

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 9 (1936-1937)

Artikel: Sur la courbe péanienne de M. Sierpinski.
Autor: Steinhaus, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-10178>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur la courbe péanienne de M. Sierpiński

Par H. STEINHAUS, Lwów

La courbe classique de *Peano*, qui remplit le carré $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$, est définie par deux fonctions continues $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ que l'on obtient par le procédé bien connu¹⁾ des approximations graphiques. Ces fonctions établissent entre le carré en question et le segment $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ une correspondance qui conserve la mesure: si S est un sousensemble mesurable (L) de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et I l'image plane de S , alors la mesure linéaire $|S|$ de S est égale à la mesure plane de I . Il s'ensuit que les deux fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont à distribution régulière (à d. r.); nous entendons par là que l'on a

$$\left| \prod_t E(x_1 \leq \varphi(t) < x_2) \right| = x_2 - x_1 \quad (1)$$

si $-\frac{1}{2} \leq x_1 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}$, et de même pour $\psi(t)$; $E(R)$ signifie l'ensemble des

t vérifiant R . Il s'ensuit aussi que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont indépendantes l'une de l'autre dans un sens qui sera précisé plus bas.

*M. Lebesgue*²⁾ a été le premier à généraliser la courbe de *Peano* en construisant une suite $\{f_n(t)\}$ de fonctions continues qui fournit toutes les suites numériques $\{a_n\}$ ($-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}$) quand t parcourt $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. *M. Børge Jessen*³⁾ a donné un autre exemple d'une courbe continue remplissant le „cube“ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$ et l'auteur de cette note en a donné un troisième aux Comptes Rendus⁴⁾ en visant la conservation des mesures. Il a obtenu ainsi une suite de fonctions indépendantes et continues. Nous attribuons à cette expression la signification suivante.*)

Un système de n fonctions indépendantes dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est caractérisé par l'égalité

$$\left| \prod_{k=1}^n \prod_t E(\alpha_k \leq f_k(t) < \beta_k) \right| = \prod_{k=1}^n \left| \prod_t E(\alpha_k \leq f_k(t) < \beta_k) \right| \quad (2)$$

¹⁾ Math. Ann. 39 (1890), p. 157.

Nous choisissons le carré $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ pour avoir $\int \varphi(t) dt = \int \psi(t) dt = 0$; la raison n'apparaît que dans les applications dont nous ne parlons pas ici.

²⁾ Journ. de Math. (6) 1 (1905), p. 210.

³⁾ C. R. du septième Congrès des mathématiciens scandinaves, Oslo, 1930.

⁴⁾ C. R. de l'Acad. des Sc. 202 (1936), p. 1961.

*) Cette définition a été formulée déjà en 1929 par M. Kolmogoroff à la fin d'une Note (en russe) insérée aux Comptes Rendus de l'Académie Communiste p. 8—21, comme je viens de l'apprendre (Remarque pendant l'épreuve, 17. 12. 1936).

qui doit avoir lieu pour tous les α_k, β_k réels. Une suite de fonctions indépendantes sera, par définition, une suite dont n termes vérifient la condition (2) quelque soit n . Nous ne considérons que des fonctions mesurables (L). L'intérêt qu'il y a à définir des suites de fonctions indépendantes consiste en ce qu'elles réduisent certains problèmes du calcul des probabilités à la théorie des fonctions⁵⁾.

Or, *M. Sierpiński*⁶⁾ a réussi tout récemment à construire une courbe péanienne remplissant le „cube“ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{\aleph_0}$ en partant de deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ de *Peano* et en posant tout simplement

$$f_n(t) = \varphi(\psi_{n-1}(t)), \quad \psi_0(t) = t, \quad \psi_n(t) = \psi(\psi_{n-1}(t)); \quad (n=1, 2, \dots). \quad (3)$$

La démonstration de *M. Sierpiński* est aussi simple que la définition. Nous allons montrer que *les fonctions continues* $f_n(t)$ *constituent une suite de fonctions indépendantes* à distribution régulière.

1. Remarquons d'abord que la propriété (1) admet dans le cas actuel la généralisation

$$\left| \underset{t}{E} (\varphi(t) \in X) \right| = |X|, \quad \left| \underset{t}{E} (\psi(t) \in X) \right| = |X|, \quad (4)$$

X étant un sousensemble mesurable, d'ailleurs quelconque, de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En effet, on peut recouvrir X par un système dénombrable de segments $[x_1, x_2]$ et en faire autant avec CX , le complémentaire de X , de manière que la longueur totale des segments employés approche $|X|$, respectivement $|CX|$; en tenant compte de (1) on obtient (4). Il est évident que la propriété (4) convient à la composition de deux fonctions continues, si elle convient aux composantes; il s'ensuit que (4), donc (1), convient aux $f_n(t)$ de (3). Ainsi nous avons montré que ces fonctions sont à distribution régulière.

2. Soit F une fonction mesurable quelconque définie dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Je dis que les fonctions $\varphi(t)$ et $F[\psi(t)]$ sont indépendantes. Nous aurons à examiner la validité de (2) pour ces deux fonctions. Or, l'ensemble $E(\alpha_2 \leq F[\psi(t)] < \beta_2)$ est identique à l'ensemble $E[\psi(t) \in A]$, A étant un certain ensemble mesurable. Tout revient donc à généraliser (2) d'une manière tout à fait analogue à celle qui nous a permis tout à l'heure de passer de (1) à (4); les mêmes moyens conduisent au but, la fonction $\psi(t)$ étant à d. r.

⁵⁾ Sur les fonctions indépendantes (I), (II) et (III), *Studia Math.* 6 (1936), p. 46, p. 59 et p. 89.

⁶⁾ Remarque sur la courbe péanienne, *Wiad. matematyczne* 42 (1936), p. 1.

3. En conservant les notations faisons une troisième remarque: la valeur de l'intégrale définie $\int_0^1 F[\psi(t)]dt$ ne change pas quand on y remplace $\psi(t)$ par t ; en effet, il suffit de calculer cette intégrale par la méthode classique de *Lebesgue*, en appliquant (4), pour la réduire à $\int_0^1 F(t)dt$.

4. Rappelons enfin que, suivant un résultat de *M. Kac*⁷⁾, la condition (2) équivaut au critère analytique

$$\int_0^1 e^{i[\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t)]} dt = \int_0^1 e^{i\lambda_1 f_1(t)} dt \int_0^1 e^{i\lambda_2 f_2(t)} dt \cdots \int_0^1 e^{i\lambda_n f_n(t)} dt \quad (5)$$

$(i = \sqrt{-1})$

qui doit être satisfait pour tous les λ réels.

Or, nous pouvons écrire maintenant

$$\begin{aligned} & \int_0^1 e^{i[\lambda_1 \varphi(t) + \lambda_2 \varphi(\psi(t)) + \cdots + \lambda_n \varphi(\psi_{n-1}(t))]} dt = \int_0^1 e^{i[\lambda_1 \varphi(t) + F(\psi(t))]} dt \\ &= \int_0^1 e^{i\lambda_1 \varphi(t)} dt \int_0^1 e^{iF(\psi(t))} dt \quad [\text{à cause de 2 et (5)}] \\ &= \int_0^1 e^{i\lambda_1 \varphi(t)} dt \int_0^1 e^{i[\lambda_2 \varphi(\psi(t)) + \lambda_3 \varphi(\psi_2(t)) + \cdots + \lambda_n \varphi(\psi_{n-1}(t))]} dt \\ &= \int_0^1 e^{i\lambda_1 \varphi(t)} dt \int_0^1 e^{i[\lambda_2 \varphi(t) + \lambda_3 \varphi(\psi(t)) + \cdots + \lambda_n \varphi(\psi_{n-2}(t))]} dt \quad [\text{à cause de 3}] \\ &= \int_0^1 e^{i\lambda_1 \varphi(t)} dt \int_0^1 e^{i\lambda_2 \varphi(t)} dt \int_0^1 e^{i[\lambda_3 \varphi(\psi(t)) + \cdots + \lambda_n \varphi(\psi_{n-2}(t))]} dt \\ &\qquad\qquad\qquad [\text{à cause de 2 et (5)}] \\ &= \int_0^1 e^{i\lambda_1 \varphi(t)} dt \int_0^1 e^{i\lambda_2 \varphi(t)} dt \cdots \int_0^1 e^{i\lambda_n \varphi(t)} dt \\ &= \int_0^1 e^{i\lambda_1 \varphi(t)} dt \int_0^1 e^{i\lambda_2 \varphi(\psi(t))} dt \cdots \int_0^1 e^{i\lambda_n \varphi(\psi_{n-1}(t))} dt \quad [\text{à cause de 3}] . \end{aligned}$$

Nous avons ainsi vérifié la relation (5) pour les fonctions $f_n(t)$ définies par les formules recurrentes (3). Suivant 4, nous avons montré par là l'indépendance de cette suite de fonctions.

Remarquons encore que notre résultat implique que la courbe passe

⁷⁾ Loc. cit. ⁵⁾ (I).

par tous les points du „cube“ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{\aleph_0}$ et que sa projection sur le „cube“ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n$ définie par

$$x_k = f_k(t) \quad (k = 1, 2 \dots n)$$

fait correspondre à tout sousensemble de ce „cube“ un ensemble des t de mesure égale, ce qui n'est pas réciproque. Nous avons donc suivi un chemin différent de celui de la Note des Comptes Rendus où nous avons commencé par une courbe construite d'après le principe de *Peano* afin que la conservation des mesures soit évidente, tandis qu'ici cette conservation n'est qu'un corollaire de l'indépendance qui à elle admet une démonstration analytique.

(Reçu le 3 décembre 1936.)