Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 9 (1936-1937)

Artikel: Une remarque sur les équations fonctionelles.

Autor: Kac, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10179

Une remarque sur les équations fonctionnelles

Par M. Kac, Lwów

Dans cette note nous donnons une méthode qui permet de démontrer que les solutions de certaines équations fonctionnelles, supposées mesurables, sont continues. Notre méthode est différente de toutes les méthodes antérieures, et il nous semble qu'elle est plus simple, car elle n'emploie de la théorie des fonctions d'une variable réelle que le fait, qu'une fonction mesurable et bornée est intégrable.

Considérons l'équation bien connue

$$f(x+y) = f(x) + f(y)^{1)} \tag{1}$$

et supposons qu'il existe une solution mesurable; nous allons démontrer que cette solution est continue, ce qui avec l'égalité évidente

$$f\left(\frac{p}{q}\,x\right) = \frac{p}{q}\,f(x) \qquad (p\,,\,q = \text{entiers}) \tag{2}$$

conduit à $f(x) = \alpha x$ $[\alpha = f(1)]$.

En effet, soit a un nombre tel, que

$$\int_0^a e^{if(y)}dy \neq 0 \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{3}$$

(cette intégrale existe, car $e^{if(y)}$ est mesurable et bornée); nous avons évidemment d'après (1)

$$e^{if(x)}\int_0^a e^{if(y)}dy = \int_0^a e^{if(x+y)}\,dy = \int_x^{a+x} e^{if(y)}\,dy\,,$$

donc

$$e^{if(x)} = \frac{\int_x^{a+x} e^{if(y)}dy}{\int_0^a e^{if(y)}dy}\,. \tag{4}$$

[1] *W. Sierpiński*, Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Fund. Math. (1920), p. 116—122.

S. Banach, Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$, ibid. p. 123–124.

Nous voyons donc que $e^{if(x)}$ est continue et d'après (2)

$$e^{if(x)} = e^{i\alpha x} \qquad (\alpha = f(1)) \quad , \tag{5}$$

donc

$$f(x) = \alpha x + 2\Pi K(x),$$

$K(x)$ étant une fonction qui prend seulement les valeurs entières, et qui remplit évidemment (d'après (2)) l'équation

$$K\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}K(x)$$

pour tous les p, q entiers. On voit sans peine que $K(x) \equiv 0$; ainsi notre proposition est démontrée.

La même méthode permet aussi de résoudre les équations

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (f(x) = \alpha \lg |x|)$$
$$f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) + f(y) \qquad (f(x) = \alpha x^2)$$

et beaucoup d'autres.

(Reçu le 3 décembre 1936.)