Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 9 (1936-1937)

Artikel: Über kubische diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen.
Autor: Billing, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-10177

Über kubische diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen

Von G. Billing, Uppsala

In einer vor kurzem publizierten Note in dieser Zeitschrift bewies *T. Nagell* den folgenden Satz[1]):

1. Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei B eine Zahl in Ω, die weder die Form $27\,\alpha^6$ noch die Form $-16\,\alpha^6$ hat, wo α eine Zahl in Ω bedeutet. Es sei ferner die diophantische Gleichung

$$x^3 - B = y^2 \tag{1}$$

in nicht verschwindenden Zahlen x und y aus Ω unlösbar. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$ zu Ω.

2. Wenn Ω die Zahl $\cos\frac{2\pi}{9}$ nicht enthält, gilt ferner: Es sei die Gleichung (1) für $B = 2^4 \cdot 3^3$ in Zahlen aus Ω unlösbar abgesehen von den Lösungen $x = 12$, $y = \pm 36$. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$, abgesehen von den Lösungen $x^3 = 12^3$, $y = \pm 36$ und $x = 0$, $y = \pm 12\sqrt{-3}$.

Dieser Satz war als eine Verallgemeinerung des folgenden *Fueter*'schen Satzes entstanden[2]):

Wenn die diophantische Gleichung

$$\xi^3 + \eta^3 = 1$$

in einem der beiden Zahlkörper $R(\sqrt{m})$ und $R(\sqrt{-3m})$ in nicht verschwindenden Zahlen ξ und η lösbar ist, dann ist sie auch in dem anderen lösbar.

Dies entspricht dem Nagell'schen Satze für $B = 2^4 \cdot 3^3$ und $\Omega = R(\sqrt{m})$.

C. E. Lind bewies neulich das folgende Analogon zu dem Nagell'schen Resultate[3]):

---

[1]) *T. Nagell*, Über die Lösbarkeit gewisser diophantischer Gleichungen dritten Grades, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 9 (1936), S. 31.

[2]) *R. Fueter*, Die diophantische Gleichung $\xi^3 + \eta^3 + \zeta^3 = 0$. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie d. Wiss. Math.-Naturwiss. Klasse. Jahrg. 1913, 25 Abh.

[3]) *C. E. Lind*, Ein Analogon zu einem Nagell'schen Satze über kubische diophantische Gleichungen, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 9 (1937), S. 156.

Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei A eine Zahl in Ω, die nicht die Form α^4 hat, wo α eine Zahl in Ω bedeutet. Es sei ferner die diophantische Gleichung

$$x^3 - Ax = y^2$$

in nicht verschwindenden Zahlen x und y aus Ω unlösbar. Dann ist sie noch immer unlösbar nach Adjunktion von $\sqrt{-1}$ zu Ω.

Das Ziel dieser Note ist, zu zeigen, wie man die Resultate von Nagell und Lind noch weiter verallgemeinern kann.

Zunächst eine Bemerkung über die allgemeine diophantische Gleichung

$$x^3 - Ax - B = y^2, \tag{2}$$

wo die Koeffizienten A und B zu einem beliebig gegebenen Rationalitätsbereich Ω gehören, und wo $4\,A^3 - 27\,B^2 \neq 0$ ist. Für die Kurve (2) haben wir die elliptische Parameterdarstellung

$$x = \wp(u)\ , \quad y = \tfrac{1}{2}\wp'(u)\ .$$

Wir nehmen nun an, daß die diophantische Gleichung (2) nur endlich viele Lösungen in Zahlen x und y aus Ω besitzt. Dann ist bekanntlich für jede solche Lösung das Argument u mit einer Periode der elliptischen Funktion $\wp(u)$ kommensurabel[4]).

Für den Spezialfall $A = O$ wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei B eine Zahl in Ω. Hat dann die diophantische Gleichung*

$$x^3 - B = y^2 \tag{3}$$

nur endlich viele Lösungen in Zahlen x und y aus Ω, so gilt dasselbe auch nach Adjunktion von $\sqrt{-3}$.

Beweis: Es sei x, y eine Lösung im Körper $\Omega(\sqrt{-3})$ aber nicht im Körper Ω der Gleichung (3). Dann ist auch x', y' eine Lösung in $\Omega(\sqrt{-3})$, wenn x' zu x und y' zu y in bezug auf $R(\sqrt{-3})$ relativkonjugiert sind. Die Argumente dieser beiden Punkte auf der Kurve (3) seien u und u'. Dann folgt aus den Additionsformeln der Funktionen $\wp(u)$ und $\wp'(u)$, daß das Argument $u + u'$ einer Lösung der Gleichung (3) in Ω entspricht.

[4]) Siehe z. B. *A. Hurwitz*, Über ternäre diophantische Gleichungen dritten Grades. Vierteljahrsschrift d. Naturf. Gesellschaft in Zürich, Bd. 62, 1917.

Wir nehmen jetzt an, daß die Gleichung (3) nur endlich viele Lösungen in Ω hat, aber unendlich viele relativkonjugierte Lösungspaare x, y und x', y' in $\Omega(\sqrt{-3})$ mit den entsprechenden Argumenten u und u'. Weil die Gleichung (3) nur endlich viele Lösungen in Ω hat, muß dann $u+u'$ mit einer Periode kommensurabel sein, oder

$$u+u' \equiv \frac{w}{n} \pmod{\omega,\ \omega_1},$$

wo ω, ω_1 ein primitives Periodenpaar von $\wp(u)$ ist, w irgendeine Periode und n eine natürliche Zahl. $\frac{w}{n}$ ist das Argument einer gewissen Lösung von (3) in Ω.

Dann muß aber für wenigstens einen dieser Werte $\frac{w}{n}$, z. B. $\frac{w_1}{n_1}$, gelten, daß die Kongruenz

$$u_i + u_i' \equiv \frac{w_1}{n_1} \pmod{\omega,\ \omega_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

für unendlich viele inkongruente Argumentenpaare u_i und u_i' erfüllt ist, die relativkonjugierten Lösungen in $\Omega(\sqrt{-3})$ entsprechen.

Man bilde jetzt die unendliche Reihe von Argumentenpaaren:

$$\left.\begin{aligned} v_i &= u_1 - u_i \\ v_i' &= u_1' - u_i' \end{aligned}\right\} \quad (i = 2, 3, \ldots)$$

Ein jedes dieser Argumente gibt eine Lösung in $\Omega(\sqrt{-3})$ (nach den Additionsformeln), und v_i und v_i' geben konjugierte Lösungen. Alle v_i sind inkongruent (modd ω, ω_1), wie die u_i. Dasselbe gilt von den v_i'. Eventuell könnte gelten: $v_i \equiv v_j'$ und $v_j \equiv v_i'$. Die Anzahl inkongruenter Argumentenpaare v_i, v_i' wird aber jedenfalls unendlich. Es ist aber

$$v_i + v_i' \equiv 0 \pmod{\omega,\ \omega_1}.$$

Also ist

$$\wp(v_i) = \wp(-v_i') = \wp(v_i'),$$

und

$$\wp'(v_i) = \wp'(-v_i') = -\wp'(v_i').$$

Nun sind aber $\wp(v_i)$ zu $\wp(v_i')$ und $\wp'(v_i)$ zu $\wp'(v_i')$ in bezug auf $R(\sqrt{-3})$ relativkonjugiert, und es folgt

$$\begin{aligned} \wp(v_i) &= \wp(v_i') = \alpha_i \\ \wp'(v_i) &= -\wp'(v_i') = 2\beta_i\sqrt{-3} \end{aligned}$$

wo α_i und β_i Zahlen sind, die zu Ω gehören. Diese unendlich vielen Wertepaare α_i, β_i genügen alle der Gleichung

$$-3\,\beta_i^2 = \alpha_i^3 - B\,.$$

Wird jetzt

$$X_i = \frac{\beta_i^2 + B}{\alpha_i^2}\,, \quad Y_i = \frac{\beta_i^3 - 3\,B\,\beta_i}{-\alpha_i^3}$$

gesetzt, so erhält man unendlich viele verschiedene Wertepaare X_i, Y_i, die zu Ω gehören und der Gleichung

$$X_i^3 - B = Y_i^2$$

genügen. Dies ist aber gegen die Annahme.

Auf ganz analoge Weise wird folgender Satz bewiesen:

Satz 2. Es sei Ω ein beliebiger Rationalitätsbereich, und es sei A eine Zahl in Ω. Hat dann die diophantische Gleichung

$$x^3 - Ax = y^2 \tag{4}$$

nur endlich viele Lösungen in Zahlen x und y aus Ω, so gilt dasselbe auch nach Adjunktion von $\sqrt{-1}$.

Beweis: Nehmen wir an, daß die Gleichung (4) nur endlich viele Lösungen in Ω hat, aber unendlich viele Lösungen in $\Omega(\sqrt{-1})$, so ergibt sich durch ähnliche Überlegungen wie im Beweise von Satz 1 die Existenz von unendlich vielen verschiedenen Wertepaaren α_i, β_i, die zu Ω gehören und der Gleichung

$$\alpha_i^3 - A\,\alpha_i = -\beta_i^2$$

genügen. Wird jetzt

$$X_i = -\alpha_i \text{ und } Y_i = \beta_i$$

gesetzt, so erhält man unendlich viele Lösungen X_i und Y_i in Ω der Gleichung

$$X_i^3 - A\,X_i = Y_i^2\,.$$

Dies ist aber gegen die Annahme.

Mittels der hier angewandten Methode ist es leicht Satz 1 durch den folgenden präziseren Satz zu ersetzen, wenn Ω reell ist:

Satz 3. *Es sei in Satz 1 der Körper Ω reell. Es sei n eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß nu gleich einer Periode ist, sofern u das Argument einer beliebigen unter den endlich vielen Lösungen der Gleichung* (3) *in Ω ist. Bezeichnet dann v das Argument einer Lösung dieser Gleichung in $\Omega(\sqrt{-3})$, so ist $3nv$ gleich einer Periode.*

Satz 2 kann durch den folgenden präziseren ersetzt werden:

Satz 4. *Es sei in Satz* 2 *der Körper Ω reell. Es sei n eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß nu gleich einer Periode ist, sofern u das Argument einer beliebigen unter den endlich vielen Lösungen der Gleichung* (4) *in Ω ist. Bezeichnet dann v das Argument einer Lösung dieser Gleichung in $\Omega(\sqrt{-1})$, so ist $2nv$ gleich einer Periode.*

Diese Sätze und mehrere noch weitergehende Resultate werden in meiner Dissertationsabhandlung bewiesen.

(Eingegangen den 3. Dezember 1936.)