Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 9 (1936-1937)

Artikel: Une remarque sur les équations fonctionelles.

Autor: Kac, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10179

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.11.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Une remarque sur les équations fonctionnelles

Par M. KAC, Lwów

Dans cette note nous donnons une méthode qui permet de démontrer que les solutions de certaines équations fonctionnelles, supposées mesurables, sont continues. Notre méthode est différente de toutes les méthodes antérieures, et il nous semble qu'elle est plus simple, car elle n'emploie de la théorie des fonctions d'une variable réelle que le fait, qu'une fonction mesurable et bornée est intégrable.

Considérons l'équation bien connue

$$f(x+y) = f(x) + f(y)^{1}$$
 (1)

et supposons qu'il existe une solution mesurable; nous allons démontrer que cette solution est continue, ce qui avec l'égalité évidente

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x)$$
 (p, q = entiers) (2)

conduit à $f(x) = \alpha x [\alpha = f(1)]$.

En effet, soit a un nombre tel, que

$$\int_{0}^{a} e^{if(y)} dy \neq 0 \quad (i = \sqrt{-1})$$
 (3)

(cette intégrale existe, car $e^{if(y)}$ est mesurable et bornée); nous avons évidemment d'après (1)

$$e^{if(x)}\int_{0}^{a}e^{if(y)}dy=\int_{0}^{a}e^{if(x+y)}dy=\int_{x}^{a+x}e^{if(y)}dy$$
,

done

$$e^{if(x)} = \frac{\int\limits_{x}^{a+x} e^{if(y)} dy}{\int\limits_{0}^{a} e^{if(y)} dy}.$$
 (4)

¹⁾ W. Sierpiński, Sur l'équation fonctionnelle f(x+y) = f(x)+f(y), Fund. Math. (1920), p. 116—122.

S. Banach, Sur l'équation fonctionnelle f(x+y) = f(x) + f(y), ibid. p. 123-124.

Nous voyons donc que $e^{if(x)}$ est continue et d'après (2)

$$e^{if(x)} = e^{i\alpha x} \qquad (\alpha = f(1)) \quad , \tag{5}$$

done

$$f(x) = \alpha x + 2 \Pi K(x),$$

K(x) étant une fonction qui prend seulement les valeurs entières, et qui remplit évidemment (d'après (2)) l'équation

$$K\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}K\left(x\right)$$

pour tous les p, q entiers. On voit sans peine que $K(x) \equiv 0$; ainsi notre proposition est démontrée.

La même méthode permet aussi de résoudre les équations

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$
 $(f(x) = \alpha \lg |x|)$
 $f(\sqrt{x^2 + y^2}) = f(x) + f(y)$ $(f(x) = \alpha x^2)$

et beaucoup d'autres.

(Reçu le 3 décembre 1936.)