dit qu'on a un *pavage δ* de la sphère de Riemann lorsque on l'a entièrement recouverte d'un nombre fini de domaines simplement connexes, sans points communs sinon les points frontières, et tels que deux points quelconques d'un même domaine ou de sa frontière peuvent toujours être joints par un chemin intérieur au domaine, et de longueur sphérique inférieure à δ .

On supposera que la frontière de chaque *pavé* est formée d'un nombre fini d'arcs analytiques. De plus, un point sera sur la frontière de trois pavés au plus.

Portion d'une surface de Riemann F : Soit P un point de F , dont la trace est intérieure à un pavé. On appelle *portion* de F l'ensemble Δ des

⁵⁾ voir *Iversen*, Thèse, Helsingfors 1914.

points de F qu'on peut atteindre par des chemins issus de P et dont la trace reste dans le pavé.

Une portion peut ne pas être simplement connexe, même si F l'est (par exemple si le pavé contient les points *zéro* et *infini*, et si F est la surface de $z = \log w$).

Supposons maintenant F simplement connexe; on appellera *portion étendue* Δ' la portion Δ à laquelle on a adjoint tout ce qu'il fallait pour la rendre simplement connexe; cela est possible, et d'une seule manière. On constate que $\Delta' - \Delta$ ne contient que des singularités algébriques.

Base singulière d'une surface de Riemann: C'est l'ensemble des traces des singularités algébriques et transcendentes de la surface. On dira qu'une surface a une base singulière finie si l'ensemble des traces des singularités est fini.

Portion circulaire: C'est une portion dont le pavé est un cercle.

§ 3. Réseau topologique d'une surface de Riemann

M. Speiser⁶⁾ a considéré les surfaces de Riemann simplement connexes dont toutes les singularités sont logarithmiques et ont pour traces trois points w_1, w_2, w_3 de la sphère de Riemann. Il donne une méthode pour construire ce qu'il appelle l'*arbre topologique* d'une telle surface. Voici comment on procède: on fait passer une courbe fermée L , sans points doubles, par les trois points w_1, w_2, w_3 , et on fait la représentation de la surface sur le cercle $|z| < R$ ($R \leq \infty$). La courbe L se transforme en courbes Δ du cercle $|z| < R$, et ces courbes Δ définissent des *domaines fondamentaux*. On choisit sur la sphère deux points I et E , l'un intérieur à L , l'autre extérieur. Pour finir, on joint par des courbes ne se coupant pas, les points du plan z qui correspondent à I et E et dont les domaines sont contigus. On forme ainsi un arbre, au sens topologique du mot, et c'est ce que M. Speiser appelle l'*arbre topologique* de la surface de Riemann.

Cette représentation peut s'étendre sans autre aux cas où l'on a p ($p \geq 2$) points au lieu de trois. On peut aussi le faire si la surface, simplement connexe ou non, comporte des points critiques algébriques. Mais alors on n'obtient plus un *arbre* (au sens topologique du mot), mais un *réseau*. On trouve un exposé sur ce sujet dans le texte de la conférence de M. R. Nevanlinna, au *Congrès International de Zurich*⁷⁾ et une étude très complète dans la récente thèse de M. Elfving⁸⁾.

⁶⁾ Comm. Math. Helv. 1, 1929 et 2, 1930.

⁷⁾ Verh. des Int. Math. Kongresses. Zürich 1932, 1, p. 221.

⁸⁾ Thèse. Acta Fennicae. Nov. Ser. A, 2, no. 3.

Le *réseau topologique* d'une surface découpe le plan en domaines; à chacun de ces domaines correspond *une* singularité de la surface. Ce sont les *domaines élémentaires*. Si la singularité d'un domaine est transcendante, le domaine a une infinité de côtés, et réciproquement. Si la singularité d'un domaine est algébrique de degré λ , le domaine a 2λ côtés, et réciproquement⁹⁾.

M. Elfving considère des réseaux un peu plus précis: ils sont constitués par l'image de p courbes IE passant chacune entre deux points w_i, w_{i+1} . Le réseau qu'on obtient est le même que le précédent si on considère comme confondues deux arêtes ayant les mêmes extrémités.

On peut parler alors de l'*ordre* d'un réseau; c'est le nombre p d'arêtes issues de chaque sommet (on voit que ce nombre est partout le même). Le nombre p est égal au nombre de traces de points singuliers.

M. Elfving donne le *théorème* suivant:

Soient p points a_1, a_2, \dots, a_p , une courbe L passant par ces points et un réseau R d'ordre p . Il existe une surface de Riemann dont les singularités ont pour traces les points a_i et qui a le réseau R .

Disons qu'on simplifie un réseau R , donné comme le fait M. Elfving, lorsqu'on considère comme identiques les arêtes qui ont mêmes extrémités, et qu'on le *complète* lorsqu'on opère en sens inverse.

On peut se demander si, un réseau R étant donné (au sens ordinaire du mot, sans que le nombre d'arêtes issues d'un sommet soit toujours le même), il est possible de le compléter en sorte qu'il devienne un réseau au sens de M. Elfving, avec un ordre fini p .

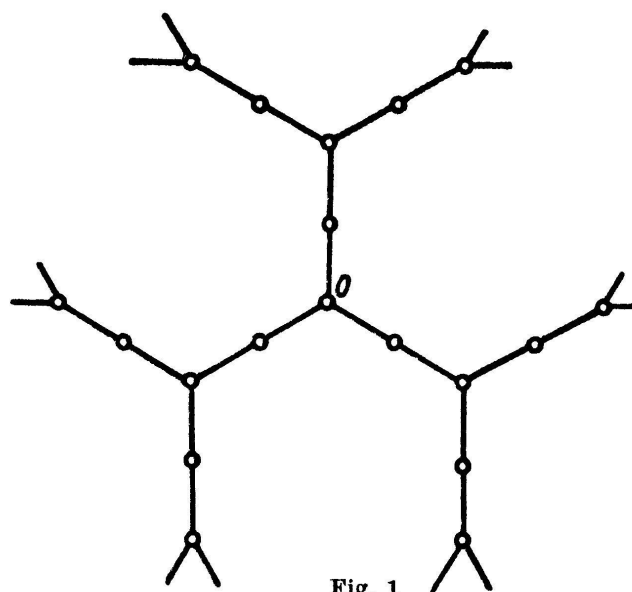


Fig. 1

⁹⁾ Ouvrage cité à la note ⁸⁾, p. 14 et 15.

Une première condition, nécessaire, est que le nombre d'arêtes issues d'un sommet soit toujours inférieur ou égal à p . *Cette condition n'est pas suffisante*; pour le montrer, considérons le réseau de la fig. 1.

Soit p le plus petit ordre possible. Nous disons que $p = \infty$. Prenons les trois arêtes issues de 0. Pour compléter le réseau, il faut adjoindre à chaque arête un certain nombre d'arêtes complémentaires. Il en faut au moins une pour chaque arête. En effet, si une arête restait inchangée, la suivante devrait se compléter de $(p-2)$ arêtes, d'où il résulte que le sommet suivant aurait $(p+1)$ arêtes. Donc il y a une arête adjointe au moins. Mais alors, supposons qu'il y en ait une exactement pour l'arête considérée plus haut; le sommet suivant aurait $(p+2)$ arêtes au moins; supposons enfin qu'il y ait q arêtes, alors le sommet suivant aurait au moins $(p+q)$ arêtes. On voit que p ne saurait être borné, d'où il résulte qu'il est impossible de faire de R un réseau au sens de M. Elfving, R ne peut pas correspondre à une surface ayant une base singulière finie. Nous verrons plus loin quelles surfaces on peut faire correspondre à ces réseaux.

Les réseaux nous renseignent sur l'ordre de connexion d'une surface de Riemann :

Si une surface de Riemann est multiplement connexe, il existe un polygone fermé du réseau qui sépare deux suites infinies de sommets, et réciproquement¹⁰⁾.

Faisons encore une remarque: les théorèmes que l'on énonce sur les réseaux utilisent uniquement les propriétés topologiques de ces réseaux¹¹⁾; mais il est clair que dans bien des démonstrations, on fera intervenir des propriétés métriques du réseau: on supposera fixées les courbes $I E$.

Division d'un réseau en générations: Prenons d'abord le cas d'un arbre. On choisit arbitrairement un sommet A de l'arbre, que l'on prend pour origine du système des générations. Il constitue la génération G_0 . La $n^{\text{ième}}$ génération G_n sera composée des sommets de l'arbre qu'on atteint de A par un polygone formé de n arêtes de l'arbre¹²⁾.

Dans le cas d'un réseau proprement dit, on choisit encore une origine A , qui forme G_0 . Puis on dit que le sommet B appartient à la $n^{\text{ième}}$ génération

¹⁰⁾ Ouvrage cité à la note ⁸⁾, p. 16.

¹¹⁾ Voir p. ex. *R. Nevanlinna*, Comm. Math. Helv., 5, 1932, p. 95.

¹²⁾ Il n'y a pas ambiguïté, puisque deux sommets ne peuvent être reliés que par un seul polygone, sans quoi on n'aurait pas un arbre.

G_n s'il existe un polygone de n côtés du réseau, reliant A à B , et aucun de moins de n côtés.

Si A correspond à un point I , tous les sommets du réseau qui correspondent à I appartiennent à des générations paires. Il en résulte que deux sommets consécutifs ne peuvent être de la même génération; de plus, ils appartiennent à deux générations consécutives. Soient en effet B et C deux sommets consécutifs, de générations m et n . Si $m \geq n + 3$ il existe un chemin qui relie A à B et qui est formé de $n + 1$ arêtes, donc de moins de m arêtes, ce qui est impossible. Donc on a $m = n \pm 1$.

CHAPITRE II

Les singularités des surfaces de Riemann simplement connexes

§ 4. Les résultats de M. Iversen

Après *Boutroux*, M. Iversen¹³⁾ a donné une classification des singularités des surfaces de Riemann simplement connexes. Nous allons la reprendre brièvement.

Dès le début, M. Iversen écarte le cas de l'accumulation de singularités transcendentes. Il considère des surfaces de Riemann correspondant à une fonction méromorphe $w = f(z)$, pour toute valeur finie de z . Il entoure d'un cercle C le point singulier ω de la fonction inverse $z = \varphi(w)$. Soit D le domaine correspondant de plan z . Voici la classification qu'il donne:

A. *Point directement critique* ω : C'est un point tel que $f(z) - \omega$ n'a aucune racine dans D , pour C assez petit;

1° de *première espèce* si $f'(z) \neq 0$ dans D ;

2° de *seconde espèce* si $f'(z)$ a une infinité de zéros dans D .

B. *Point indirectement critique* ω : c'est un point tel que C ne contient aucun rayon sur lequel $\varphi(w) \rightarrow \infty$ lorsque $w \rightarrow \omega$.

C. *Point directement et indirectement critique*: tout point singulier n'appartenant pas à une des catégories précédentes.

Dans chaque cas, M. Iversen étudie l'allure de $f(z)$ dans D et le prolongement de $\varphi(w)$ dans C ; il en donne des exemples très simples.

¹³⁾ Ouvrage cité à la note ⁵⁾.

§ 5. Singularités plus générales

M. Iversen a écarté de son étude les singularité dont le voisinage contient une infinité de singularités transcendantes. On pourrait alors distinguer, en dehors de sa classification :

1° les singularités dans le voisinage desquelles la surface possède une infinité de singularités transcendantes, mais aucune singularité algébrique ;

2° les singularités dont le voisinage contient une infinité de singularités, tant transcendantes qu'algébriques.

Nous donnerons un exemple de singularité dans les deux cas. Il s'agit de singularités directement critiques. Nous allons démontrer d'abord un lemme préliminaire.

Soit

$$f(z) = \int_0^z z \gamma_0(z) dz$$

où γ_0 est une fonction entière, périodique de période $2i\pi$. De plus on suppose que l'intégrale

$$\Gamma_1 = \int_0^\infty t \gamma_0(t) dt \quad t \text{ réel}$$

existe et est finie.

Posons

$$h_k = f(2ki\pi)$$

et

$$h_k^* = h_k + \int_0^\infty (t + 2ki\pi) \gamma_0(t + 2ki\pi) dt \quad t \text{ réel}$$

puis

$$\gamma_1(z) = \int_0^z \gamma_0(z) dz$$

et

$$\Gamma_0 = \int_0^\infty \gamma_0(t) dt$$

On suppose encore que

$$\int_0^{2i\pi} \gamma_0(z) dz = u \neq 0$$

On a, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} h_k &= 2i\pi u k^2 - \int_0^{2ki\pi} \gamma_1(z) dz \\ &= 2i\pi u k^2 - k \int_0^{2i\pi} \gamma_1(z) dz - 2i\pi u \frac{k(k-1)}{2} = ak^2 + bk \end{aligned}$$

avec $a \neq 0$.

Puis

$$\begin{aligned} h_k^* &= h_k + \Gamma_1 + 2ki\pi \Gamma_0 \\ &= ak^2 + b'k + c' ; \end{aligned}$$

il en résulte que l'on a

$$h_k \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad h_k^* \rightarrow \infty \quad (1)$$

si $k \rightarrow \infty$, et de plus, l'inégalité

$$|f(2ki\pi + x)| > K_1 \quad (2)$$

est vérifiée, quel que soit K_1 , pour tout x positif, et $k > k_0(K_1)$. Si on a d'autre part $|\gamma_0(z)| < K_2$ pour $\Re z < 0$, $\Im z = 2ki\pi$, il en résulte que, quel que soit $\eta > 0$, on aura

$$|f(2ki\pi - x) - f(2ki\pi)| < k^2 \eta (\eta + 2i\pi) K_2, \quad 0 < x < \eta k$$

donc pour η assez petit

$$|f(2ki\pi - x)| > a'k^2, \quad 0 < x < \eta k \quad (3)$$

Cela établi, passons aux exemples annoncés. Soit

$$w = f(z) = \int_0^z z e^{-e^z} dz$$

Si on pose $\gamma_0(z) = e^{-e^z}$, on reconnaît que toutes les conditions du lemme sont vérifiées. Donc si $\omega_k = h_k^*$, on voit que $f(z)$ a des valeurs asymptotiques ω_k avec

$$|\omega_k| \rightarrow \infty \quad \text{pour} \quad k \rightarrow \infty$$

D'autre part, lorsque $\Re z \rightarrow +\infty$ sur une droite

$$\Im z = (2k + 1)\pi \quad k \text{ entier}$$

on a $|f(z)| \rightarrow \infty$, ce qui donne les singularités $\omega_k^* = \infty$ de la fonction inverse $z(w)$.

Évaluons la fonction $f(z)$ dans l'angle

$$|\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2} - \eta.$$

Pour $\Re z < -k$, on a $|e^{-e^z} - 1| < \frac{1}{2}$
et

$$\begin{aligned} f(z) &= f(-k) + \int_{-k}^z z e^{-e^z} dz \\ &= f(-k) + \frac{z^2}{2} - \frac{k^2}{2} + \int_{-k}^z z(e^{-e^z} - 1) dz \end{aligned}$$

$$f(z) - \frac{z^2}{2} = f(-k) - \frac{k^2}{2} + \int_{-k}^z z(e^{-e^z} - 1) dz$$

donc

$$\left| f(z) - \frac{z^2}{2} \right| < |f(-k)| + \frac{k^2}{2} + \frac{|z^2|}{4}.$$

Ainsi, sur tout chemin de l'angle ci-dessus, tendant vers l'infini, on a $|f(z)| \rightarrow \infty$.

Soit W un chemin de détermination finie. Il coupe toute droite $\Im z = (2k + 1)\pi$ en un nombre fini de points. D'autre part, pour $|z|$ assez grand, il est extérieur à l'angle $|\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2} - \eta$. Il ne peut donc couper la droite $\Im z = 2k\pi$ qu'en un point tel que $\Re z > -k\eta'$; or le minimum de $|f(z)|$ sur ces droites tend vers l'infini, lorsque $k \rightarrow \infty$, cela en vertu de (2) et (3). Donc W ne peut pas couper toutes les droites $\Im z = 2k\pi$, il finit par rester dans une bande $(2k - 1)\pi < \Im z < (2k + 1)\pi$. S'il coupe indéfiniment la droite $\Im z = 2k\pi$, la valeur limite est ω_k .

Supposons qu'à la valeur limite de $f(z)$ sur W corresponde une singularité de $z(w)$ autre que les ω_k . Alors W est compris, d'après ce que nous venons de voir, dans une bande

$$2k\pi < \Im z < (2k + 1)\pi$$

ou dans une bande

$$(2k - 1)\pi < \Im z < 2k\pi$$

(ou du moins peut être déformé de façon que cela soit le cas, sans modifier la valeur limite).

Nous allons montrer qu'il ne peut exister un tel chemin W . Pour cela, on supposera W dans une bande

$$2k\pi < \Im z < (2k+1)\pi.$$

Si W est dans une bande $(2k-1)\pi < \Im z < 2k\pi$, la démonstration est la même.

Représentons la bande $2k\pi < \Im z < (2k+1)\pi$, $\Re z > 0$, sur le domaine $|\zeta| > 1$, $\Im \zeta > 0$, au moyen de la fonction

$$\zeta = e^z$$

et soit

$$g(\zeta) = f(\log \zeta)$$

Pour $\Re z$ assez grand

$$|f(z)| < e^{e^{\Re z} + \varepsilon}$$

donc

$$|g(\zeta)| < e^{|\zeta| + \varepsilon}$$

D'autre part, sur toute demi-droite

$$\arg \zeta = \varphi \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$$

on a

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} g(\zeta) = \omega_k$$

Soit W^* l'image de W dans le plan ζ : W^* ne peut couper aucune demi-droite

$$\arg \zeta = \varphi \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \delta, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

il est donc compris dans l'angle $\frac{\pi}{2} - \delta < \arg \zeta < \pi$. Sur W^* et sur la demi-droite $\arg \zeta = \frac{\pi}{2} - \delta$, $g(\zeta)$ est borné ; les deux chemins sont compris dans un angle d'ouverture $\alpha < \frac{\pi}{2} + 2\delta$, et on a dans cet angle

$$|g(\zeta)| < e^{|\zeta| + \varepsilon}.$$

Il en résulte que $|g(\zeta)|$ est borné dans l'angle formé par W^* et la demi-droite $\arg \zeta = \frac{\pi}{2} - \delta$ ¹⁴⁾. Donc la limite de $g(\zeta)$ sur W^* est la même que sur $\arg \zeta = \frac{\pi}{2} - \delta$: c'est ω_k .

Ainsi, il ne peut exister aucune autre singularité transcendante que

¹⁴⁾ Voir *Julia*, Principes géométriques d'Analyse II, p. 9 et suiv.

celles que nous avons étudiées. D'autre part, il n'y a qu'une singularité algébrique, qui correspond à $z = 0$.

Donc dans le demi-plan $\Im z > K_3$, tout chemin de détermination donne une valeur asymptotique de module supérieur à A . Soit Δ la partie de la surface de Riemann qui correspond au demi-plan $\Im z > K_3$; Δ ne contient que des singularités extérieures au cercle $|w| = A$. Soit γ un chemin de Δ dont les extrémités sont sur le cercle $|w| = A$, et sur lequel on a constamment $|w| < A$. Il peut, par une déformation continue sur Δ et intérieure à $|w| < A$ être amené à coïncider avec un arc du cercle $|w| = A$, puisque $|w| < A$ ne contient aucune singularité. Donc tout chemin reliant deux singularités de Δ peut être déformé sur la surface en un chemin pour lequel $|w| \geq A$; la portion définie par $|w| \geq A$ et qui contient Δ contient ainsi toutes les singularités de Δ ; elle en contient donc une infinité. Le point à l'infini est le seul point d'accumulation des traces de ces singularités, il est donc une singularité non isolée de $z(w)$, et le voisinage de l'infini ne contient aucune singularité algébrique, puisque $f'(z)$ n'a qu'un zéro (pour $z = 0$).

Il est aisé de donner un exemple où l'on a dans le voisinage de la singularité étudiée des singularités transcendantes et algébriques.

Soit

$$w = f(z) = \int_0^z z(e^z - 1)e^{-e^z} dz .$$

Là encore, les résultats du lemme peuvent s'appliquer, avec $\gamma_0 = (e^z - 1)e^{-e^z}$. Mais la fonction inverse $z(w)$ possède des singularités algébriques qui correspondent aux valeurs de z qui annulent $e^z - 1$, c'est-à-dire pour $z = 2ki\pi$; les singularités algébriques sont donc justement les quantités h_k étudiées dans le lemme, et on a $h_k \rightarrow \infty$. Pour le reste, tous les résultats concernant l'exemple précédent restent vrais. Comme plus haut, on montre que $f(z)$ ne possède pas d'autres valeurs asymptotiques finies que celles qui ont été étudiées. Cette fonction nous fournit donc l'exemple cherché.

CHAPITRE III

Les réseaux topologiques des surfaces de Riemann les plus générales

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étendre la représentation des surfaces par les réseaux aux surfaces les plus générales et en particulier aux surfaces dont les singularités sont isolées mais la base singulière infinie. Nous verrons ensuite les relations qui existent entre deux réseaux d'une même surface, puis nous résoudrons le problème de l'existence d'une surface de réseau donné.

§ 6. Première généralisation des réseaux

Soit F une surface de Riemann dont les singularités sont isolées, la distance sphérique de deux singularités (mesurée sur la surface) étant toujours supérieure à $\delta (> 0)$.

Effectuons un pavage $\frac{\delta}{3}$ de la sphère de Riemann. Soient D_1, D_2, \dots, D_p les pavés. Supposons pour commencer qu'aucune trace de singularité ne se trouve sur la frontière d'un pavé. Soit Δ une portion de F , définie par le pavé D_k . Δ contient au plus une singularité; supposons en effet qu'il en contienne deux au moins; on pourrait les relier par un chemin de longueur inférieure à $\frac{\delta}{3}$, ce qui est impossible en vertu de la définition de F . Il y a donc une singularité au plus dans Δ .

Considérons un point a_k dans chaque D_k ; on a ainsi p points, nous les relierons par une courbe fermée sans points doubles C , et nous construisons le réseau de F comme celui d'une surface F^* dont les singularités seraient les points a_k ; la surface F^* résulte d'une déformation de F , déformation qu'on peut considérer comme légère en regard de la distance de deux singularités.

Considérons maintenant le cas où des singularités ont pour trace des points frontières d'un D_k . Soit par exemple a une singularité dont la trace se trouve sur la frontière de D_i, D_j et D_k (en vertu des hypothèses faites plus haut sur le pavage, un point ne peut pas être sur la frontière de quatre pavés). Je dis que toute portion de F définie par $D = D_i + D_j + D_k$ ne contient qu'une singularité au plus. En effet, s'il y avait deux singularités, on pourrait les relier au moyen d'un chemin de longueur inférieure à δ . On retombe sur la démonstration donnée plus haut. Pour construire le réseau, on considère la singularité a comme appartenant à une des portions définies par D_i, D_j, D_k .

§ 7. Comparaison des différents réseaux topologiques d'une même surface de Riemann

Supposons pour commencer que nous avons une surface de Riemann F de base singulière finie; la méthode de M. Speiser s'applique sans autre.

Soient a_1, a_2, \dots, a_p les points constituant la base singulière, et soient L et L^* deux courbes de Jordan passant chacune par tous les points a_i . On obtient à partir de L et de L^* deux réseaux R et R^* .

Disons que L^* se déduit de L par une déformation continue si cette déformation est possible sans passer sur un point a_k .

Théorème 1 : Si L^ se déduit de L par une déformation continue,*

$$R^* = R.$$

La démonstration est immédiate, de même que celle du théorème réciproque :

Théorème 2 : Si $R^ = R$, L^* se déduit de L par une déformation continue.*

Cela revient à dire que le réseau ne dépend pas de la courbe elle-même, mais de l'ordre des points a_k sur la courbe et des lacets qu'elle fait pour les relier.

Théorème 3 : p étant fixé, le nombre de contours essentiellement différents (c'est-à-dire donnant des réseaux différents) est illimité, dès que $p \geq 4$.

On voit que si $p = 3$ il n'y a que deux contours différents, l'un résulte de l'autre par l'échange de l'intérieur avec l'extérieur.

Pour $p = 4$, il y a plusieurs arrangements possibles, et différents, des a_i ; prenons les a_i dans l'ordre a_1, a_2, a_3, a_4 et construisons L de la façon suivante: on part de a_1 , on fait une boucle B_1 autour de a_2 avant d'aller tourner autour de a_3 et a_4 , puis on vient faire une seconde boucle B_2 autour de a_2 , et ainsi de suite; on peut faire un nombre de boucles arbitrairement grand avant de passer en a_2 . Pour $p = 4$ le nombre des contours est donc illimité. Il l'est à plus forte raison pour $p > 4$.

Le théorème est démontré.

Comparons deux réseaux différents R et R^* d'une même surface de Riemann, donnés par deux contours L et L^* ; on peut choisir les deux points I et E communs aux deux contours. Or chaque point de F , de trace I ou E , donne un sommet du réseau; nous avons donc une correspondance biunivoque entre les sommets des deux réseaux: deux sommets se correspondent s'ils sont donnés par le même point de F . De même, à chaque singularité de F correspond un domaine polygonal D de R et un domaine D^* de R^* . Il y a donc correspondance biunivoque entre les domaines de R et de R^* ; de plus, deux domaines correspondants ont le même nombre de côtés.

Théorème 4 : Soient a et b deux sommets d'un réseau R , extrémités d'une même arête. Soient a^ et b^* les sommets correspondants de R^* . On peut relier a^* et b^* par un polygone de R^* , de ϱ côtés avec*

$$\varrho \leq R(L, L^*) + 1$$

$R(L, L^)$ étant un nombre qui ne dépend que de la surface et du choix de L et L^* , et non pas de a et b .*

Remarquons en passant que ϱ est certainement impair, puisque le polygone en question relie un point I à un point E .

Considérons le chemin W sur F correspondant au segment ab de R ; W coupe L une fois (puisque a et b sont extrémités d'une même arête). Par contre W coupe L^* peut-être plusieurs fois, mais le nombre de points d'intersection est le même pour chaque rayon IE . Il y a un nombre fini $P = \frac{1}{2}p(p-1)$ de rayons IE , donc le nombre des points d'intersection est borné pour L et L^* donnés. Soit $R(L, L^*) + 1$ la borne supérieure. On a bien

$$\varrho \leq R(L, L^*) + 1.$$

On a un théorème analogue pour les domaines élémentaires :

Théorème 5 : Soit a un sommet de R , D un domaine élémentaire de R , dont le contour comprend a ; a^ et D^* sont le sommet et le domaine correspondants de R^* . Il existe un polygone reliant a^* à D^* , dont le nombre de côtés est inférieur ou égal à $R(L, L^*)$.*

Soit, pour fixer les idées, I le point auquel correspond a , a_i la singularité contenue dans D . Le rayon Ia_i coupe L^* au plus $R(L, L^*)$ fois (R a la même définition que dans le théorème précédent). Il en résulte que dans R^* , le rayon Ia_i se décompose en $t \leq R(L, L^*)$ arêtes, ce qui démontre le théorème.

On déduit encore du théorème 4 le

Théorème 6 : Soient R et R^ deux réseaux d'une même surface, D_1 et D_2 deux domaines élémentaires de R , dont les frontières ont $\nu > 2R(L, L^*)$ sommets communs consécutifs. Alors les domaines D_1^* et D_2^* de R^* , correspondant à D_1 et D_2 , ont au moins $\nu - 2R(L, L^*)$ sommets communs.*

Considérons, dans la suite des sommets communs à D_1 et D_2 , ceux qui sont à une distance supérieure ou égale à $R(L, L^*)$ des extrémités (il y en a au moins un, par l'hypothèse sur ν). Soit a un de ces sommets, a^* son correspondant. a^* est un sommet de D_1^* et de D_2^* . Reprenons, pour le montrer, le raisonnement fait dans la démonstration du théorème précédent. Soient a_i et a_j les singularités correspondant aux domaines D_1 et D_2 (donc aussi D_1^* et D_2^*). Le rayon Ia_i (on suppose, pour fixer les idées, que a est un point I) coupe L^* au plus $R(L, L^*)$ fois; cela correspond donc à $R(L, L^*)$ lacets autour des points singuliers a_i et a_j . Mais, après ces $R(L, L^*)$ lacets, on a encore des sommets de D_1^* et D_2^* . Donc a^* est un

sommet de D_1^* et D_2^* . Cela se produit pour tout sommet choisi comme il a été dit, donc pour $\nu - 2R(L, L^*)$ sommets.

Le théorème est démontré. On en déduit immédiatement

Théorème 7: Soient D_1 et D_2 deux domaines élémentaires infinis ayant un sommet commun pour toutes les générations G_n , $n > n_0$. Alors les domaines D_1^ et D_2^* correspondants ont un sommet commun pour toute génération G_n , $n > n_0^*$.*

Le théorème 6 affirme simplement que, dans ce cas, à chaque sommet commun d'une génération G_n , avec $n > n_0 + R(L, L^*)$ correspond un sommet commun à D_1^* et D_2^* , appartenant à la génération G_μ , avec $\mu = \nu(n)$. Posons

$$n'_0 = \min (\nu(n) + R(L, L^*))$$

pour

$$n > n_0 + R(L, L^*)$$

Il faut montrer que, pour $\nu > n'_0$, il y a toujours un sommet commun à D_1^* et D_2^* . Supposons que ce ne soit pas le cas. Il y aurait, entre D_1^* et D_2^* un domaine élémentaire D_3^* , dont le correspondant serait D_3 . Soit b un sommet frontière de D_1^* , D_2^* , D_3^* , a_k la singularité de D_3 (ou D_3^*). Nous considérons encore le chemin Ia_k relatif à L^* ; il coupe L en $R(L, L^*)$ points au plus, d'où il résulte que D_3 aurait un sommet commun avec D_1 et D_2 , à la génération G_μ , $\mu > \nu_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse du théorème.

On peut dire encore quelque chose de la correspondance entre R et R^* .

Soient D_1, D_2, \dots, D_n , des domaines élémentaires de R , $D_1^*, D_2^*, \dots, D_n^*$, les domaines correspondants de R^* . Choisissons une origine 0 dans R , et relierons 0 à D_1, \dots, D_n par n polygones du réseau. On peut choisir ces polygones sans côtés communs, si ce n'est un certain nombre d'entre eux formant un polygone aboutissant à l'origine. De plus ces polygones n'ont pas de sommets communs isolés, si ce n'est l'origine. On peut numéroter ces chemins, et nous supposons que les indices ont été choisis en sorte que les indices des chemins sont ceux des D_k . Alors

Théorème 8: Les D_k^ peuvent être reliés à l'origine 0^* de R^* par des polygones ne se coupant pas, et placés dans l'ordre naturel des indices du D_k^* correspondant.*

La démonstration est immédiate; il suffit de se reporter aux chemins correspondants sur la surface de Riemann elle-même.

On pourrait encore préciser les énoncés des théorèmes 4 à 7 en faisant intervenir pour chaque chemin IE le nombre de points d'intersection avec L^* . On aurait ainsi p valeurs $R_1(L, L^*), R_2(L, L^*), \dots, R_p(L, L^*)$, avec

$$R_k(L, L^*) \leq R(L, L^*)$$

$R_k(L, L^*)$ étant le nombre de points d'intersection, moins un, de L^* et d'un chemin IE coupant L en un point de l'arc a_k, a_{k+1} .

Pour un choix convenable de I et E , on a, pour un indice k au moins

$$R_k(L, L^*) = 0$$

Il est clair, d'autre part, que

$$R_i(L, L^*) \equiv 0 \pmod{2}$$

puisque L^* est une courbe de Jordan, et que $R_i(L, L^*)$ est le nombre de points d'intersection, moins un, de L^* et d'un contour qui va de l'intérieur à l'extérieur.

Théorème 9: Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, une suite de nombres positifs ou nuls, tous pairs; L un contour simple passant par les points a_1, a_2, \dots, a_p dans l'ordre naturel des indices; de plus $\lambda_1 = 0$. Il y a une courbe L^ pour laquelle*

$$R_i(L, L^*) = \lambda_i.$$

On démontre ce théorème en construisant L^* .

Posons pour commencer

$$\begin{aligned} \lambda'_k &= 2 & \text{si} & \lambda_k \geq 2 \\ \lambda'_k &= 0 & \text{si} & \lambda_k = 0 \end{aligned}$$

et construisons le contour L' qui correspond à ce système $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_p$. Considérons le cercle $|w| = 1$ et les points a_k sur ce cercle avec

$$\arg a_k = k \frac{2\pi}{p}$$

Le cercle $|w| = 1$ constitue L ; on trace deux arcs de cercle concentriques, l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de $|w| = 1$, le long de tout arc

(a_k, a_{k+1}) avec $\lambda'_k = 2$. Soit a_k le point qui correspond à l'extrémité d'un de ces arcs. On distingue deux cas :

$$1^\circ \quad \lambda'_{k-1} = 0 \quad \lambda'_k = 2 \quad ;$$

alors on relie l'arc (a_{k-1}, a_k) de $|w| = 1$ à l'arc intérieur de (a_k, a_{k+1}) , et, par a_k , l'arc extérieur et l'arc de $|w| = 1$ restant.

2° $\lambda'_{k-1} = 2, \lambda'_k = 0$. On relie l'arc extérieur de (a_{k-1}, a_k) à l'arc $|w| = 1$ de (a_k, a_{k+1}) , puis les deux arcs restants par a_k .

La courbe obtenue est simple et passe par chaque point a_k . En effet, elle ne peut pas se fermer le long d'un arc (a_k, a_{k+l}) ; elle ne revient en arrière que sur un arc du cercle $|w| = 1$, et ensuite se raccorde à un arc extérieur, ce qui exclut une fermeture de L' autrement que par un tour complet. D'autre part, on a bien

$$R_i(L, L') = \lambda'_i.$$

On construit ensuite une courbe L'' pour laquelle

$$\begin{aligned} \lambda''_i &= \lambda_i & \text{si } \lambda_i \leq 4 \\ \lambda''_i &= 4 & \text{si } \lambda_i > 4 \end{aligned}$$

On construit de nouveaux arcs concentriques là où $\lambda_i \geq 4$, et on les relie comme précédemment, c'est-à-dire :

1° si $\lambda''_{k-1} < \lambda''_k$, on relie l'arc de $|w| = 1$ entre a_k et a_{k+1} au premier arc extérieur de (a_k, a_{k+1}) , puis les autres arcs de façon à ne laisser aucune impasse;

2° si $\lambda''_{k-1} > \lambda''_k$, on relie l'arc (a_{k-1}, a_k) de $|w| = 1$ au premier arc intérieur de (a_{k-1}, a_k) , et ainsi de suite.

On passe ensuite à L''' , etc., jusqu'à ce qu'on ait atteint le maximum de λ_k (qui est fini). La courbe obtenue est L^* . En effet :

1° elle est d'un seul tenant (pour la même raison que L');

2° on a bien $\lambda_k = R(L, L^*)$.

Donnons un exemple: soit $p = 12$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = 6$, $\lambda_5 = 2$, $\lambda_6 = 0$, $\lambda_7 = 2$, $\lambda_8 = 2$, $\lambda_9 = 2$, $\lambda_{10} = 4$, $\lambda_{11} = 2$, $\lambda_{12} = 2$.

Dans la construction, on pourrait remplacer intérieur par extérieur, et vice-versa, partout ou en partie seulement. On voit par là qu'à un système de λ_k peuvent correspondre plusieurs courbes L^* .

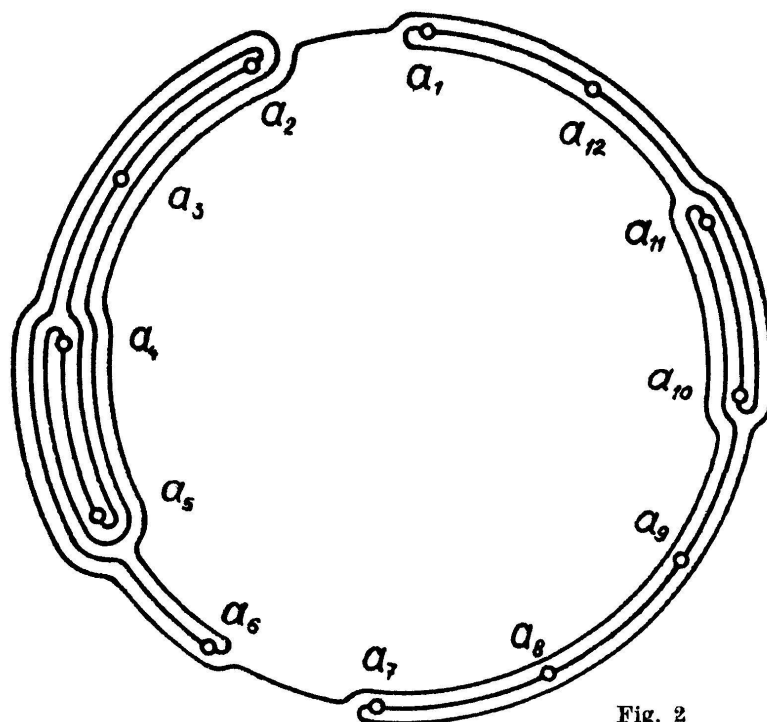


Fig. 2

Remarquons encore que ce théorème montre bien qu'il y a une infinité de courbes L passant par p ($p > 3$) points, donc une infinité de réseaux pour une même surface; ces quelques résultats révèlent la complexité du problème suivant: *deux réseaux R et R^* étant donnés, reconnaître s'ils peuvent provenir de la même surface de Riemann.* Nous avons donné quelques conditions nécessaires sans parvenir à fournir un critère général.

§ 8. Comparaison des différents réseaux topologiques d'une même surface de Riemann (suite)

Considérons une surface de Riemann F pour laquelle on peut construire un réseau topologique au sens du § 6, c'est-à-dire une surface de Riemann dont toutes les singularités peuvent être isolées au moyen d'un pavage δ ($\delta > 0$).

Le pavage δ choisi était arbitraire; un pavage tout à fait différent changerait considérablement l'allure du réseau, aussi nous bornerons-nous à une modification particulière: celle qui consiste à remplacer le pavage δ par un pavage plus fin, c'est-à-dire tel que chaque nouveau pavé soit intérieur à un ancien pavé; de plus, la nouvelle courbe L passe successivement en tous les points correspondant à un pavé du pavage primitif. Nous dirons alors qu'on a *divisé* le pavage primitif.

Théorème 10 : La division du pavage δ ne modifie pas le réseau de F .

Il s'agit du réseau au sens large, et non pas du réseau plus précis de M. Elfving.

La surface F a une singularité au plus dans une portion définie par un pavé du pavage δ ; tout circuit dans ce pavé est équivalent à un lacet autour du point de ce pavé; donc les domaines fondamentaux des deux réseaux sont les mêmes, ils s'ajustent de la même manière, donc les deux réseaux sont identiques.

En terminant, énonçons un théorème qui se déduit immédiatement de celui qu'a énoncé à ce sujet M. Elfving, dans le cas d'une surface à base singulière finie.

Théorème 11 : Soit F une surface de Riemann multiplément connexe, R son réseau au sens du § 6. Il existe un polygone fermé de R qui sépare deux suites infinies de sommets de R .

La méthode du § 6 revient à faire une transformation topologique de F , pour l'amener à avoir une base singulière finie. Cette transformation conserve l'ordre de connexion, d'où notre théorème.

§ 9. Réseau topologique d'une surface de Riemann quelconque

Soit F une surface de Riemann. On appellera F_δ l'ensemble des points de F qu'on peut atteindre d'un point a_0 de F par un chemin tel que la somme des distances d'un point quelconque de ce chemin à deux singularités quelconques de F (algébriques ou transcendentes) soit toujours supérieur à δ ($\delta > 0$). Un tel chemin sera appelé chemin de largeur δ .

On choisit δ assez petit pour que la distance de a_0 à deux singularités de F soit supérieure à δ .

Théorème 12 : On a
$$F = \lim_{\delta \rightarrow 0} F_\delta$$

Cela revient à dire que :

1° tout point a de F peut être relié à a_0 au moyen d'un chemin de largeur δ , pour δ assez petit;

2° si ω est une singularité de F , L un chemin tendant vers ω , L_δ la partie de L intérieure à F_δ , tout point de L finit par être intérieur à L_δ , lorsque $\delta \rightarrow 0$.

Sous cette forme, le théorème est évident.

On dira qu'une singularité ω de F est intérieure à F_δ lorsqu'il existe un chemin aboutissant à ω et intérieur à F_δ . Il en résulte que les singularités de F_δ sont à des distances mutuelles supérieures à δ . On peut donc représenter F_δ au moyen d'un réseau topologique au sens du § 6; on passe ensuite à $F_{\frac{\delta}{2}}$; pour construire le réseau de $F_{\frac{\delta}{2}}$, on reprend le pavage

de F_δ et on le divise pour avoir un pavage assez fin. D'après le théorème 10, le réseau R_0 de F_δ se trouve conservé à l'intérieur du réseau R_1 de $F_{\frac{\delta}{2}}$. De même le réseau R_n de $F_{\frac{\delta}{2^n}}$ est conservé à l'intérieur du réseau de $F_{\frac{\delta}{2^{n+1}}}$.

Ces réseaux ne se modifient donc que par l'adjonction de nouvelles arêtes.

En général, les réseaux R_n n'ont pas de limite, c'est-à-dire qu'il n'existe pas un réseau R dont les ν premières générations sont identiques aux ν premières générations de R_n , pour $n > n_0(\nu)$.

On peut cependant énoncer ce résultat :

Théorème 13 : Si toutes les singularités de F sont isolées, les R_n ont une limite dans ce sens que pour $n > n_0(\nu)$ les ν premières générations des R_n sont identiques.

Supposons en effet que ce ne soit pas le cas : il existe alors une génération, la ν ème par exemple, qui s'enrichit indéfiniment ; le nombre des sommets de cette génération est illimité ; en d'autres termes, il existe un sommet S d'une des générations G_0, \dots, G_ν auquel se rattachent des arêtes en nombre indéfiniment croissant ; il y a donc une infinité de domaines D qui ont ce point pour sommet. Soit une suite de pavés P_1, \dots, P_n, \dots emboîtés les uns dans les autres, et $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$ une suite de portions définies respectivement par P_1, \dots, P_n, \dots , emboîtées les unes dans les autres et contenant des singularités des domaines D . Soit ω le point limite des P_n . ω est une singularité non isolée. En effet, chaque Δ_n contient une infinité de singularités ; de plus, un cercle de centre ω et de rayon ρ , contient P_n tout entier pour n assez grand ; une portion circulaire de centre ω et de rayon arbitrairement petit contient une infinité de singularités. Le théorème est ainsi démontré.

§ 10. Existence d'une surface de réseau donné

Pour que le problème de l'existence d'une surface correspondant à un réseau donné ait une solution, il faut évidemment supposer que le réseau n'a pas d'impasses et que tous les circuits ont un nombre pair de côtés.

Si l'on fait l'hypothèse qu'à chaque sommet se rattachent p arêtes, la question est résolue par un théorème de M. Elfving¹⁵⁾.

¹⁵⁾ Voir l'ouvrage cité à la note ⁸⁾.

Dans le cas général, on a le

Théorème 14: Soit R un réseau sans impasses, dont tous les circuits ont un nombre pair de côtés. Il existe une surface de Riemann qui admet, au sens du § 9, le réseau R .

Supposons pour commencer que R soit un arbre. Choisissons une origine A_0 . On décompose ainsi R en générations G_0, G_1, \dots . Soit p_0 le nombre d'arêtes issues de A_0 ; le domaine fondamental de A_0 correspond à l'intérieur du cercle $|w| < 1$; les singularités a_1, \dots, a_{p_0} contenues dans les domaines élémentaires qui ont A_0 pour sommet sont des points du cercle $|w| = 1$, avec $\arg a_k = \frac{2k\pi}{p_0}$.

Prenons un sommet A_1 de G_1 , celui par exemple qui se trouve entre les domaines de a_1 et de a_2 , et soit p_1 le nombre d'arêtes issues de A_1 . On prend pour domaine fondamental de A_1 l'extérieur du cercle, soit $|w| > 1$; les singularités sont a_1, a_2 et $p_1 - 2$ autres singularités choisies sur celui des deux arcs (a_1, a_2) du cercle $|w| = 1$ qui contient les singularités de A_0 . On prend les $p_1 - 2$ points qui divisent cet arc en $p_1 - 1$ arcs égaux.

On procède ainsi pour chaque sommet de G_1 , puis de G_2 , etc., en prenant toujours les nouvelles singularités sur l'arc qui contient les singularités du sommet précédent.

La surface qu'on obtient ainsi peut avoir des singularités non isolées: on voit par exemple que c'est le cas de la surface qui correspond à l'arbre de la fig. 1.

Cas d'un réseau en général. On peut, en laissant de côté certaines arêtes d'un réseau, le transformer en un arbre. Soit donc un réseau R , et R^* l'arbre obtenu en supprimant certaines arêtes, mais tel que deux domaines logarithmiques quelconques de R soient dans deux domaines différents de R^* . On construit comme plus haut une surface dont le réseau est R^* . Soit Δ un domaine élémentaire de R^* , dont la singularité est a , et soit D_1 un domaine élémentaire algébrique de R , contenu dans Δ et ayant sur la frontière de Δ les arêtes S_0, S_1, \dots, S_p . La frontière de Δ se compose de segments S_0, S_1, S_{-1}, S_2 , etc., qui correspondent à des demi-droites

$$\arg w = \varphi_k$$

On pose

$$\mu = \min |\varphi_k - \arg a| \quad \text{pour } 0 \leq k \leq p.$$

On reporte sur $|w| = 1$, à partir de a , sur l'arc qui relie a à $e^{i\varphi_0}$, et qui

ne contient pas $e^{i\varphi-1}$ un arc de longueur μ , d'extrémité P , et on divise cet arc aP en trois parties aM , MN , NP . On prend $a_1 = N$ pour singularité de D_1 et aux segments de la frontière de D_1 qui ne sont pas des S_k on fait correspondre alternativement les demi-droites $\arg w = \arg M$ et $\arg w = \varphi_0$, sauf pour le dernier, qu'on choisit dans l'angle déterminé par les demi-droites $\arg w = \arg a$ et $\arg w = \arg a_1$ qui ne contient pas la demi-droite $\arg w = \arg M$.

On a ainsi divisé le domaine Δ en deux parties: un domaine D_1 de R et un nouveau domaine Δ_1 , indéfini. On recommence pour Δ_1 ce qu'on a fait pour Δ ; puis on procède de la même manière pour tous les domaines de R^* . On obtient ainsi une surface F qui remplit bien les conditions requises.

(A suivre)

(Reçu le 16 février 1937.)