Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 9 (1936-1937)

Artikel: Über eine Klasse algebraischer Gebilde (Freigebilde).

Autor: Finsler, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10180

Über eine Klasse algebraischer Gebilde (Freigebilde)

Von Paul Finsler, Zürich

Im folgenden soll eine Klasse von algebraischen Gebilden untersucht werden, die ich *Freigebilde* nennen möchte. Sie liegen im komplexen n-dimensionalen projektiven Raum L_n (oder speziell im dreidimensionalen Raum L_3) und können reduzibel sein, also auch Teile verschiedener Ordnung und Dimension enthalten. Eine „Mehrfachzählung" von Punkten oder Gebilden wird nicht eingeführt; die benötigten Grundlagen habe ich in einer früheren Arbeit[1]) zusammengestellt.

In § 1 werden zunächst einige allgemeine Sätze über Freigebilde im L_n abgeleitet und einfache Konstruktionen angegeben, die gestatten, aus gegebenen Freigebilden neue herzustellen. Nachher beschränken wir uns auf den dreidimensionalen Raum L_3. Es werden alle im L_3 möglichen Freigebilde aufgezählt und weitere Sätze aufgestellt; es ergibt sich insbesondere im reellen Gebiet ein wichtiger Zusammenhang zwischen Freigebilden und Gebilden zweiten Grades. Eine Anwendung findet sich in einer folgenden Arbeit[2]); für weitere Anwendungen[3]) ist die Ausdehnung der Ergebnisse auf mehr Dimensionen notwendig, die ich mir noch vorbehalten muß.

§ 1. Definition und einfache Sätze

Wir gehen von folgender Definition aus:

Ein algebraisches Gebilde heißt Freigebilde, wenn es keinen linearen Raum gibt, der das Gebilde in einem System von endlich vielen, linear abhängigen Punkten trifft.

Ein Freigebilde wird also von einem beliebigen linearen Raum stets entweder in unendlich vielen Punkten getroffen, d. h. in ganzen Kurven oder Flächen, oder nur in endlich vielen Punkten, dann aber nur in linear unabhängigen.

---

[1]) Über algebraische Gebilde, Math. Annalen 101 (1929), S. 284; im folgenden als „A. G." zitiert.

[2]) Über das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen, Comm. Math. Helv., dieser Band, S. 188.

[3]) Vgl. Fußnote [1]) von A. G., S. 284.

Es folgen sofort die Sätze:

Satz 1. *Ein Freigebilde wird von einem linearen Raum stets in einem Freigebilde geschnitten.*

Denn der Schnitt von zwei linearen Räumen ist wieder ein linearer Raum.

Satz 2. *Ein Punktsystem ist dann und nur dann ein Freigebilde, wenn die Punkte linear unabhängig sind.*

Denn der Raum L_n kann selbst als Schnittraum genommen werden.

Die Sätze 1 und 2 können zusammen auch als Definition der Freigebilde verwendet werden; es gilt:

Satz 3. *Ein algebraisches Gebilde ist Freigebilde, wenn es als Punktsystem nur aus linear unabhängigen Punkten besteht, und wenn sonst der Schnitt mit jeder Hyperebene selbst ein Freigebilde ist.*

Ein beliebiger Schnittraum $L_\alpha \neq L_n$ kann ja als Schnitt von Hyperebenen L_{n-1} dargestellt werden.

Satz 4. *Liegt ein Freigebilde des L_n ganz in einem linearen Raum L_ν, so ist es auch Freigebilde des L_ν.*

Satz 5. *Ist ein Punktsystem Teil*[4]*) eines Freigebildes, so kann der Verbindungsraum*[5]*) des Punktsystems das Freigebilde sonst nicht treffen, und die Punkte sind folglich linear unabhängig.*

Wenn dies nämlich für die Punkte $P_0, \ldots, P_{\alpha-1}$ gilt, und P_α ist ein weiterer einzelner Punkt (also Teil) des Freigebildes, so könnte der Verbindungsraum $[P_0, \ldots, P_\alpha]$ den Rest des Gebildes höchstens in endlich vielen Punkten treffen[6]). Diese wären dann aber von $P_0, \ldots, P_\alpha$ abhängig, was unmöglich ist.

In der Definition der Freigebilde kann man also auch verlangen, daß der Schnitt mit einem linearen Raum nie ein System von linear abhängigen Punkten als Teil enthalten soll.

Satz 6. *Zerfällt ein Freigebilde in getrennte*[7]*) Teile, so sind diese Teile für sich wieder Freigebilde.*

---

[4]) A. G. § 1, S. 286.

[5]) oder zugehörige Raum, A. G. § 3. Der zum Gebilde A gehörige Raum werde mit $[A]$ bezeichnet.

[6]) A. G. § 3, S. 288.

[7]) d. h. Teile ohne gemeinsamen Punkt, A. G. § 1. Ein Gebilde, das nicht in getrennte Teile zerfällt, heißt zusammenhängend.

Würde nämlich ein solcher Teil von einem Raum L_α in abhängigen Punkten getroffen, so würde auch der Schnitt des ganzen Gebildes mit L_α ein System von abhängigen Punkten als Teil enthalten, entgegen Satz 1 und Satz 5.

Dagegen brauchen *irgendwelche* Teile eines Freigebildes *nicht wieder* Freigebilde zu sein. Wird z. B. im L_4 eine Gerade a in drei Punkten von den Geraden f, g, h getroffen, von denen keine im Verbindungsraum der übrigen liegt, so ist das Ganze ein Freigebilde (vgl. den Zusatz zu Satz 8). Der aus f, g, h bestehende Teil ist jedoch kein Freigebilde, denn er wird von einem linearen Raum, nämlich a, in linear abhängigen Punkten getroffen.

Im L_6 kann man Freigebilde finden, die sich als Vereinigung von zwei Nichtfreigebilden darstellen lassen. Man braucht nur im vorigen Beispiel durch zwei weitere Punkte von f noch zwei Geraden b und c zu legen, welche die fünfte und sechste Dimension bestimmen. Dann sind die Teile (a, b, c) und (f, g, h) keine Freigebilde, wohl aber ihre Vereinigung.

Auch ein zusammenhängender Teil eines Freigebildes braucht nicht Freigebilde zu sein. Dies erkennt man, wenn man die Geraden der letzten Beispiele von einem Punkt P aus projiziert, der nicht in ihrem Verbindungsraum enthalten ist (vgl. Satz 9).

Satz 6 läßt sich in folgender Weise umkehren:

Satz 7. *Zwei Freigebilde ergeben zusammen wieder ein Freigebilde, wenn sich die zugehörigen Räume nicht treffen.*

Sind nämlich A und B Freigebilde, die in getrennten Räumen liegen, so kann $A + B$ von keinem L_ν in abhängigen Punkten getroffen werden, denn der Schnitt mit A und mit B kann nur unabhängige Punkte ergeben, und da diese in getrennten Räumen liegen, so sind sie auch zusammengenommen unabhängig.

Allgemeiner gilt noch der folgende Satz:

Satz 8. *Zwei Freigebilde A und B ergeben zusammen wieder ein Freigebilde, wenn der Schnitt der zugehörigen Räume in A und in B enthalten ist.*

Die zu A bezw. B gehörigen Räume seien $L_\alpha = [A]$ und $L_\beta = [B]$, ihr Schnitt sei $L_\sigma = L_\alpha L_\beta$. Wenn L_σ in A und in B enthalten ist, so ist auch $AB = L_\sigma$. Ein Raum L_ν treffe die Vereinigung von A und B in $\alpha' + \beta' + \sigma'$ Punkten, und zwar A in $\alpha' + \sigma'$, B in $\beta' + \sigma'$ unabhängigen. Die σ' gemeinsamen Punkte müssen sich als Schnitt der linearen Räume L_ν und L_σ ergeben; es kann also nur $\sigma' = 0$ oder $\sigma' = 1$ sein. Für $\sigma' = 0$ liegen die α' und die β' Punkte in den getrennten Räumen $L_\nu L_\alpha$

und $L_\nu L_\beta$, sie sind also auch zusammen unabhängig. Für $\sigma' = 1$ bestimmen die $\alpha' + 1$ Punkte einen $L_{\alpha'}$, die $\beta' + 1$ Punkte einen $L_{\beta'}$, die beide im L_ν liegen und sich deshalb nur in einem Punkt, dem Schnitt von L_ν mit L_σ, treffen können. Der durch die $\alpha' + \beta' + 1$ Punkte bestimmte Raum hat daher die Dimension $\alpha' + \beta'$, und daraus folgt, daß die Punkte unabhängig sind. Die Vereinigung von A und B ist also ein Freigebilde.

Die Bedingung von Satz 8 ist hinreichend, aber nicht notwendig. Nimmt man für A die Ecken P_0, P_1, P_2, für B die Ecken P_1, P_2, P_3 eines Tetraeders, so ist $A + B$ ein Freigebilde, ohne daß der Schnitt der zugehörigen Räume zu A oder zu B gehören würde. Dagegen müssen natürlich $A + BL_\sigma = (A + B)L_\alpha$ und $B + AL_\sigma = (A + B)L_\beta$ Freigebilde darstellen.

Zusatz. Nimmt man an Stelle von B den linearen Raum L_β selbst, der ja ein Freigebilde ist, so folgt, daß man aus jedem Freigebilde A ein neues erhält, wenn man einen beliebigen in A enthaltenen Raum L_σ durch einen größeren L_β ersetzt, jedoch so, daß $[A]L_\beta = L_\sigma$ wird. Insbesondere kann man also aus einem gegebenen Freigebilde A ein neues erhalten, wenn man einen Punkt außerhalb $[A]$ hinzufügt, oder einen in A enthaltenen Punkt durch eine Gerade, oder eine in A enthaltene Gerade durch eine Ebene, allgemein einen in A enthaltenen L_σ durch einen $L_{\sigma+1}$ ersetzt, vorausgesetzt, daß die Dimension des zugehörigen Raums dadurch erhöht wird.

Ebenso kann man auch das Freigebilde A von einem außerhalb $[A]$ gelegenen Punkt aus projizieren, um wieder ein Freigebilde zu erhalten. Es gilt nämlich:

Satz 9. *Ist A ein Freigebilde und L_γ ein linearer Raum, welcher den zu A gehörigen Raum nicht trifft, ist also $[A]L_\gamma = 0$, so ist die Projektion*[8]) *von A aus L_γ, $A^\wedge L_\gamma$, ebenfalls ein Freigebilde.*

Ist speziell $\gamma = 0$, also L_γ ein Punkt Z, und nimmt man an, die Projektion $A^\wedge Z$ würde von einem L_ν, der dann nicht durch Z gehen kann, in einzelnen linear abhängigen Punkten getroffen, so müßte auch A selbst von dem Raum $L_{\nu+1} = L_\nu^\wedge Z$ in linear abhängigen Punkten getroffen werden, denn der Schnitt von $L_{\nu+1}$ mit $[A]$ ist auf den Raum L_ν durch die Projektion von Z aus umkehrbar eindeutig projektiv abgebildet. A wäre dann also kein Freigebilde.

Ist $\gamma > 0$, so kann man der Reihe nach von $\gamma + 1$ den L_γ bestimmenden Punkten $Z_0, \ldots, Z_\gamma$ aus projizieren, um die Projektion $A^\wedge L_\gamma$ als Freigebilde zu erhalten.

[8]) A. G. § 6.

§ 2. Freigebilde im L_3

Im dreidimensionalen komplexen projektiven Raum L_3 ist ein algebraisches Gebilde Freigebilde, wenn es von keiner Geraden in mehr als zwei, von keiner Ebene in mehr als drei einzelnen Punkten getroffen wird, und als Punktsystem nicht mehr als vier Punkte enthält.

Es gibt im L_3 folgende 24 wesentlich verschiedene Freigebilde[9]:

A. Zum L_{-1} gehörend:

A 1. Das Nullgebilde[10] L_{-1}.

B. Zum L_0 gehörend:

B 1. Der Punkt L_0.

C. Zum L_1 gehörend:

C 1. Zwei Punkte (d. h. die Vereinigung $P + Q$ von zwei verschiedenen Punkten P und Q).

C 2. Die Gerade L_1.

D. Zum L_2 gehörend:

D 1. Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen.

D 2. Ein Punkt und eine nicht durch diesen Punkt gehende Gerade.

D 3. Zwei sich schneidende Gerade.

D 4. Ein nichtausgearteter Kegelschnitt.

D 5. Die Ebene L_2.

E. Zum L_3 gehörend:

E 1. Vier Punkte, die nicht in einer Ebene liegen.

E 2. Zwei Punkte und eine zu ihrer Verbindungslinie windschiefe Gerade.

E 3. Ein Punkt und zwei sich schneidende Gerade, deren Verbindungsebene den Punkt nicht enthält.

E 4. Ein Punkt und ein nichtausgearteter Kegelschnitt, dessen Ebene den Punkt nicht enthält.

E 5. Ein Punkt und eine Ebene, die den Punkt nicht enthält.

E 6. Zwei windschiefe Gerade.

E 7. Drei nicht in einer Ebene liegende Gerade mit zwei Schnittpunkten.

E 8. Drei nicht in einer Ebene liegende Gerade mit einem gemeinsamen Punkt.

E 9. Eine Gerade und ein nichtausgearteter Kegelschnitt, die nicht in derselben Ebene liegen, aber einen Punkt gemeinsam haben.

---

[9] Es ist nützlich, die Tabelle anschaulich aufzuzeichnen, etwa so: 0 ; . ; : , / ; : . , . / , usw. Im L_4 kämen noch über 50 neue, zum L_4 gehörige Freigebilde hinzu.

[10] A. G. § 1 und § 2.

E 10. Eine Gerade und eine Ebene, die genau einen Punkt gemeinsam haben.
E 11. Zwei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden.
E 12. Ein nichtzerfallender Kegel zweiter Ordnung.
E 13. Eine nichtzerfallende Raumkurve dritter Ordnung.
E 14. Eine nichtausgeartete Fläche zweiter Ordnung.
E 15. Der Raum L_3.

Bei dieser Aufzählung sind Unterscheidungen bezüglich der Realität der Gebilde nicht berücksichtigt. Es ist wesentlich, daß das Nullgebilde L_{-1}, das keinen Punkt enthält, als Freigebilde mitgezählt wird, sonst wäre schon Satz 1 (§ 1) nicht mehr richtig.

Unter den 24 Gebilden sind 18 „lineare Freigebilde" enthalten, d. h. solche, die nur aus linearen Räumen zusammengesetzt sind. Nur die Gebilde D 4, E 4, E 9, E 12, E 13 und E 14 sind nichtlineare Freigebilde.

Daß das Nullgebilde L_{-1} und die nichtausgearteten Kegelschnitte, Raumkurven dritter Ordnung und Flächen zweiter Ordnung, also die Gebilde A 1, D 4, E 13, E 14, wirklich Freigebilde darstellen, ist auf Grund der Definitionen leicht zu erkennen (s. u.). Die andern aufgezählten Gebilde kann man von A 1 und D 4 ausgehend mit Hilfe der Sätze und Konstruktionen von § 1 zum Teil in mehrfacher Weise herleiten. Solche Konstruktionen sind im L_3: Das Hinzufügen eines Punktes, einer Geraden oder einer Ebene, die den ursprünglichen zugehörigen Raum nicht treffen; das Ersetzen eines im Gebilde enthaltenen Punktes durch eine Gerade, oder einer Geraden durch eine Ebene, wobei sich wieder die Dimension des zugehörigen Raums vergrößern muß; das Projizieren aus einem nicht im zugehörigen Raum liegenden Punkt. Die Ausartungen der Kurven und Flächen ergeben sich dabei, soweit es sich wirklich um Freigebilde handelt, nicht als Grenzfall, sondern direkt. Ein räumliches Gebilde dritter Ordnung kann aber z. B. aus drei windschiefen Geraden bestehen und ist dann kein Freigebilde; ebenso ist eine ebene Kurve dritter Ordnung als Grenzfall einer räumlichen nicht mehr Freigebilde.

Es ist noch zu zeigen, daß es im L_3 keine andern Freigebilde gibt, als die angegebenen.

Man kann zunächst bei jedem einzelnen der in der Tabelle aufgezählten Freigebilde feststellen:

Ist P ein Punkt, der im zugehörigen Raum, aber nicht auf dem Gebilde selbst liegt, so geht durch P eine Gerade, die in zwei, oder eine Ebene, die in drei, oder (bei E 1) der L_3, der in vier linear unabhängigen Punkten trifft. Fügt man also zu einem der Freigebilde noch einen neuen Punkt P

hinzu, so erhält man nur dann wieder ein Freigebilde, wenn P nicht im zugehörigen Raum gewählt wurde.

Im Gegensatz dazu kann man unter Umständen im zugehörigen Raum eine Gerade hinzufügen, nämlich zu zwei windschiefen Geraden eine sie schneidende, um wieder ein Freigebilde zu erhalten.

Von den Einzelpunkten können wir jetzt also absehen, da sie nur in der angegebenen Weise auftreten können, nämlich als linear unabhängige Punkte, deren Verbindungsraum den Verbindungsraum des übrigen Teils nicht trifft. Dieser übrige Teil muß wegen Satz 6 selbst ein Freigebilde darstellen.

Wir betrachten weiter die linearen Gebilde:

Zwei Gerade ergeben stets ein Freigebilde; drei Gerade jedoch nur, wenn sie in der Form $E\,7$ oder $E\,8$ auftreten, denn sie dürfen nicht in einer Ebene liegen, und es darf auch keine der Geraden zu beiden andern windschief sein, da man sonst eine Ebene hindurchlegen könnte, die in einer Geraden und zwei Punkten treffen würde.

Ein Freigebilde im L_3 kann weiter nicht aus mehr als drei Geraden oder mehr als zwei Ebenen oder mehr als einer Geraden und einer Ebene zusammengesetzt sein, da sonst der Schnitt mit einer passenden Ebene kein Freigebilde ergeben würde. Es bleiben also nur die angegebenen linearen Freigebilde übrig.

Als eindimensionale irreduzible Freigebilde erhält man die rationalen Normalkurven, also die Gerade, den Kegelschnitt und die Raumkurve dritter Ordnung.

Eine irreduzible Kurve ν-ter Ordnung C^ν liegt nämlich stets in einem L_ν, den man durch $\nu + 1$ ihrer Punkte legen kann. Eine irreduzible Kurve zweiter Ordnung ist daher stets eine ebene Kurve, und die Raumkurve dritter Ordnung ist die einfachste wirkliche Raumkurve. Gehört die Kurve C^ν zum L_ν, so geht durch $\nu - 1$ ihrer Punkte ein Büschel von $L_{\nu-1}$, welche den Punkten der C^ν umkehrbar eindeutig zugeordnet sind; die Koordinaten dieser Punkte sind daher rationale Funktionen des Büschelparameters. Den $\nu - 1$ ausgewählten Punkten entsprechen dabei die berührenden $L_{\nu-1}$.

Die Raumkurven dritter Ordnung sind ebenso wie die Kegelschnitte wirklich Freigebilde, denn würde die irreduzible Kurve dritter Ordnung von einer Geraden in drei Punkten getroffen, so könnte man diese Gerade mit einem vierten Punkt der Kurve durch eine Ebene verbinden, welche die ganze Kurve enthalten müßte.

Kurven höherer Ordnung in der Ebene oder im Raum sind aber, wie sofort zu sehen, nicht mehr Freigebilde.

Bei den Flächen im L_3 ist ebenso direkt zu sehen, daß diejenigen zweiter Ordnung Freigebilde sind, diejenigen höherer Ordnung jedoch nicht.

Als zusammengesetzte nichtlineare Freigebilde treten im L_3 nur die Fälle E 4 und E 9 auf, denn in allen komplizierteren Fällen findet man sofort eine Gerade, die in mehr als zwei, oder eine Ebene, die in mehr als drei Punkten trifft.

Damit ist gezeigt, daß die Aufzählung der Freigebilde vollständig ist. Es gelten also die Sätze:

Fügt man zu einem Freigebilde des L_3 im zugehörigen Raum einen weiteren einzelnen Punkt hinzu, so ist das entstehende Gebilde nicht mehr Freigebilde.

Die irreduziblen Teile eines Freigebildes des L_3 sind selbst Freigebilde. Insbesondere sind die eindimensionalen irreduziblen Teile rationale Normalkurven.

§ 3. Freigebilde und Gebilde zweiten Grades

Als *Gebilde zweiten Grades* werde ein algebraisches Gebilde bezeichnet, das durch *eine* homogene Gleichung zweiten Grades dargestellt werden kann. In der Ebene sind dies der Kegelschnitt, das Geradenpaar und die „Doppelgerade", die geometrisch mit der einfachen Geraden identisch ist. Im Raum sind es die Fläche zweiter Ordnung, das Ebenenpaar und die „Doppelebene", die wieder mit der einfachen Ebene identisch ist. Ein Gebilde zweiten Grades kann also von erster Ordnung[11]) sein; umgekehrt sind zwei windschiefe Gerade ein Gebilde zweiter Ordnung, aber nicht ein Gebilde zweiten Grades. Wir bezeichnen im folgenden auch die ausgearteten Gebilde zweiten Grades kurz als *Kegelschnitt* bezw. als *Fläche zweiten Grades.*

Diese Gebilde sollen nun insbesondere im *reellen* Gebiet betrachtet werden. Ist $Q = 0$ eine homogene Gleichung zweiten Grades mit reellen Koeffizienten, so kann man hier das Gebilde $Q = 0$ und die beiden Gebiete $Q > 0$ und $Q < 0$ unterscheiden. Jeder von diesen Bereichen ist in der Ebene und im Raum zusammenhängend, d. h. wenn die Punkte A und B demselben Bereich angehören, so kann man sie durch einen stetigen Bogen verbinden, der ebenfalls diesem Bereich angehört. Bei den Kegelschnitten in der projektiven Ebene ist dies evident; im Raum kann man durch A und B eine Ebene legen und die Verbindung in dieser Ebene vornehmen.

Wir sagen, daß ein Gebilde zweiten Grades $Q = 0$ ein anderes Gebilde G

[11]) A. G. § 5.

durchsetzt, wenn sowohl im Gebiet $Q > 0$ wie im Gebiet $Q < 0$ Punkte von G vorhanden sind. Liegt dagegen G im Reellen ganz im Gebiet $Q > 0$ oder ganz im Gebiet $Q < 0$, so sagen wir, daß G *ganz auf der einen Seite* von Q gelegen ist.

Es gilt nun in der Ebene und im Raum der Satz[12]):

Satz I. *Wenn ein zum $L_\nu (\nu \leqq 3)$ gehörendes Freigebilde von einem Gebilde zweiten Grades nicht durchsetzt, aber in $\nu + 1$ linear unabhängigen reellen Punkten getroffen wird, so ist es ganz in ihm enthalten.*

Wenn also insbesondere eine Fläche zweiten Grades ein Freigebilde in vier linear unabhängigen reellen Punkten trifft, ohne es zu durchsetzen, so muß sie das Freigebilde ganz enthalten.

Zum Beweis betrachten wir zunächst die rationalen Normalkurven C^ν; sie gehören zum L_ν. Die Koordinaten ihrer Punkte sind als rationale Funktionen höchstens ν-ten Grades im Parameter t darstellbar; beim Schnitt mit einem Gebilde zweiten Grades erhält man also eine Gleichung höchstens 2ν-ten Grades für t. Wird aber die Kurve von dem Gebilde in $\nu + 1$ Punkten getroffen und nicht durchsetzt, so erhält man algebraisch mindestens $2\nu + 2$ Wurzeln für t, d. h. die Kurve muß dem Gebilde ganz angehören.

In der Ebene ist also der Satz für die Gerade und die Kurve zweiter Ordnung bewiesen; er gilt aber auch für zwei sich schneidende Gerade. Wenn diese nämlich von einem Kegelschnitt in drei unabhängigen Punkten A, B, C getroffen und nicht durchsetzt werden, so liegen zwei von den Punkten, etwa A und B, auf der einen Geraden, während der dritte, C, auf der andern liegen und vom Schnittpunkt S der Geraden verschieden sein muß. Dann muß aber die Gerade $[A, B]$ ganz dem Kegelschnitt angehören, folglich auch der Punkt S und daher auch die Gerade $[S, C]$. Für die andern Freigebilde in der Ebene ist die Richtigkeit des Satzes direkt zu erkennen.

Wird ferner eine Ebene von einer Fläche zweiten Grades in drei linear unabhängigen Punkten A, B, C getroffen, aber nicht durchsetzt, so müssen die Geraden $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ und folglich auch die ganze Ebene der Fläche angehören.

Man erkennt jetzt, daß der Satz auch für ebene Freigebilde und Flächen zweiten Grades im Raum richtig ist, da man eventuell mit der betreffenden Ebene schneiden kann.

[12]) Bei einer geeigneten Definition der Berührung dürfte sich wohl im Komplexen ein entsprechender Satz beweisen lassen, daß nämlich ein zum L_ν gehörendes Freigebilde, welches von einem Gebilde zweiten Grades in $\nu + 1$ unabhängigen Punkten berührt wird, ganz in ihm enthalten ist; wir brauchen jedoch diesen Satz nicht.

Weiter werde eine irreduzible Fläche zweiter Ordnung von einer Fläche zweiten Grades in den linear unabhängigen Punkten A, B, C, D getroffen und nicht durchsetzt. Die Ebene $[A, B, C]$ schneidet beide Flächen in einem Kegelschnitt, der ihnen gemeinsam sein muß; dasselbe gilt für die Ebenen $[B, C, D]$, $[C, D, A]$ und $[D, A, B]$. Daraus folgt aber, daß die beiden Flächen selbst zusammenfallen müssen.

Bei den reduziblen Gebilden im Raum kann man ähnlich schließen wie in der Ebene: Bei drei sich schneidenden Geraden müssen von den vier Treffpunkten mit der Fläche zweiten Grades zwei auf einer der Geraden liegen, ein Schnittpunkt und ein weiterer auf einer zweiten Geraden, ein Schnittpunkt und der vierte Punkt auf der dritten Geraden; diese müssen also alle der Fläche angehören. Bei zwei windschiefen Geraden liegen je zwei der Punkte auf jeder Geraden. Bei einer Ebene und einer Geraden liegen entweder drei Punkte in der Ebene, der Schnittpunkt und ein weiterer auf der Geraden; oder zwei Punkte auf der Geraden, der Schnittpunkt und zwei weitere von ihm linear unabhängige in der Ebene; analog bei einer Kurve zweiter Ordnung und einer Geraden, die sich schneiden. Besteht das Freigebilde aus zwei Ebenen, so liegen entweder drei von den Punkten in der einen Ebene, die Schnittlinie und der vierte Punkt in der andern, so daß sie beide der Fläche angehören; oder es liegen in beiden Ebenen je zwei der Punkte, dann gehören die beiden Verbindungslinien zur Fläche, also auch zwei Punkte der Schnittlinie, also diese selbst und damit auch die beiden Ebenen. Enthält das Freigebilde einzelne Punkte, so müssen diese, wie eine Abzählung zeigt, zu den Treffpunkten gehören, und auch die übrigen Teile gehören wie oben der Fläche an.

Damit ist der Satz auch für den Raum allgemein bewiesen.

§ 4. Gebilde zweiten Grades ohne reellen Schnitt

Wir sagen von einem Freigebilde, es sei *reell*, wenn die Dimension des zugehörigen Raums im Reellen dieselbe ist, wie im Komplexen. Wenn also ein reelles Freigebilde F zum L_3 gehört, so liegen auch die reellen Punkte von F für sich genommen nicht in einer Ebene.

Man findet:

Ist im L_3 ein Freigebilde reell, so sind auch seine irreduziblen Teile reell.

Andernfalls würde sich nämlich die Dimension des zugehörigen Raums im Reellen vermindern, wie in jedem Fall direkt zu sehen ist.

Es gilt nun der Satz:

Satz II. *Ist in der Ebene ein Kegelschnitt Q_a gegeben, und ganz auf der einen Seite von Q_a ein reelles Freigebilde F, das nicht mit der ganzen Ebene* *zusammenfällt, so gibt es einen Kegelschnitt Q_b, welcher F enthält und Q_a im Reellen nirgends trifft.*

Ist F selbst ein Kegelschnitt, so ist $Q_b = F$ die Lösung. Enthält F eine Gerade, so findet man für Q_b leicht einen zerfallenden Kegelschnitt als Lösung. Ist F ein Punktsystem, das also höchstens drei Punkte enthält, so verfährt man wie folgt:

Man kann ohne Einschränkung annehmen, daß die Punkte von F im Gebiet $Q_a > 0$ gelegen sind; sie sind alle reell, da F reell ist. Wenn Q_a keinen reellen Punkt enthält, so ist jeder Kegelschnitt durch F eine Lösung. Wenn Q_a reelle Punkte besitzt, so bezeichne man Q_a als Q_0 und betrachte das Kegelschnittbüschel

$$Q_0 - \lambda K_0 = 0 \quad \text{mit} \quad K_0 \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \,,$$

wobei λ reell sein soll. Irgend zwei verschiedene dieser Kegelschnitte haben im Reellen keinen Punkt gemeinsam. Ist F das Nullgebilde, so kann $Q_b = Q_0 - K_0$ gesetzt werden. Andernfalls nehme man für λ den kleinsten Wert $\lambda_1 > 0$, für welchen der Kegelschnitt

$$Q_1 \equiv Q_0 - \lambda_1 K_0 = 0$$

einen Punkt P_1 von F enthält.

Das Freigebilde F liegt jetzt ganz im Gebiet $Q_1 \geqq 0$, es wird also von dem Kegelschnitt Q_1 nicht durchsetzt. Wenn es ganz in Q_1 enthalten ist, so kann $Q_b = Q_1$ gesetzt werden. Andernfalls werde angenommen, daß der Punkt P_1 die Koordinaten $1:0:0$ besitze, was wieder keine Einschränkung bedeutet, und man betrachte das Büschel

$$Q_1 - \lambda K_1 = 0 \quad \text{mit} \quad K_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 \quad .$$

Für λ nehme man jetzt den kleinsten Wert $\lambda_2 \geqq 0$, für den der Kegelschnitt

$$Q_2 \equiv Q_1 - \lambda_2 K_1 = 0$$

einen weiteren Punkt P_2 von F enthält. Wenn Q_2 das Gebilde F enthält, so ist $Q_b = Q_2$ zu setzen; sonst kann angenommen werden, daß die Gerade $[P_1, P_2]$ die Gleichung $x_2 = 0$ besitzt, und man nimmt das Büschel

$$Q_2 - \lambda K_2 = 0 \quad \text{mit} \quad K_2 \equiv x_2^2 \,.$$

Man wählt dann $\lambda = \lambda_3 > 0$ so, daß der Kegelschnitt

$$Q_3 \equiv Q_2 - \lambda_3 K_2 = 0$$

den Punkt P_3 von F und also F selbst enthält, und setzt $Q_b = Q_3$.

Der zuletzt betrachtete Fall werde noch speziell formuliert:

Satz IIa. *Sind in der reellen projektiven Ebene ein Kegelschnitt Q_a und ganz auf der einen Seite von Q_a drei Punkte gegeben, die nicht in gerader Linie liegen, so geht durch die drei Punkte ein Kegelschnitt Q_b, welcher Q_a nicht trifft.*

Im Raum gilt der entsprechende Satz:

Satz III. *Ist eine Fläche zweiten Grades Q_a gegeben, und ganz auf der einen Seite von Q_a ein reelles Freigebilde F, das nicht mit dem ganzen Raum zusammenfällt, so gibt es eine Fläche zweiten Grades Q_b, welche F enthält und Q_a im Reellen nirgends trifft.*

Wir sehen von dem Fall ab, daß F selbst eine Fläche zweiten Grades ist, da dann einfach $Q_b = F$ gesetzt werden kann. Die reellen Punkte von F sollen ganz dem Gebiet $Q_a > 0$ angehören. Wenn Q_a keinen reellen Punkt enthält, so nehme man eine Fläche zweiten Grades Q_0 mit wenigstens einem reellen Punkt derart, daß F dem Gebiet $Q_0 > 0$ angehört; andernfalls soll Q_0 mit Q_a identisch sein. Wir beschränken uns im folgenden ganz auf das reelle Gebiet.

Die Flächen des Büschels

$$Q_0 - \lambda K_0 = 0 \quad \text{mit} \quad K_0 \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

treffen sich nicht. Ist F das Nullgebilde, so wird $Q_b = Q_0 - K_0$ gesetzt. Andernfalls sei $\lambda_1 > 0$ der kleinste Wert von λ derart, daß die Fläche

$$Q_1 \equiv Q_0 - \lambda_1 K_0 = 0$$

einen Punkt P_1 von F enthält. P_1 habe die Koordinaten $1:0:0:0$.

Ist F ganz in Q_1 enthalten, so wird $Q_b = Q_1$ gesetzt. Andernfalls sei $\lambda_2 \geqq 0$ die kleinste Zahl derart, daß die Fläche

$$Q_2 \equiv Q_1 - \lambda_2 K_1 = 0 \quad \text{mit} \quad K_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

einen weiteren Punkt P_2 von F enthält. Wir nehmen zunächst an, daß ein solcher Wert λ_2 existiert. P_2 habe die Koordinaten $0:1:0:0$.

Ist F ganz in Q_2 enthalten, so wird $Q_b = Q_2$ gesetzt. Andernfalls liegt F ganz im Gebiet $Q_2 \geqq 0$ und wenigstens ein von P_1 und P_2 linear unabhängiger Punkt von F im Gebiet $Q_2 > 0$, denn der Schnitt von F mit der Geraden $[P_1, P_2]$ gehört nach Satz I der Fläche $Q_2 = 0$ an. Nun sei $\lambda_3 \geqq 0$ die kleinste Zahl derart, daß die Fläche

$$Q_3 \equiv Q_2 - \lambda_3 K_2 = 0 \quad \text{mit} \quad K_2 \equiv x_2^2 + x_3^2$$

einen von P_1 und P_2 linear unabhängigen Punkt P_3 von F enthält. Wir nehmen wieder an, daß ein solcher Wert λ_3 existiert. P_3 habe die Koordinaten $0:0:1:0$.

Ist F ganz in Q_3 enthalten, so wird $Q_b = Q_3$ gesetzt. Andernfalls liegt F ganz im Gebiet $Q_3 \geqq 0$ und wenigstens ein von P_1, P_2, P_3 linear unabhängiger Punkt P_4 von F im Gebiet $Q_3 > 0$, denn der Schnitt von F mit der Ebene $[P_1, P_2, P_3]$ muß nach Satz I der Fläche $Q_3 = 0$ angehören. Man wählt jetzt $\lambda_4 > 0$ so, daß die Fläche

$$Q_4 \equiv Q_3 - \lambda_4 K_3 = 0 \quad \text{mit} \quad K_3 \equiv x_3^2$$

den Punkt P_4 enthält, und setzt $Q_b = Q_4$.

Es ist noch zu zeigen, daß Q_4 das Gebilde F enthält. Zuerst sollen jedoch die Ausnahmefälle behandelt werden, in denen λ_2 oder λ_3 nicht als Minimum, sondern nur als untere Grenze bestimmt ist.

Es kann vorkommen, daß die Fläche $Q_1 - \lambda K_1 = 0$ für gewisse $\lambda > \lambda_2 \geqq 0$ das Gebilde F in einem Punkt $P \neq P_1$ trifft, der für $\lambda \to \lambda_2$ in P_1 übergeht, ohne daß für $\lambda \leqq \lambda_2$ ein weiterer gemeinsamer Punkt P_2 vorhanden wäre. Dasselbe muß dann auch für einen irreduziblen Teil von F gelten. Dieser Teil T von F kann keine Gerade oder Ebene sein, denn da er in P_1 von Q_1 getroffen und nicht durchsetzt, also berührt, und daher auch von $Q_1 - \lambda K_1$ in P_1 berührt und in P getroffen wird, so müßte der Schnitt für $\lambda > \lambda_2$ und daher auch für $\lambda = \lambda_2$ mindestens eine Gerade enthalten, entgegen der Annahme. Da die Flächen zweiten Grades ausgeschlossen waren, so muß T eine Normalkurve zweiter oder dritter Ordnung sein, die in P_1 von Q_2 in höherer, also, da sie nicht durchsetzt wird, in mindestens dritter Ordnung berührt wird. Man nimmt in diesem Fall als Gerade $[P_1, P_2]$ die in P_1 an T gelegte Tangente und kann wie oben weiterfahren.

Ist T eine Kurve zweiter Ordnung, so genügt es, daß die Fläche zweiten Grades einen weiteren Punkt von T enthält, um T ganz zu enthalten; das angegebene Verfahren zur Bestimmung von Q_b führt dann zum Ziel. Ist $T = F$ eine Raumkurve dritter Ordnung, welche sodann von Q_3 in einem weiteren Punkt P_3 berührt wird, so genügt es wieder, daß Q_4 noch einen ihrer Punkte enthält, um sie ganz zu enthalten.

In analoger Weise verfährt man, wenn anstatt λ_2 erst das Minimum λ_3 nicht existiert, was eintreten kann, wenn entweder F einen Kegelschnitt als echten Teil enthält, der von Q_2 in einem Punkt B berührt wird, oder F eine Raumkurve dritter Ordnung ist, die von Q_2 in zwei Punkten A und B berührt wird. Die Fläche $Q_2 - \lambda K_2 = 0$ wird dann für $\lambda > \lambda_3 \geqq 0$ noch einen Punkt P der Kurve enthalten, der für $\lambda \to \lambda_3$ etwa in den Punkt B übergeht. Man nimmt dann P_3 auf der in B an die Kurve gelegten Tangente an und findet, daß Q_4 die Kurve, also auch F ganz enthalten muß.

Ist T eine Raumkurve dritter Ordnung, so kann es weiter vorkommen, daß die Minima λ_2 und λ_3 beide nicht existieren. Man bestimmt dann λ_2, Q_2 und $[P_1, P_2]$ wie schon angegeben und nimmt entsprechend für λ_3 die untere Grenze der Werte von λ, für welche die Fläche $Q_2 - \lambda K_2 = 0$ noch einen von P_1 verschiedenen Punkt der Kurve enthält. Die Fläche $Q_3 \equiv Q_2 - \lambda_3 K_2 = 0$ muß dann die Kurve in mindestens fünfter Ordnung berühren. Als Ebene $[P_1, P_2, P_3]$ nimmt man jetzt die Schmiegungsebene von T in P_1, und wenn die Fläche $Q_4 \equiv Q_3 - \lambda_4 K_3 = 0$ einen weiteren Punkt der Kurve enthält, so muß sie sie ganz enthalten. Es kann also $Q_b = Q_4$ gesetzt werden.

Weitere Ausnahmefälle können nicht mehr eintreten. Man kann daher in den übrigen Fällen $\lambda_4 > 0$ zunächst als die kleinste Zahl definieren, für welche die Fläche $Q_4 \equiv Q_3 - \lambda_4 K_3 = 0$ einen von P_1, P_2, P_3 linear unabhängigen Punkt von F enthält. Dieses Minimum existiert, da speziell bei den Normalkurven wieder das Hinzutreten eines weiteren Punktes P_4 bewirkt, daß die ganze Kurve in Q_4 enthalten ist. Jetzt wird aber F von Q_4 in vier linear unabhängigen Punkten getroffen und nicht durchsetzt, ist also nach Satz I ganz in Q_4 enthalten. Daraus geht hervor, daß man λ_4 auch direkt so bestimmen kann, wie oben angegeben.

Ganz in derselben Weise, nur daß $\lambda_1 > 0$ durch $\lambda_1 \geqq 0$ zu ersetzen ist, lassen sich die folgenden Sätze beweisen:

Satz IV. *Wird in der Ebene ein reelles Freigebilde F, das nicht mit der ganzen Ebene zusammenfällt, von einem Kegelschnitt Q_a nicht durchsetzt, so gibt es einen Kegelschnitt Q_b, welcher F enthält und Q_a nicht durchsetzt.*

Satz V. *Wird ein reelles Freigebilde F, das nicht mit dem ganzen Raum zusammenfällt, von einer Fläche zweiten Grades Q_a nicht durchsetzt, so gibt es eine Fläche zweiten Grades Q_b, welche F enthält und Q_a nicht durchsetzt.*

§ 5. Eine Umkehrung

Die in § 4 gefundenen Sätze gelten wesentlich nur für die Freigebilde, wie sich aus der folgenden Umkehrung ergibt:

Satz VI. *Ist ein algebraisches Gebilde G im Reellen nicht Freigebilde, so gibt es ein Gebilde zweiten Grades Q_a derart, daß G ganz auf der einen Seite von Q_a gelegen ist, daß aber kein Gebilde zweiten Grades Q_b existiert, welches G enthält und Q_a nicht trifft oder nicht durchsetzt.*

Dabei sagen wir, ein Gebilde G ist „im Reellen nicht Freigebilde", wenn es einen L_ν gibt, welcher G in wenigstens $\nu + 2$ einzelnen reellen Punkten trifft.

Zum Beweis betrachten wir verschiedene Fälle:

Wenn G drei reelle, linear abhängige Punkte enthält, aber nicht ihre Verbindungslinie g, so sei O ein Punkt von g, der nicht in G enthalten ist; er habe die Koordinaten $1:0:0:0$. Das Gebilde

$$Q_a \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \varepsilon^2 x_0^2 = 0$$

mit hinreichend kleinem ε leistet das Verlangte, denn jedes Gebilde zweiten Grades Q_b, welches G enthält, muß auch g enthalten, also Q_a durchsetzen. Wir können also diesen Fall (in der Ebene und im Raum) ausschließen.

In der Ebene ist nur noch der Fall zu betrachten, daß die reellen Punkte von G ein Punktsystem bilden, welches aus wenigstens vier Punkten P_i besteht, von denen keine drei linear abhängig sind. O sei ein Punkt, welcher auf keiner Verbindungslinie von je zwei der Punkte P_i gelegen ist, so daß es also p verschiedene Gerade gibt, die den Punkt O mit den p Punkten P_i verbinden. Drei benachbarte von diesen Geraden kann man von den übrigen durch einen zerfallenden Kegelschnitt Q_α trennen, der also die Eigenschaft hat, daß genau drei der Punkte P_i auf der einen, die andern auf der andern Seite von Q_α gelegen sind. Durch die genannten drei Punkte geht dann aber nach Satz IIa ein Kegelschnitt Q_β, welcher Q_α nicht trifft und folglich das Gebilde G nicht durchsetzt.

G liege im Gebiet $Q_\beta \geqq 0$. Man betrachte jetzt die Kegelschnitte

$$Q_\gamma \equiv Q_\beta + \varepsilon K_0 = 0 \ , \quad \text{mit} \quad K_0 \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon > 0 \ ;$$

für hinreichend kleines ε liegt G ganz auf der einen Seite von Q_γ. Würde es nun für beliebig kleine Werte von ε stets Kegelschnitte geben, welche G

enthalten und Q_γ nicht durchsetzen, so könnte man in bekannter Weise eine konvergente Folge und damit einen Kegelschnitt finden, welcher G enthält und Q_β nicht durchsetzt, aber in drei linear unabhängigen reellen Punkten trifft. Dieser müßte aber nach Satz I mit Q_β identisch sein, was unmöglich ist. Man kann also ε so klein wählen, daß $Q_a = Q_\beta + \varepsilon K_0$ gesetzt werden kann.

Wenn die reellen Punkte von G im Raum ein Punktsystem bilden, das aus mindestens fünf Punkten P_i besteht, von denen keine vier linear abhängig sind, so kann man in analoger Weise verfahren. Man kann eine Gerade finden, welche keine Verbindungslinie von je zwei der Punkte P_i trifft (indem man diese Linien von einem nicht darin enthaltenen Punkt O aus auf eine Ebene projiziert und O mit einem nicht in den Projektionen enthaltenen Punkt O' dieser Ebene verbindet), und kann dann durch diese Gerade zwei Ebenen, also eine zerfallende Fläche zweiter Ordnung Q_α legen, welche genau vier der Punkte P_i von den übrigen trennt. Durch diese vier Punkte geht dann eine weitere Fläche zweiten Grades Q_β, welche Q_α nicht trifft und also G nicht durchsetzt. Es kann jetzt

$$Q_a = Q_\beta + \varepsilon K_0 \quad \text{mit} \quad K_0 \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

und passendem ε gesetzt werden, denn eine Fläche zweiten Grades, die Q_β in den vier linear unabhängigen Punkten trifft und nicht durchsetzt, müßte mit Q_β identisch sein und kann also nicht G enthalten.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß das Gebilde G im Raum von einer Ebene in wenigstens vier reellen Punkten P_i getroffen wird, von denen keine drei linear abhängig sind. Die Ebene habe die Gleichung $x_3 = 0$, und man bestimme wie oben in den Variabeln x_0, x_1, x_2 den Kegelschnitt $Q_\beta + \varepsilon K_0 = 0$, welcher den Anforderungen des Satzes in der Ebene genügt. Man kann dann $\eta > 0$ so klein wählen, daß das Gebilde G ganz auf der einen Seite der Fläche $x_3^2 + \eta(Q_\beta + \varepsilon K_0) = 0$ gelegen bleibt. Diese Fläche Q_a leistet das Gewünschte.

(Eingegangen den 23. Februar 1937.)