

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 8 (1935-1936)

**Artikel:** Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen.  
**Autor:** Pfluger, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9288>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen

Von A. PFLUGER, Zürich

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist entstanden im Anschluß an die Veröffentlichung von G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Zeitschrift, Bd. 29, 1929, S. 549—640, insbesondere S. 571—610 (in der Folge immer mit *P* zitiert).

Indem ich die dortigen Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen dem Wachstum ganzer Funktionen vom Exponentialtypus und den Singularitäten ihrer Borel'schen Transformierten auf eine allgemeinere Funktionsklasse ausdehnte, auf die sogenannten quasiganzen Funktionen vom Exponentialtypus (Nr. 6—10) und die im Unendlichen quasiregulären Funktionen (Nr. 1—5), gelang es mir, gewisse Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen (geschrieben in der Form (2)) durch Wachstums- und Konvergenzeigenschaften ihrer Borel'schen Adjungierten zu interpretieren (Nr. 11—16, insbesondere 16, c). Es besteht nämlich zwischen den im Unendlichen quasiregulären Funktionen und den quasiganzen Funktionen vom Exponentialtypus ein vollständiger Dualismus. Die sich entsprechenden Begriffe sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Im Unendlichen quasireguläre Funktionen	Quasiganze Funktionen vom Exponentialtypus
Stützfunktion ihrer Windungsfläche	Wachstumsindikator
Holomorphieradius	Sektoriemer Typus
Beschränktheitsradius	Gewöhnlicher Typus
Überkonvergenzradius	Überkonvergenztypus
Gewöhnlicher Konvergenzradius	Gewöhnlicher Konvergenztypus
Gleichmäßiger Konvergenzradius	Gleichmäßiger Konvergenztypus
Absoluter Konvergenzradius	Absoluter Konvergenztypus

In einem ersten Abschnitt (Nr. 1—5) werden die Begriffe: Quasireguläre Funktionen (Nr. 1) und ihre Windungsfläche (Nr. 2) erklärt und die Beziehungen zwischen den Singularitäten einer quasiregulären Funktion und ihrer Windungsfläche bzw. Stützfunktion untersucht (Nr. 3—5).

Im zweiten Abschnitt gelangen die Begriffe: Quasiganze Funktionen, ihre Ordnung und ihre verschiedenen Typen zur Darstellung (Nr. 6—10).

Im dritten Abschnitt (Nr. 11—16) wird mittelst der Integrale (I) und (II) zwischen den quasiganzen Funktionen vom Exponentialtypus und den im Unendlichen quasiregulären Funktionen die Brücke geschlagen. In Nr. 11—14 wird lediglich von den analytischen Eigenschaften der Funktionen Gebrauch gemacht. Aus Satz IX (Nr. 15), wo die Stetigkeit der Integraloperationen {I} und {II} bewiesen wird, folgt dann auch der Dualismus bezüglich der Konvergenzeigenschaften (Nr. 16).

Im letzten Abschnitt (Nr. 17—19) werden vom angegebenen Dualismus, dessen Darstellung und Begründung das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist, einige Anwendungen gemacht. Aus einer einfachen Beziehung zwischen den Richtungen des stärksten Anwachsens einer quasiganzen Funktion vom Exponentialtypus und den Singularitäten ihrer Borel'schen Transformierten (Satz X) ergibt sich auf neue Art der bekannte Vivanti-Landau'sche Satz. In Nr. 18 wird eine hinreichende Bedingung für das Zusammenfallen des Beschränktheitsradius und des absoluten Konvergenzradius hergeleitet. Nr. 19 endlich beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen dem Wachstum quasiganzer Funktionen vom Mitteltypus der Ordnung  $\rho$  ( $\rho \neq 0, \infty$ ) und den Singularitäten quasiregulärer Funktionen.

Für die mannigfachen Anregungen und Ratschläge während der Ausführung dieser Arbeit sei Prof. Dr. G. Pólya der beste Dank ausgesprochen.

### *Quasireguläre Funktionen und ihre Windungsfläche.*

1. Gehen wir aus von der Dirichlet'schen Reihe

$$(1) \quad f(s) = \sum_1^{\infty} a_n \cdot e^{-\lambda_n s},$$

wo  $s = \sigma + it$  die komplexe Veränderliche, die *Koeffizienten*  $a_n$  irgendwelche komplexe Zahlen bedeuten und die *Exponenten*  $\lambda_n$  eine monoton und unbegrenzt wachsende Folge positiver reeller Zahlen bilden sollen,

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots, \lambda_n \rightarrow \infty.$$

Wir setzen weiter voraus, daß die Reihe (1) eine endliche Konvergenzabszisse  $\Gamma$  besitzt. Sie ist dann in jedem Parallelstreifen

$$R(s) > \Gamma + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad -\infty < t_1 \leq J(s) \leq t_2 < \infty$$

gleichmäßig konvergent und die durch sie in der Halbebene  $R(s) > \Gamma$  dargestellte analytische Funktion in jedem solchen Parallelstreifen beschränkt. Wir nennen die untere Grenze  $\chi$  aller Zahlen  $\sigma$ , für welche die Funktion  $f(s)$  in der Halbebene  $R(s) > \sigma$  holomorph ist, die *Holomorphieabszisse*.  $f(s)$  ist dann in der *Holomorphiehalbebene*  $R(s) > \chi$  durchwegs regulär, währenddem sie in jeder Halbebene  $R(s) > \chi - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , singuläre Punkte besitzt.

Sei nun die Funktion  $f(s)$  in der ganzen Halbebene  $R(s) > \sigma$ , wo  $\sigma$  eine reelle Zahl bedeutet, regulär. Mittels der Substitution  $e^s = z$  wird die Halbebene  $R(s) > \sigma$  schlicht auf jenen Teil der logarithmischen Fläche abgebildet, der dem Gebiet  $|z| > e^\sigma = V > 0$  der komplexen  $z$ -Ebene überlagert ist und im folgenden mit  $L(V)$  bezeichnet werden soll. Ebenso wird jeder Parallelstreifen  $R(s) > \sigma$ ,  $t_1 < J(s) < t_2$  der  $s$ -Ebene schlicht auf das Gebiet  $|z| > V$ ,  $t_1 < \arg z < t_2$  der Riemann'schen Fläche  $L(V)$  abgebildet, das wir einen *Sektor* auf  $L(V)$  nennen wollen. Desgleichen geht die Funktion  $f(s)$  über in eine Funktion  $g(z) = f(\log z)$ , die auf der Riemannschen Fläche  $L(V)$  durchwegs eindeutig und analytisch ist. Sie heißt auf  $L(V)$  „sektoriell beschränkt“, wenn sie in jedem Sektor auf  $L(V)$  beschränkt ist. *Eine solche Funktion  $g(z)$ , zu der es eine Riemann'sche Fläche  $L(V)$  gibt, auf welcher sie sektoriell beschränkt und überall regulär ist, wollen wir „im Unendlichen quasiregulär“ nennen.* Die untere Grenze  $H$  aller Zahlen  $V$ , für welche  $g(z)$  auf  $L(V)$  regulär ist, nennen wir den *Holomorphieradius* der Funktion  $g(z)$ . Sie wird schlechthin auf  $L(V)$  beschränkt genannt, wenn  $|g(z)|$  eine für alle Punkte auf  $L(V)$  gültige obere Schranke besitzt. Die untere Grenze  $B$  aller Zahlen  $V$ , für welche  $g(z)$  auf  $L(V)$  schlechthin beschränkt ist, nennen wir den *Beschränktheitsradius* der Funktion  $g(z)$ .

Läßt sich speziell  $f(s)$  in einer gewissen Halbebene  $R(s) > \sigma$  durch eine Dirichlet'sche Reihe (1) darstellen und wenden wir auf diese Reihe die Substitution  $z = e^s$  an, so geht sie über in die sogenannte „irreguläre“ Potenzreihe

$$(2) \quad \sum_1^{\infty} a_n z^{-\lambda_n} .$$

Wir wollen im folgenden die Dirichlet'sche Reihe in der Form (2) schreiben. Es ist klar, daß für die Reihen (2) die analogen Sätze und Definitionen

gelten, wie für die Reihen (1). Konvergiert also die Reihe (2) für  $z = z_0 = r_0 \cdot e^{i\phi_0}$ , so konvergiert sie in jedem Punkte der Fläche  $L(r_0 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ , und zwar in jedem Sektor auf  $L(r_0 + \varepsilon)$  gleichmäßig. Bezeichnen wir den gewöhnlichen Konvergenzradius mit  $C$ , den gleichmäßigen Konvergenzradius mit  $U$  und den absoluten Konvergenzradius mit  $A$ , so konvergiert die Reihe auf  $L(C + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$  sektoriell gleichmäßig, auf  $L(U + \varepsilon)$  schlechthin gleichmäßig und auf  $L(A + \varepsilon)$  absolut. Die durch sie dargestellte im Unendlichen quasireguläre Funktion ist auf  $L(H + \varepsilon)$  sektoriell beschränkt.

2. Um nun zum Begriff der Windungsfläche der Funktion  $g(z)$  zu gelangen, betrachten wir zunächst den Spezialfall der Potenzreihe  $g(z) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ . Von dieser wollen wir voraussetzen, daß sie im Außenraum einer abgeschlossenen Kreisscheibe um den Nullpunkt konvergiert. Da der Durchschnitt konvexer Bereiche wieder konvex ist, so gibt es einen kleinsten konvexen Bereich  $\mathfrak{R}$ , in dessen Außenraum  $g(z)$  durchwegs regulär ist<sup>1)</sup>. Dieser Außenraum ist das umfassendste konkave Regularitätsgebiet von  $g(z)$ . Hierbei verstehen wir unter einem konkaven Gebiet eine solche schlichte Umgebung des unendlich fernen Punktes der komplexen  $z$ -Ebene, in der mit einem Punkte zugleich eine ganze Halbebene als Umgebung dieses Punktes enthalten ist<sup>2)</sup>. Die Vereinigungsmenge konkaver Gebiete ist wieder konkav, ihre Komplementärmenge, falls nicht leer, sicher konvex. Da das Kreisäußere konkav ist, so folgt, daß es ein umfassendstes konkaves Gebiet gibt, in dem sich die Funktion  $g(z)$  durchwegs regulär verhält, und dessen Komplementärmenge der konvexe Bereich  $\mathfrak{R}$  ist.

Wir gelangen nun zum Begriff der Windungsfläche einer im Unendlichen quasiregulären Funktion  $g(z)$ , indem wir einfach die Bedingung der Schlichtheit fallen lassen. Ein konkaves Gebiet im erweiterten Sinne ist also eine solche der  $z$ -Ebene überlagerte Riemann'sche Fläche, in der mit einem Punkte zugleich eine ganze Halbebene als Umgebung dieses Punktes enthalten ist. Ein solches Gebiet ist z. B. die Riemann'sche Fläche  $L(H)$ . Es sei nun  $g(z)$  eine im Unendlichen quasireguläre, nicht konstante Funktion. Der unendlichferne Punkt ist dann entweder regulär, ein algebraischer oder ein transzendenter Windungspunkt. Im letzteren Falle enthält die zur Funktion  $g(z)$  gehörige Riemann'sche Fläche die Fläche  $L(H)$  als Teilgebiet. In den ersten beiden Fällen schneiden wir die zur Funktion  $g(z)$  gehörige Riemann'sche Fläche von

<sup>1)</sup> Vgl. *P*, S. 571—577.

<sup>2)</sup> Als *Umgebungen* sind diese Halbebenen ohne weiteres offen.

einem endlichen Randpunkt<sup>3)</sup> radial bis zu  $z = \infty$  auf, denken uns unendlich viele gleiche Exemplare nummeriert  $\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$  übereinandergelegt und heften diese längs des Schnittes kreuzweise zusammen. So entsteht eine zur Funktion  $g(z)$  gehörige unendlich-vielblättrige Riemann'sche Fläche, die  $L(H)$  als Teilgebiet enthält.  $g(z)$  ist in ihren sämtlichen Punkten und nur in diesen (abgesehen eventuell vom Punkt  $z = \infty$ ) regulär. Betrachten wir jetzt die Gesamtheit der konkaven Gebiete auf der zu  $g(z)$  gehörigen unendlich-vielblättrigen Riemann'schen Fläche, so ist ihre Vereinigungsmenge wieder ein konkaves Gebiet, das umfassendste der in Betracht gezogenen, und dieses Gebiet bezeichnen wir als die zur Funktion gehörige Windungsfläche. Wir verstehen also unter der Windungsfläche  $\mathfrak{M}$  einer im Unendlichen quasiregulären, nicht konstanten Funktion  $g(z)$  das umfassendste konkave Gebiet, das  $L(H)$  als Teilgebiet enthält und auf dem  $g(z)$  durchwegs regulär ist<sup>4)</sup>. Sie besitzt die zu  $g(z)$  gehörige unendlich-vielblättrige Riemann'sche Fläche als Obermenge.

Diese Fläche kann nun, wie wir im folgenden zeigen wollen, aufgefaßt werden als die Vereinigungsmenge einer einparametrischen Schar von offenen Halbebenen. Verstehen wir nämlich unter „Halbebene von Normalenrichtung  $\Phi$  und Normalenabstand  $d$ “ — bezeichnet mit  $E(d, \Phi)$  — die um den Nullpunkt um den Winkel  $\Phi$  gedrehte Halbebene  $R(z) > d$ , wobei  $d$  irgend eine reelle Zahl bedeutet; setzen wir ferner fest, daß zwei Halbebenen  $E(d, \Phi_1)$  und  $E(d, \Phi_2)$  mit positivem Normalenabstand dann und nur dann ein gemeinsames Gebiet haben sollen, wenn sich die beiden Winkel um weniger als  $\pi$  unterscheiden, so können wir die Riemann'sche Fläche  $L(H)$  auffassen als die Vereinigungsmenge aller Halbebenen  $E(H, \Phi)$ . Betrachten wir nun alle Halbebenen von Normalenrichtung  $\Phi$ , die auf der Windungsfläche  $\mathfrak{M}$  gelegen sind (dazu gehören sicher alle Halbebenen  $E(d, \Phi)$  mit nicht kleinerem Normalenabstand als  $H$ ) und bezeichnen wir die untere Grenze ihrer Normalenabstände  $d$ , die eine Funktion des Winkels  $\Phi$  ist, mit  $k(\Phi)$ <sup>5)</sup>. Dann können wir die Windungs-

<sup>3)</sup> Weil die Funktion  $g(z)$  sektoriell beschränkt und nicht konstant ist, besitzt sie endliche Singularitäten. Unter diesen gibt es solche, die auf der Riemann'schen Fläche von  $g(z)$  radial mit dem Punkt  $z = \infty$  verbunden werden können.

<sup>4)</sup> Gegenüber dem Begriff des konkaven Gebietes in der  $z$ -Ebene hat der allgemeine Begriff eine gewisse Schwierigkeit. Dort gibt es eine allen konkaven Gebieten gemeinsame Obermenge, nämlich die volle  $z$ -Ebene, währenddem es hier kein alle umfassendes Ganze gibt.

<sup>5)</sup> a) Denken wir uns die Halbebene  $E(H, \Phi)$  in der  $z$ -Ebene gelegen, so ist die dort definierte Funktion  $g(z)$  auf Senkrechten zu ihrer Begrenzungsgeraden in die Halbebene  $x \cos \Phi + y \sin \Phi > k(\Phi)$  hinein fortsetzbar und zufolge der Definition der Zahl  $k(\Phi)$  hat sie in jeder Halbebene  $x \cos \Phi + y \sin \Phi > k(\Phi) - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , singuläre Punkte.

b)  $k(\Phi)$  kann auch negativ sein, wie das Beispiel  $(1 - z)^{-\rho}$ ,  $\rho$  positive reelle Zahl,  $\varphi = \pi$  zeigt.

fläche auffassen als die Vereinigungsmenge aller Halbebenen  $E(k(\Phi), \Phi)$ . Denn diese Vereinigungsmenge ist sicher in der Fläche  $\mathfrak{W}$  enthalten, weil jede Halbebene  $E(k(\Phi), \Phi)$  es ist. Umgekehrt ist jeder Punkt von  $\mathfrak{W}$  in der Menge enthalten. Denn sei  $P_2$  irgend ein innerer Punkt der Fläche  $\mathfrak{W}$ ,  $P_1$  irgend ein innerer Punkt der Fläche  $L(H)$ . Es gibt dann eine stetige Kurve  $C$  auf  $\mathfrak{W}$ , die  $P_1$  mit  $P_2$  verbindet. Jeder Punkt  $P$  dieser Kurve hat eine Halbebene  $E(P)$  als Umgebung, die ganz in  $\mathfrak{W}$  enthalten ist. Nun haben wegen der Stetigkeit die Abstände der Punkte  $P$  von der Begrenzungsgeraden ihrer Halbebenen  $E(P)$  eine positive untere Grenze  $\varrho > 0$ . Ich kann also auf  $C$  von  $P_1$  nach  $P_2$  laufend, endlich viele Punkte so bestimmen, daß die Halbebenen  $E(P')$  und  $E(P'')$  zweier aufeinanderfolgenden Punkte  $P'$  und  $P''$  je ein gemeinsames Gebiet haben. Da  $P_1$  in einer Halbebene  $E(H, \Phi_1)$  auf  $L(H)$  gelegen ist, so folgt dann, daß es eine Halbebene  $E(H, \Phi_2)$  gibt, so daß  $E(H, \Phi_2)$  und  $E(P_2)$  durch Parallelverschiebung auf  $\mathfrak{W}$  aus einander hervorgehen,  $E(P_2)$  also von der Form  $E(d, \Phi_2)$  ist und folglich  $P_2$  in der Halbebene  $E(k(\Phi_2), \Phi_2)$  enthalten ist. Die Windungsfläche  $\mathfrak{W}$  ist also die Vereinigungsmenge der Halbebenen  $E(k(\Phi), \Phi)$ . Die Begrenzungsgerade der Halbebene  $E(k(\Phi), \Phi)$  nennen wir *Stützgerade* der Windungsfläche von Normalenrichtung  $\Phi$ ,  $k(\Phi)$  heiße *Stützfunktion* von  $\mathfrak{W}$ .

3. Satz I. Die Stützfunktion  $k(\Phi)$  genügt der Ungleichung

$$-H \leq k(\Phi) \leq H,$$

sofern  $g(z)$  keine Konstante ist und zwar ist  $H$  die genaue obere Schranke.

Beweis: Der eine Teil der Ungleichung,  $k(\Phi) \leq H$  ist trivial. Ebenso folgt leicht, daß  $H$  die genaue obere Schranke ist. Denn wäre  $k(\Phi) \leq H^* < H$ , so wäre  $g(z)$  auf  $L(H^*)$  durchwegs regulär, was der Definition von  $H$  widerspricht. Es bleibt also nur noch die Ungleichung  $-H \leq k(\Phi)$  zu beweisen. Nehmen wir an, es sei für einen bestimmten Winkel  $\Phi$  die Funktion  $k(\Phi)$  kleiner als  $-H$ . Es genügt dann die positive Zahl

$$\varrho = \frac{H - k(\Phi)}{2}$$

$$(3) \quad k(\Phi) < -\varrho < -H.$$

Die Halbebenen  $E(H, \Phi)$  und  $E\left(H, \Phi + \frac{\pi}{2}\right)$  und  $E(H, \Phi + \pi)$  denken wir uns in der  $z$ -Ebene gelegen und die durch  $g(z)$  in  $E(H, \Phi)$  resp.

$E\left(H, \Phi + \frac{\pi}{2}\right)$  resp.  $E(H, \Phi + \pi)$  bestimmten regulären Funktionen wollen wir mit  $g_1(z)$  resp.  $g^*(z)$  resp.  $g_2(z)$  bezeichnen. Weil nun  $g(z)$  auf  $L(H)$  regulär ist und weil die Halbebenen  $E(H, \Phi)$  und  $E\left(H, \Phi + \frac{\pi}{2}\right)$  bzw. die Halbebenen  $E\left(H, \Phi + \frac{\pi}{2}\right)$  und  $E(H, \Phi + \pi)$  je ein gemeinsames Gebiet haben auf  $L(H)$ , so gehen  $g_1(z)$  und  $g^*(z)$  und  $g_2(z)$  durch unmittelbare analytische Fortsetzung auseinander hervor. Bedeutet also  $\mathfrak{B}_1$  das Funktionselement von  $g_1(z)$  im Punkte  $P_1 = \varrho e^{i\Phi}$ ,  $\varrho = \frac{H - k(\Phi)}{2}$ ,  $\mathfrak{B}_2$  das Funktionselement von  $g_2(z)$  im Punkte  $P_2 = \varrho e^{i(\Phi + \pi)}$ , bezeichnen ferner  $Q_1$  und  $Q_2$  die im gemeinsamen Gebiet von  $E(H, \Phi)$  und  $E\left(H, \Phi + \frac{\pi}{2}\right)$  bzw.  $E\left(H, \Phi + \frac{\pi}{2}\right)$  und  $E(H, \Phi + \pi)$  gelegenen Punkte  $\varrho\sqrt{2}e^{i(\Phi + \pi/4)}$  und  $\varrho\sqrt{2}e^{i(\Phi + 3/4\pi)}$ , so wird aus dem Funktionselement  $\mathfrak{B}_1$  durch analytische Fortsetzung längs des Streckenzugs  $P_1 Q_1 Q_2 P_2$  das Funktionselement  $\mathfrak{B}_2$  erhalten.

Nun läßt sich die Funktion  $g_1(z)$  längs Senkrechten zur Stützgeraden  $x \cos \Phi + y \sin \Phi = H$  von  $E(H, \Phi)$  in die ganze Halbebene  $E(k(\Phi), \Phi)$  hinein fortsetzen, ist also dort eindeutig und analytisch. Weil nach Voraussetzung  $k(\Phi) < -H$ , so haben die Halbebenen  $E(k(\Phi), \Phi)$  und  $E(H, \Phi + \pi)$  (beide sind in der  $z$ -Ebene gelegen) einen Parallelstreifen gemeinsam. Untersuchen wir das gegenseitige Verhalten der Funktionen  $g_1(z)$  und  $g_2(z)$  im Punkte  $P_2 = \varrho e^{i(\Phi + \pi)}$ , der wegen (3) im gemeinsamen Parallelstreifen liegt. Das Funktionselement von  $g_1(z)$  im Punkte  $P_2$  sei mit  $\mathfrak{B}_1^*$  bezeichnet. Es wird aus dem Element  $\mathfrak{B}_1$  durch analytische Fortsetzung längs der Strecke  $P_1 P_2$  erhalten. Weil nun  $g_1(z)$  in der Halbebene  $E(k(\Phi), \Phi)$  regulär ist und die beiden Streckenzüge  $P_1 Q_1 Q_2 P_2$  bzw.  $P_1 P_2$  in dieser Halbebene gelegen sind, so folgt aus dem Monodromiesatz, daß die Funktionselemente  $\mathfrak{B}_1^*$  und  $\mathfrak{B}_2$  im Punkte  $P_2$  identisch sind. Die Funktionen  $g_1(z)$  und  $g_2(z)$  gehen demnach durch unmittelbare analytische Fortsetzung auseinander hervor und bestimmen so eine in der ganzen  $z$ -Ebene bis auf den unendlichfernen Punkt reguläre Funktion, die mit  $g(z)$  identisch ist. Weil die Funktion  $g(z)$  auf der Riemann'schen Fläche  $L(V)$  ( $V > H$ ) sektoriell beschränkt ist, so ist sie es in der  $z$ -Ebene schlechthin und somit nach dem Satz von Liouville eine Konstante, womit der Satz bewiesen ist.

Durch geringe Modifizierung des Beweises erhalten wir, wie ohne

weiteres ersichtlich ist, das folgende, etwas allgemeinere Resultat: Die Stützfunktion  $k(\Phi)$  genügt für jeden Winkel  $\Phi$  der Ungleichung

$$k(\Phi + \pi/2) + k(\Phi - \pi/2) \geq 0,$$

sofern  $g(z)$  keine Konstante ist.

Im Anschluß an das soeben Bewiesene und aus einem später ersichtlichen Grunde sollen die selbstverständlichen Ungleichungen, denen die verschiedenen in Nr. 1 eingeführten Radien  $A, B, C, H, U$  und die in Nr. 2 definierte Funktion  $k(\Phi)$  genügen, zusammengestellt werden:

$$\begin{aligned} H &\leq B \\ C &\leq U \leq A \\ H &\leq C, \quad B \leq U \\ H &= \text{obere Grenze } k(\Phi). \end{aligned}$$

4. Untersuchen wir nun den Zusammenhang zwischen den Singularitäten der Funktion  $g(z)$  und ihrer Windungsfläche  $\mathfrak{B}$  etwas näher. Aus Bemerkung 5 folgt fast unmittelbar, daß die Funktion  $g(z)$  auf jeder Stützgeraden ihrer Windungsfläche mindestens eine singuläre Stelle besitzt. Denn entweder hat  $g(z)$  auf der Stützgeraden schon eine singuläre Stelle oder die singulären Stellen müssen sich gegen die Stützgerade häufen. Da sich diese aber nicht gegen ihren unendlichfernen Punkt häufen können, weil  $g(z)$  in den Halbebenen  $E(H, \Phi + \pi/2)$ ,  $E(H, \Phi - \pi/2)$  und  $E(k(\Phi), \Phi)$  regulär ist, so häufen sie sich in mindestens einem endlichen Punkte der Stützgeraden und dieser ist als Häufungspunkt singulärer Stellen wieder singulär.

Bemerkung: Ist für einen Winkel  $\Phi$

$$(4) \quad k(\Phi) = H,$$

so ist  $z = H e^{i\Phi}$  eine singuläre Stelle für die auf  $E(H, \Phi)$  definierte Funktion. Denn die Stützgerade  $x \cos \Phi + y \sin \Phi = H$  ist bis auf den Punkt  $H e^{i\Phi}$  ganz in  $\mathfrak{B}$  enthalten.

Wir zeigen weiter, daß für jeden singulären Punkt  $z_0 = x_0 + i y_0$  auf der Stützgeraden von Normalenrichtung  $\Phi$  für alle  $|\varphi| < \pi$  die Ungleichung

$$(5) \quad x_0 \cos(\Phi + \varphi) + y_0 \sin(\Phi + \varphi) \leq k(\Phi + \varphi)$$

*richtig ist.* Wäre sie nämlich nicht erfüllt, so gäbe es einen Winkel  $|\varphi_0| < \pi$ , so daß

$$x_0 \cos (\Phi + \varphi_0) + y_0 \sin (\Phi + \varphi_0) > k(\Phi + \varphi_0),$$

d. h.  $z_0 = x_0 + iy_0$  wäre innerer Punkt der Halbebene  $E(k(\Phi + \varphi_0), \Phi + \varphi_0)$ . Denkt man sich nämlich  $E(k(\Phi), \Phi)$  in der  $z$ -Ebene gelegen, so ist auch ihre Begrenzungsgerade und der Punkt  $z_0$  in der  $z$ -Ebene gelegen und weil  $|\varphi_0| < \pi$  ist, so besteht die Halbebene  $E(k(\Phi + \varphi_0), \Phi + \varphi_0)$  ja gerade aus allen jenen Punkten  $x + iy$  der  $z$ -Ebene, die der Ungleichung

$$x \cos (\Phi + \varphi_0) + y \sin (\Phi + \varphi_0) > k(\Phi + \varphi_0)$$

genügen. Als singulärer Punkt kann aber  $z_0$  nicht innerer Punkt der Halbebene  $E(k(\Phi + \varphi_0), \Phi + \varphi_0)$  sein.

Hieraus folgt, daß die Stützfunktion  $k(\Phi)$  einer bemerkenswerten Funktionalungleichung genügt. Es gilt nämlich der

*Satz II.* Ist  $k(\Phi)$  die Stützfunktion einer Windungsfläche in obigem Sinne und ist das Wertetripel  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  so gewählt, daß

$$(6) \quad \Phi_1 < \Phi_2 < \Phi_3, \quad \Phi_2 - \Phi_1 < \pi, \quad \Phi_3 - \Phi_2 < \pi,$$

dann genügt  $k(\Phi)$  der Ungleichung

$$(7) \quad k(\Phi_1) \sin (\Phi_3 - \Phi_2) + k(\Phi_2) \sin (\Phi_1 - \Phi_3) + k(\Phi_3) \sin (\Phi_2 - \Phi_1) \geq 0^{6)}.$$

*Beweis:* Es gibt auf der Stützgeraden von Normalenrichtung  $\Phi_2$ , wie oben gezeigt wurde, einen solchen Punkt  $(x_0, y_0)$ , daß die Ungleichung (5) für  $\Phi = \Phi_2$  und alle  $|\varphi| < \pi$  erfüllt ist. Speziell ist wegen  $\Phi_2 - \Phi_1 < \pi$ ,  $\Phi_3 - \Phi_2 < \pi$

$$x_0 \cos \Phi_1 + y_0 \sin \Phi_1 - k(\Phi_1) \leq 0,$$

$$x_0 \cos \Phi_3 + y_0 \sin \Phi_3 - k(\Phi_3) \leq 0.$$

Multiplizieren wir die erste dieser beiden Ungleichungen mit  $\sin (\Phi_3 - \Phi_2)$ , die zweite mit  $\sin (\Phi_2 - \Phi_1)$  und addieren wir, so ergibt sich nach kurzer Umformung  $(x_0 \cos \Phi_2 + y_0 \sin \Phi_2) \sin (\Phi_1 - \Phi_3) + k(\Phi_1) \sin (\Phi_3 - \Phi_2) + k(\Phi_3) \sin (\Phi_2 - \Phi_1) \geq 0$  und hieraus wegen  $x_0 \cos \Phi_2 + y_0 \sin \Phi_2 = k(\Phi_2)$  die Ungleichung (7).

<sup>6)</sup> Vgl. *P.*, S. 573—576.

5. Es läßt sich zeigen<sup>6)</sup>, daß alle reellwertigen Funktionen, die der Funktionalungleichung (7) mit der Bedingung (6) genügen, stetig und einseitig differenzierbar sind. Daher umhüllen die Stützgeraden  $x \cos \Phi + y \sin \Phi = k(\Phi)$  ein stetiges „Gebilde“  $\mathfrak{S}$  (das auch zu einem einzigen Punkt entarten kann; vergleiche Beispiel b) von Fußnote 5)), die Randkurve der Windungsfläche. Jene Punkte des Randes, die nicht innere Punkte einer ganz zum Rande gehörigen Strecke sind, wollen wir *extreme* Punkte nennen. Die Kreisscheibe z. B. hat nur extreme Punkte. Bei einem Polygon sind es die Ecken. Jede Stützgerade hat mit  $\mathfrak{S}$  entweder einen Punkt oder eine ganze Strecke gemeinsam und enthält folglich entweder einen extremen Punkt oder zwei extreme Punkte von  $\mathfrak{S}$ . Bezüglich dieser extremen Punkte gilt der

*Satz III. Jeder extreme Punkt des Gebildes  $\mathfrak{S}$  ist ein singulärer Punkt der Funktion  $g(z)$ , oder genauer ausgedrückt: Liegt der extreme Punkt  $P$  des Gebildes  $\mathfrak{S}$  auf einer Stützgeraden von Normalenrichtung  $\Phi$ , so läßt sich die Funktion  $g(z)$  von der Halbebene  $E(k(\Phi), \Phi)$  aus auf keiner durch  $P$  gehenden Geraden über diesen Punkt  $P$  hinaus fortsetzen<sup>7)</sup>.*

*Beweis:* Wir nehmen an,  $g(z)$  sei im Punkte  $P$ , also in einer ganzen Kreisscheibe um  $P$ , regulär und zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruche führt. Hierzu brauchen wir die Tatsache, daß durch jeden Punkt von  $\mathfrak{S}$  mindestens eine Stützgerade geht. Der extreme Punkt  $P$  ist dann entweder der einzige Punkt von  $\mathfrak{S}$ , der auf der durch  $P$  gehenden Stützgeraden liegt oder der eine Endpunkt der Strecke, die die genannte Stützgerade mit  $\mathfrak{S}$  gemeinsam hat. In beiden Fällen ist ersichtlich, daß der Rand der obigen Kreisscheibe vom Mittelpunkt  $P$  einen ganz in  $\mathfrak{S}$  gelegenen Bogen besitzt, dessen Öffnung  $\pi$  übersteigt. Die Endpunkte  $P_1$  und  $P_2$  des Bogens liegen je auf  $\mathfrak{S}$  und somit je auf einer Stützgeraden, deren Normalenrichtung wir mit  $\Phi_1$  resp.  $\Phi_2$  bezeichnen wollen. Auf der durch die Gerade  $P_1 P_2$  begrenzten offenen Halbebene, die  $P$  als innern Punkt enthält und mit  $E(P)$  bezeichnet werden soll, ist nun die Funktion  $g(z)$  durchwegs regulär, denn sie ist es in dem auf der Halbebene  $E(P)$  gelegenen Bereich der Kreisscheibe und der komplementäre Bereich auf  $E(P)$  ist in der Vereinigungsmenge der Halbebenen  $E(k(\Phi), \Phi)$ ,  $\Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2$  enthalten, weil das Kurvenstück  $P_1 P P_2$  ganz in der Kreisscheibe gelegen ist. Die Vereinigungsmenge der konkaven Gebiete  $\mathfrak{B}$  und  $E(P)$  ist ein konkaves Gebiet, worin  $g(z)$  durchwegs regulär ist und das umfassender ist als  $\mathfrak{B}$ , weil es  $P$  als innern Punkt enthält, ein Sachverhalt, der mit der Definition von  $\mathfrak{B}$  im Widerspruche steht.

<sup>6)</sup> Vergl. *P.* S. 573—576.

<sup>7)</sup> Vgl. *P.* S. 577.

*Quasiganze Funktionen, ihre Ordnung und ihr Typus.*

6. Unter einer quasiganzen Funktion  $G(z)$  wollen wir im folgenden eine auf der ganzen logarithmischen Fläche reguläre (eindeutige und analytische) Funktion verstehen, die auf jeder Fläche  $\overline{L(V)}$  sektoriell beschränkt ist. Hierbei bedeutet  $\overline{L(V)}$  die Komplementärmenge von  $L(V)$  bezüglich der logarithmischen Fläche  $L$ , also jenen Teil der logarithmischen Fläche, der der abgeschlossenen Kreisscheibe  $|z| \leq V$  überlagert ist. Gibt es eine endliche Zahl  $\nu$ , so daß der Ausdruck

$$(8) \quad |G(z)| \cdot e^{-|z|^\nu}$$

auf  $L$  sektoriell beschränkt bleibt, so nennen wir  $G(z)$  eine quasiganze Funktion von endlicher Ordnung und bezeichnen die untere Grenze  $\rho$  der Zahlen  $\nu$ , die der obigen Bedingung genügen, als ihre *Ordnung* (genauer ausgedrückt, als ihre *sektorielle Ordnung*). Es ist dann für alle  $\varepsilon > 0$  und  $\nu = \rho + \varepsilon$  der Ausdruck (8) auf  $L$  sektoriell beschränkt, und es gibt zu jedem  $\varepsilon > 0$  und  $\nu = \rho - \varepsilon$  einen Sektor, auf dem (8) unbeschränkt ist.

Sei nun  $G(z)$  eine quasiganze Funktion von endlicher Ordnung  $\rho$ . Gibt es endliche Zahlen  $V$ , so daß der Ausdruck

$$(9) \quad |G(z)| \cdot e^{-V|z|^\rho}$$

auf  $L$  sektoriell beschränkt bleibt, so wollen wir die untere Grenze  $\chi$  der Zahlen  $V$ , die der genannten Bedingung genügen, *sektoriellen Typus* der Funktion  $G(z)$  der Ordnung  $\rho$  nennen. Für den Fall, daß es keine endliche Zahl  $V$  von der obigen Eigenschaft gibt, setzen wir  $\chi = \infty$ . Ist  $\chi \neq (0, \infty)$ , so sprechen wir von Normal- oder Mitteltypus. Hat hingegen  $\chi$  den extremen Wert 0 oder  $\infty$ , so spricht man von Minimal- resp. Maximaltypus. Es bedeute nun  $G(z)$  eine quasiganze Funktion vom sektoriellen Mitteltypus der Ordnung  $\rho$ . Die reelle Funktion

$$(10) \quad h(\Phi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |G(r e^{i\Phi})|$$

des Winkels  $\Phi$  mißt dann das Anwachsen der Funktion  $G(z)$  längs des Halbstrahles der Richtung  $\Phi$ . Wir nennen sie den (Phragmén-Lindelöf'schen) *Wachstumsindikator* von  $G(z)$ . Sie ist stetig und erfüllt die Funktionalungleichung

$$(11) \quad h(\Phi_1) \sin \rho(\Phi_3 - \Phi_2) + h(\Phi_2) \sin \rho(\Phi_1 - \Phi_3) + h(\Phi_3) \sin \rho(\Phi_2 - \Phi_1) \geq 0$$

für alle Wertetripel  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , die den Bedingungen

$$(12) \quad \Phi_1 < \Phi_2 < \Phi_3, \quad \Phi_2 - \Phi_1 < \pi/\rho, \quad \Phi_3 - \Phi_2 < \pi/\rho$$

genügen. Ferner ist für jedes  $\varepsilon > 0$  der Ausdruck

$$|G(z)| \cdot e^{-(h(\Phi) + \varepsilon)|z|^\rho}, \quad \Phi = \arg z$$

auf  $L$  sektoriell beschränkt, woraus sich unmittelbar ergibt, daß die obere Grenze der Funktion  $h(\Phi)$  für  $-\infty < \Phi < \infty$  gleich dem sektoriellen Typus  $\chi$  der Funktion  $G(z)$  ist<sup>8)</sup>.

7. Wir wollen jetzt voraussetzen, daß  $G(z)$  auf jeder Riemann'schen Fläche  $\overline{L(V)}$  schlechthin beschränkt sei. Es hat dann  $|G(re^{i\Phi})|$  für  $-\infty < \Phi < \infty$  eine endliche obere Grenze, die wir mit  $M(r)$  bezeichnen. Im Falle eigentlicher ganzer Funktionen ist  $\lg M(r)$  eine stetige, monoton wachsende und konvexe Funktion von  $\lg r$ . Gemäß einem Satz von *Doetsch* läßt sich dieser Sachverhalt unverändert auf quasiganze Funktionen übertragen<sup>9)</sup>. Ist  $G(z)$  von der Ordnung  $\rho < \infty$ , so bezeichnen wir die untere Grenze der Zahlen  $V$  (falls es solche gibt), wofür der Ausdruck (9) auf  $L$  schlechthin beschränkt bleibt (im Gegensatz zum sektoriellen Typus), als den *gewöhnlichen Typus*  $\beta$  der Funktion  $G(z)$ . Falls es keine Zahlen  $V$  der obigen Eigenschaft gibt, wird  $\beta = \infty$  gesetzt. Es ist

$$\beta = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \lg M(r).$$

Zwischen dem gewöhnlichen Typus  $\beta$  und dem sektoriellen Typus  $\chi$  besteht die triviale Ungleichung

$$\chi \leq \beta.$$

Daß es wirklich gerechtfertigt ist, einen sektoriellen und gewöhnlichen Typus zu unterscheiden, daß also bei quasiganzen Funktionen der sektorielle und der gewöhnliche Typus miteinander nicht übereinzustimmen brauchen, wie dies bei eigentlichen ganzen Funktionen der Fall ist, kann an folgendem Beispiel erkannt werden.

8. Ersetzen wir in der überall auf der logarithmischen Fläche  $L$  absolut konvergenten Reihe

$$(13) \quad G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k} - z^{2k+9^{-k}}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} (1 - z^{9^{-k}})$$

<sup>8)</sup> Vgl. *E. Phragmén et E. Lindelöf*, Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse, *Acta math.*, t. 31, 1908, p. 381—406.

<sup>9)</sup> Vgl. *Doetsch*, Über die obere Grenze des absoluten Betrages einer analytischen Funktion auf einer Geraden, *Math. Zeitschrift*, Bd. 8, 1920.

die Glieder durch ihre absoluten Beträge und bezeichnen wir ihre Summe mit  $G^*(r)$ , so ist

$$(14a) \quad G^*(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k} + r^{2k+9^{-k}}}{(2k)!} > e^r + e^{-r}$$

$$(14b) \quad G^*(r) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2r^{2k+1}}{(2k)!} = r(e^r + e^{-r})$$

für  $r > 1$ . Wird in (13)  $z = r \cdot e^{9^{m_i} \pi}$  gesetzt, so ist

$$z^{2k} = r^{2k}$$

$$z^{9^{-k}} = r^{9^{-k}} \cdot e^{9^{m-k} \cdot i\pi} = -r^{9^{-k}} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots, m$$

und daher für jedes positive ganzzahlige  $m$

$$|G(r e^{9^{m_i} \pi})| \geq \sum_{k=1}^m \frac{r^{2k} + r^{2k+9^{-k}}}{(2k)!} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{r^{2k} - r^{2k+9^{-k}}}{(2k)!},$$

also

$$\text{Obere Grenze } |G(z)| = G^*(r) \\ |z| = r$$

Aus dieser Gleichung und aus (14a) und (14b) ergibt sich, daß der gewöhnliche Typus der Funktion  $G(z)$  gleich 1 ist.

Andererseits ist  $|e^w - 1| \leq 2|w|$  für  $|w| \leq 1$  oder

$$|1 - z^{9^{-k}}| = |e^{9^{-k} \lg z} - 1| < \frac{2|\lg z|}{9^k}$$

wenn  $|\lg z| < 9^k$ . Die letztere Ungleichung gilt also sicherlich dann, wenn  $k > \lg|\lg z|$ . Daher folgt für  $|z| = r > 1$

$$|G(z)| < \sum_{k \leq \lg|\lg z|} \frac{r^{2k}(1+r)}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{2|\lg z|}{3^{2k}}$$

$$< 6e^{(2\lg|\lg z|+1)\lg r} + 2|\lg z|(e^{r/3} + e^{-r/3}),$$

woraus sich ergibt, daß der sektorielle Typus der Funktion  $G(z)$  nicht größer ist als  $\frac{1}{3}$ .

9. Ist  $G(z)$  höchstens vom sektoriellen Mitteltypus der Ordnung 1, so nennen wir sie *quasiganze Funktion vom Exponentialtypus* und zwar genau vom Exponentialtypus, wenn  $G(z)$  genau vom Mitteltypus der Ordnung 1 ist. Auf jeden Fall gibt es endliche Zahlen  $V$ , so daß der Ausdruck

$$(15) \quad |G(z)| \cdot e^{-V|z|}$$

auf  $L$  sektoriell beschränkt bleibt. Bezeichnet  $\chi$  die untere Grenze dieser Zahlen  $V$ , so heißt  $G(z)$  quasiganze Funktion vom (sektoriellen) Exponentialtypus  $\chi$ . Alle Funktionen von höchstens dem sektoriellen Minimaltypus der Ordnung 1 sind vom Exponentialtypus 0. Die untere Grenze  $\beta$  der Zahlen  $V$  (falls es solche gibt), für welche (15) auf  $L$  schlechthin beschränkt bleibt, nennen wir den „gewöhnlichen Exponentialtypus“ der Funktion  $G(z)$ . Analog wollen wir die reelle Funktion

$$h(\Phi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \lg |G(re^{i\Phi})|$$

den „exponentiellen Wachstumsindikator“ nennen.

10. Sei nun

$$(16) \quad \sum_1^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$$

eine Dirichlet'sche Reihe, die aus (2) durch Ersetzen von  $z$  durch  $z^{-1}$  erhalten wird und überall auf  $L$  konvergiert; sie ist dann auf jeder Riemann'schen Fläche  $L(V)$  sektoriell gleichmäßig konvergent und stellt somit eine auf der logarithmischen Fläche  $L$  eindeutige und analytische Funktion dar, die auf jeder Fläche  $L(V)$  sektoriell beschränkt, also eine quasiganze Funktion ist. Jede Partialsumme der Reihe (16) ist von der Ordnung 0. Aber es läßt sich leicht durch Beispiele belegen, daß die Ausdrücke

$$\left| \sum_1^N a_n z^{\lambda_n} \right| \cdot e^{-V|z|^\rho}$$

bei festem  $V$  und  $\rho$  nicht etwa in jedem Sektor auf  $L$  in  $N$  gleichmäßig beschränkt zu sein brauchen. Es gilt jedoch ein Satz, der einen dem Konvergenzverhalten Dirichlet'scher Reihen (2) analogen Sachverhalt ausdrückt und in dem für das folgende allein wichtigen Spezialfall folgendermaßen lautet:

Satz IV. Ist die Folge

$$(17) \quad \left| \sum_1^N a_n r^{\lambda_n} e^{i\lambda_n \Phi_0} \right| \cdot e^{-Vr}, \quad N=1, 2, \dots$$

für  $r > 0$  in  $N$  gleichmäßig beschränkt, so ist für alle  $\eta > 0$  die Folge

$$\left| \sum_1^N a_n z^{\lambda_n} \right| \cdot e^{-(V+\eta)r}, \quad N=1, 2, \dots$$

in jedem Sektor auf  $L$  gleichmäßig in  $N$  beschränkt<sup>10)</sup>.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert eine Zahl  $S$ , so daß

$$\left| \sum_1^N a_n (r e^\eta \cdot e^{i\Phi_0})^{\lambda_n} \right| \cdot e^{-Vr e^\eta} < S$$

für alle  $N = 1, 2, \dots$  und  $r > 0, \eta > 0$ . Mittels der Abel'schen partiellen Summation

$$\sum_1^N A_n B_n = \sum_1^{N-1} (B_n - B_{n+1}) \sum_{\nu=1}^n A_\nu + B_N \sum_{\nu=1}^N A_\nu$$

folgt, indem  $B_n = e^{-(\eta+i(\Phi_0-\Phi))\lambda_n}$  und  $A_n = a_n (r e^\eta \cdot e^{i\Phi_0})^{\lambda_n}$  gesetzt wird

$$\begin{aligned} \sum_1^N a_n (r e^{i\Phi})^{\lambda_n} &= \sum_{n=1}^{N-1} (e^{-(\eta+i(\Phi_0-\Phi))\lambda_n} - e^{-(\eta+i(\Phi_0-\Phi))\lambda_{n+1}}) \sum_{\nu=1}^n a_\nu (r e^\eta \cdot e^{i\Phi_0})^{\lambda_\nu} \\ &\quad + e^{-(\eta+i(\Phi_0-\Phi))\lambda_N} \cdot \sum_1^N a_\nu (r e^\eta \cdot e^{i\Phi_0})^{\lambda_\nu}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &\left| e^{-(\eta+i(\Phi_0-\Phi))\lambda_n} - e^{-(\eta+i(\Phi_0-\Phi))\lambda_{n+1}} \right| \\ &= \left| (\eta+i(\Phi_0-\Phi)) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-x(\eta+i(\Phi_0-\Phi))} dx \right| \leq \frac{|\eta+i(\Phi_0-\Phi)|}{\eta} (e^{-\lambda_n \eta} - e^{-\lambda_{n+1} \eta}), \end{aligned}$$

also

$$\left| \sum_1^N a_n (r e^{i\Phi})^{\lambda_n} \right| \cdot e^{-Vr e^\eta} \leq \frac{|\eta+i(\Phi_0-\Phi)|}{\eta} S,$$

womit alles bewiesen ist.

<sup>10)</sup> Vgl. *G. Pólya*, L. M. S. Proc., 1925, S. 11, wo der (exponentielle) Wachstumsindikator einer Folge von Polynomen  $P_n(z)$  definiert wird, die für alle  $z$  und alle  $n$  bei geeigneter Wahl der Konstanten  $A, B$  der Ungleichung  $|P_n(z)| < A e^{B|z|}$  genügen; vgl. auch Nr. 15, wo diese Definition auf eine Folge quasiganzer Funktionen vom Exponentialtypus übertragen wird. Hier wird eigentlich bewiesen, daß speziell für die Folge der Partialsummen einer ganzen bzw. einer quasiganzen Funktion vom Exponentialtypus das Indikatordiagramm ein Kreis ist.

Hieraus ergibt sich, daß entweder für keine Zahl  $V$  die Folge (17) auf  $L$  sektoriell gleichmäßig beschränkt ist, oder daß sie für alle positiven Zahlen  $V$  es ist, oder daß eine solche endliche Zahl  $\gamma$  existiert, daß die Folge (17) für alle  $V > \gamma$  sektoriell gleichmäßig beschränkt ist, während sie dies für keine Zahl  $V < \gamma$  ist. Nennen wir die Zahl  $\gamma$  den „gewöhnlichen (exponentiellen) Konvergenztypus“ der Reihe (16). Entsprechend folgt, daß die Folge

$$(18) \quad \left( \sum_1^N |a_n| r^{\lambda_n} \right) \cdot e^{-Vr}, \quad N=1, 2, \dots, r > 0,$$

entweder für keine positive Zahl  $V$  in  $N$  gleichmäßig beschränkt bleibt oder daß sie es für alle positiven Zahlen  $V$  ist oder daß eine solche endliche Zahl  $\alpha > 0$  existiert, daß die Folge (18) für alle  $V$  größer als  $\alpha$  in  $N$  gleichmäßig beschränkt, währenddem sie dies für keine Zahl  $V < \alpha$  ist. Falls  $\alpha$  endlich ist, folgt, daß insbesondere die Reihe (16) überall absolut konvergiert. Wir nennen  $\alpha$  den „absoluten (exponentiellen) Konvergenztypus“ der Reihe (16). Weil die Folge (18) bei festem  $r$  in  $N$  monoton wächst, so ist der absolute Konvergenztypus der Reihe (16) gleich dem gewöhnlichen

Exponentialtypus der Funktion  $\sum_1^{\infty} |a_n| z^{\lambda_n}$ . Die Folge (17) ist für  $V > \alpha$  (sofern die Reihe (16) einen endlichen absoluten Konvergenztypus  $\alpha$  besitzt) auf  $L$  schlechthin beschränkt. Die untere Grenze  $\omega$  der Zahlen  $V$ , für die die Folge (17) auf  $L$  schlechthin beschränkt bleibt, nennen wir den „gleichmäßigen (exponentiellen) Konvergenztypus“.

Die verschiedenen Typen  $\chi, \beta, \gamma, \omega, \alpha$  einer quasiganzen Funktion vom Exponentialtypus bzw. ihr Wachstumsindikator  $h(\Phi)$  genügen den selbstverständlichen Ungleichungen

$$\begin{aligned} \chi &\leq \beta \\ \gamma &\leq \omega \leq \alpha \\ \chi &\leq \gamma, \quad \beta \leq \omega \\ \chi &= \text{obere Grenze } h(\Phi). \end{aligned}$$

Ein Vergleich dieser Ungleichungen mit den entsprechenden am Ende von Nr. 4 gibt einen ersten Hinweis auf den in der Einleitung angekündigten Dualismus.

*Quasiganze Funktionen vom Exponentialtypus und ihre  
Borel'schen Transformierten.*

11. Die alsbald zu definierenden Borel'schen Transformierten der quasiganzen Funktionen vom Exponentialtypus (Nr. 9) bilden eine spezielle Klasse der im Unendlichen quasiregulären Funktionen (Nr. 1), die „im Unendlichen quasiregulären Funktionen vom minimalen Verschwindungsgrad 1“. Hierbei nenne ich eine quasireguläre Funktion  $g(z)$  vom minimalen Verschwindungsgrad 1, wenn die Funktion  $g^*(z) = zg(z)$  auf einer Riemann'schen Fläche  $L(V)$  ( $V$  genügend groß) sektoriell beschränkt bleibt. Verstehen wir unter dem Integralzeichen  $\int_0^{(\Phi)\infty}$  die Integration längs des Halbstrahles von der Richtung  $\Phi$  auf  $L$ , so gilt der

*Satz V. Ist  $G(z)$  eine quasiganze Funktion vom endlichen sektoriellen Exponentialtypus  $\chi$ , so existiert das Integral*

$$(I) \quad \int_0^{(\Phi)\infty} e^{-z\xi} \cdot G(\xi) d\xi$$

für alle Punkte  $z$  der Halbebene  $E(\chi, -\Phi)$  und alle diese zu den verschiedenen Winkeln  $\Phi$  gehörigen Integrale stellen, jedes in seiner Halbebene, die analytische Fortsetzung ein- und derselben Funktion  $g(z)$  vom minimalen Verschwindungsgrad 1 dar, die auf der Riemann'schen Fläche  $L(\chi)$  durchwegs eindeutig und analytisch ist und die Borel'sche Transformierte von  $G(z)$  genannt wird. Ihr Holomorphieradius  $H$  ist also nicht größer als  $\chi$ .

*Beweis:* a) Sei  $z = x + iy$  ein Punkt der Halbebene  $E(\chi, -\Phi)$ . Dann ist  $x \cos(-\Phi) + y \sin(-\Phi) > \chi$  und es gibt eine positive Zahl  $\eta$ , so daß noch  $x \cos \Phi - y \sin \Phi > \chi + 2\eta$  ist. Daher ist

$$R(z\xi) = R((x + iy)te^{i\Phi}) = t(x \cos \Phi - y \sin \Phi) > t(\chi + 2\eta).$$

Ferner gibt es nach Voraussetzung eine zum Winkel  $\Phi$  gehörige Zahl  $T_0(\Phi)$ , so daß für  $t > T_0(\Phi)$  die Ungleichung

$$(19) \quad |G(te^{i\Phi})| < e^{(x+\eta)t}$$

erfüllt ist, woraus für  $T_1 > T > T_0(\Phi)$  durch einfache Integralabschätzung folgt

$$\left| \int_T^{(\Phi)T_1} e^{-z\xi} \cdot G(\xi) d\xi \right| \leq \int_T^{(\Phi)T_1} e^{-R(z\xi)} \cdot |G(\xi)| |d\xi| \leq \int_T^\infty e^{-\eta t} dt = \frac{e^{-\eta T}}{\eta}.$$

Da  $\frac{e^{-\eta T}}{\eta}$  mit unbegrenzt wachsendem  $T$  gegen 0 strebt, ist die Existenz des Integrals für  $z \in E(\chi, -\Phi)$  nachgewiesen. Es stellt eine in der Halbebene  $E(\chi, -\Phi)$  eindeutige und analytische Funktion dar.

b) Unterscheiden sich nun die Winkel  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  um weniger als  $\pi$ , ist also  $0 < \Phi_2 - \Phi_1 < \pi$ , so haben die beiden Halbebenen  $E(\chi, -\Phi_1)$  und  $E(\chi, -\Phi_2)$  auf  $L(\chi)$  ein gemeinsames Gebiet, und wir wollen im folgenden untersuchen, wie sich die Integrale

$$(20) \quad \int_0^{(\Phi_1)\infty} e^{-z\zeta} \cdot G(\zeta) d\zeta \quad \text{und} \quad \int_0^{(\Phi_2)\infty} e^{-z\zeta} \cdot G(\zeta) d\zeta$$

in jenem Gebiete gegenseitig verhalten. Zu diesem Zwecke betrachten wir die beiden Integrale auf dem Halbstrahl

$$(21) \quad z = re^{i\varphi}, \quad \varphi = -\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}, \quad r > \frac{\chi + 2\eta}{\cos \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}},$$

der beiden Halbebenen  $E(\chi, -\Phi_1)$  und  $E(\chi, -\Phi_2)$  angehört. Es ist

$$(22) \quad R(zte^{i\Phi}) = rt \cos\left(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) \geq rt \cos \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} > (\chi + 2\eta)t$$

für  $\Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2$ . Andererseits gibt es nach Voraussetzung eine Zahl  $T^*(\Phi_1, \Phi_2)$ , so daß für jedes  $\Phi$  im Intervall  $(\Phi_1, \Phi_2)$  die Ungleichung (19) erfüllt ist, sobald  $t > T^*$ . Integrieren wir nun die Funktion  $e^{-z\zeta} \cdot G(\zeta)$  im positiven Sinne über die aus den beiden Strecken

$$\zeta = te^{i\Phi_1}, \quad \zeta = te^{i\Phi_2}, \quad T_1 \leq t \leq T_2$$

und den Kreisbögen

$$\zeta = T_1 e^{i\varphi}, \quad \zeta = T_2 e^{i\varphi}, \quad \Phi_1 \leq \varphi \leq \Phi_2$$

bestehende geschlossene Kurve, so wird das Integral verschwinden, wie wir auch die Radien  $T_1$  und  $T_2$  wählen. Da  $G(\zeta)$  in der Umgebung des Nullpunktes sektoriell beschränkt ist, so strebt das Integral über dem Kreisbogen vom Radius  $T_1$  mit  $T_1$  gegen 0. Es bleibt somit noch

$$\int_0^{(\Phi_1)T_1} e^{-z\zeta} \cdot G(\zeta) d\zeta - \int_0^{(\Phi_2)T_2} e^{-z\zeta} \cdot G(\zeta) d\zeta = -iT_2 \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} e^{-zT_2 e^{i\varphi}} \cdot G(T_2 e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi.$$

Der absolute Betrag des rechten Gliedes dieser Gleichung ist aber nach (19), (21), (22) kleiner als

$$T_2 e^{T_2 \left( \chi + \eta - r \cos \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} \right)} \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) < T_2 \cdot (\Phi_2 - \Phi_1) e^{-\eta T_2} \text{ für } T_2 > T^*(\Phi_1, \Phi_2)$$

und da der letzte Ausdruck mit unbegrenzt wachsendem  $T_2$  gegen 0 strebt, so stimmen die durch die beiden Integrale (20) definierten analytischen Funktionen längs eines ganzen Halbstrahles miteinander überein. Die eine Funktion ist also die unmittelbare analytische Fortsetzung der anderen. Mittels eines aus der analytischen Fortsetzung bekannten Kettenverfahrens folgt dann sofort, daß die eine der durch irgend zwei Integrale (20) (wo  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  irgend zwei Winkel bedeuten) definierten Funktionen aus der anderen durch analytische Fortsetzung gewonnen werden kann. Sie bestimmen also eine auf  $L(\chi)$  reguläre Funktion  $g(z)$ .

c) Beim Beweise, daß  $g(z)$  vom minimalen Verschwindungsgrad 1 ist, kommt es lediglich darauf an, das Integral (I) günstig abzuschätzen. Nach Voraussetzung gibt es eine Zahl  $T_1$ , derart, daß die Ungleichung (19) für jeden Punkt  $te^{i\Phi}$  in einem vorgegebenen Sektor  $(\Phi_1, \Phi_2)$  auf  $L$  erfüllt ist, sobald  $t > T_1$ . Die endliche obere Schranke von  $|G(te^{i\Phi})|$  im Bereich  $0 < t \leq T_1$ ,  $\Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2$  sei mit  $S$  bezeichnet. Die Integralabschätzung ergibt dann für  $r > \chi + 2\eta$  und  $\Phi_1 < \Phi < \Phi_2$

$$(23) \quad |g(re^{-i\Phi})| \leq \int_0^{(\Phi)\infty} e^{-R(z\xi)} |G(\xi)| |d\xi| \leq S \int_0^{T_1} e^{-rt} dt + \int_{T_1}^{\infty} e^{(\chi+\eta-r)t} dt < \frac{S}{r} + \frac{e^{(\chi+\eta)T_1}}{\eta} \cdot e^{-rT_1}.$$

Da das Maximum des Ausdruckes  $re^{-rT_1}$  gleich  $\frac{1}{T_1}e^{-1}$  ist, so folgt

$$(24) \quad |g^*(z)| = r \cdot |g(re^{-i\Phi})| < S + \frac{e^{(\chi+\eta)T_1-1}}{\eta T_1}$$

für jedes  $z$  in dem Sektor  $(-\Phi_1, -\Phi_2)$  auf  $L(\chi + 2\eta)$ , womit der ganze Satz bewiesen ist.

Aus dem Beweis ergibt sich unmittelbar der folgende

*Zusatz: Ist  $G(z)$  eine quasiganze Funktion vom endlichen gewöhnlichen Exponentialtypus  $\beta$ , so sind ihre Borel'sche Transformierte  $g(z)$  und die Funktion  $g^*(z) = z \cdot g(z)$  auf  $L(\beta + \eta)$ ,  $\eta > 0$  schlechthin beschränkt. Ihr Beschränktheitsradius  $B$  ist also nicht größer als  $\beta$ .*

Denn man braucht nur im Beweise überall  $\chi$  durch  $\beta$  zu ersetzen und zu beachten, daß sich nach Voraussetzung von  $\Phi$  unabhängige Zahlen  $T_1$  und  $S$  so bestimmen lassen, daß die Ungleichung (24) für jeden Punkt  $z$  der Fläche  $L(\beta + 2\eta)$  Gültigkeit hat.

12. Bezeichnet  $C(H + \eta, \Phi)$ ,  $\eta > 0$ , die im positiven Sinn durchlaufene Kurve auf  $L$ , welche aus den beiden Halbstrahlen

$$re^{i(\Phi-\pi)}, re^{i(\Phi+\pi)}, r \geq H + \eta$$

und dem Kreisbogen von der Länge  $2\pi(H + \eta)$

$$(H + \eta)e^{i\varphi}, \Phi - \pi \leq \varphi \leq \Phi + \pi$$

besteht, so gilt der zum Satz V duale

Satz VI. Ist  $g(z)$  eine im Unendlichen quasireguläre Funktion vom minimalen Verschwindungsgrad 1 und  $H$  ihr Holomorphieradius, so existiert das Integral

$$(II) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C(H+\eta, \Phi)} e^{z\zeta} \cdot g(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(H+\eta, \Phi)} e^{z\zeta} \cdot g^*(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad \eta > 0,$$

für alle  $z$  der Halbebene  $E(-\Phi)$  und alle diese zu den verschiedenen Winkeln  $\Phi$  gehörigen Integrale stellen, jedes in seiner Halbebene, die analytische Fortsetzung ein- und derselben, von  $\eta$  unabhängigen quasiganzen Funktion  $G(z)$  dar, welche die Borel'sche Adjungierte zu  $g(z)$  genannt wird. Ihr sektorieller Exponentialtypus  $\chi$  ist nicht größer als  $H$ .

Beweis: a) Sei  $z = x + iy$  ein Punkt der Halbebene  $E(-\Phi)$ . Dann ist

$$(25) \quad R(ze^{i\Phi}) = x \cos \Phi - y \sin \Phi > 0$$

und

$$(26) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C(H+\eta, \Phi)} e^{z\zeta} \cdot g^*(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi-\pi}^{\Phi+\pi} e^{z(H+\eta)e^{i\varphi}} g^*((H+\eta)e^{i\varphi}) d\varphi + \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{H+\eta}^{\infty} e^{zte^{i(\Phi+\pi)}} g^*(te^{i(\Phi+\pi)}) \frac{dt}{t} \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{H+\eta}^{\infty} e^{zte^{i(\Phi-\pi)}} g^*(te^{i(\Phi-\pi)}) \frac{dt}{t} \end{cases}$$

Das erste Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung existiert sicher. Da  $|g^*(\zeta)|$  nach Voraussetzung im Sektor  $|\zeta| \leq H + \eta$ ,  $\Phi - \pi \leq \arg \zeta$

$\leq \Phi + \pi$  eine endliche obere Schranke  $S_1$  besitzt, so ist der Integrand in den beiden letzten Integralen absolut genommen kleiner als  $S_1 e^{-R(zte^{i\Phi})} \cdot \frac{1}{t}$  und wegen (25) existieren auch diese beiden Integrale und damit das Integral II für jedes  $z$  der Halbebene  $E(-\Phi)$ . Da der Weg  $C(H + \eta, \Phi)$  bei beliebiger Variation der positiven Zahl  $\eta$  keine Singularitäten des Integranden überstreicht, so stellt das Integral II eine in der Halbebene  $E(-\Phi)$  reguläre und von  $\eta$  unabhängige Funktion von  $z$  dar.

b) Unterscheiden sich die Winkel  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  um weniger als  $\pi$ , ist also  $0 < \Phi_2 - \Phi_1 < \pi$ , so haben die Halbebenen  $E(-\Phi_1)$  und  $E(-\Phi_2)$  auf der logarithmischen Fläche ein gemeinsames Gebiet und wir wollen im folgenden untersuchen, wie sich die beiden Integrale

$$(27) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C(H+\eta, \Phi_1)} e^{z\zeta} \cdot g^*(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C(H+\eta, \Phi_2)} e^{z\zeta} g^*(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

in jenem Gebiete gegenseitig verhalten. Zu diesem Zwecke betrachte ich sie auf dem Halbstrahl

$$z = r e^{-i \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}}, \quad r > 0,$$

der beiden Halbebenen  $E(-\Phi_1)$  und  $E(-\Phi_2)$  angehört. Es ist

$$(28) \quad R(zte^{i\Phi}) = rt \cos\left(\Phi - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) > rt \cos \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2} > 0 \quad \text{für} \quad \Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2.$$

Sei nun  $T$  irgend eine Zahl größer als  $H + \eta$ . Lassen wir die in der Fläche  $L(T)$  enthaltenen Teile der Kurve  $C(H + \eta, \Phi)$  weg und bezeichnen wir die so erhaltene neue Kurve mit  $C(H + \eta, \Phi, T)$ . Ihre Endpunkte sind  $T e^{i(\Phi + \pi)}$  und  $T e^{i(\Phi - \pi)}$ . Drehe ich nun die Kurve  $C_1 = C(H + \eta, \Phi_1, T)$  im positiven Sinn um den Winkel  $\Phi_2 - \Phi_1$ , so geht sie über in die Kurve  $C_2 = C(H + \eta, \Phi_2, T)$  und die Endpunkte von  $C_1$  beschreiben hierbei zwei Kreisbogen vom Radius  $T$  um den Mittelpunkt 0, die entsprechende Punkte von  $C_1$  und  $C_2$  miteinander verbinden. Der Kreisbogen, der  $T e^{i(\Phi_1 - \pi)}$  mit  $T e^{i(\Phi_2 - \pi)}$  verbindet, sei mit  $K_-$  bezeichnet, der andere, der  $T e^{i(\Phi_1 + \pi)}$  mit  $T e^{i(\Phi_2 + \pi)}$  verbindet, entsprechend mit  $K_+$ . Integrieren wir nun die Funktion  $e^{z\zeta} g(\zeta)$  über die aus den Stücken  $C_1, C_2, K_-, K_+$  bestehende geschlossene Kurve, so wird das Integral für jedes  $T > H + \eta$  verschwinden. Denn bei der Drehung von  $\Phi_1$  nach  $\Phi_2$  hat  $C(H + \eta, \Phi, T)$  keine Singularitäten von  $e^{z\zeta} \cdot g(\zeta)$  überstrichen. Wir haben also

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} e^{z\zeta} g^*(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} - \oint_{C_2} e^{z\zeta} \cdot g^*(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} &= - \oint_{K^+} e^{z\zeta} g^*(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + \oint_{K^-} e^{z\zeta} g^*(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= - \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \{ e^{zTe^{i(\Phi+\pi)}} g^*(Te^{i(\Phi+\pi)}) - e^{zTe^{i(\Phi-\pi)}} g^*(Te^{i(\Phi-\pi)}) \} i d\Phi. \end{aligned}$$

Da  $|g^*(\zeta)|$  im Sektor  $|\zeta| \geq H + \eta$ ,  $\Phi_1 - \pi \leq \arg \zeta \leq \Phi_2 + \pi$  eine endliche obere Schranke  $S_2$  besitzt, so ist nach (28) das letzte Integral absolut genommen kleiner als

$$2S_2 \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} e^{-R(zTe^{i\Phi})} d\Phi < 2S_2 (\Phi_2 - \Phi_1) e^{-Tr \cos \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}}.$$

Da dieser Ausdruck mit unbegrenzt wachsendem  $T$  gegen 0 strebt und die Kurven  $C_1$  resp.  $C_2$  hierbei in  $C(H + \eta, \Phi_1)$  resp.  $C(H + \eta, \Phi_2)$  übergehen, so folgt, daß für jedes  $z = r \cdot e^{-i\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}}$ ,  $r > 0$  die Integrale (27) miteinander übereinstimmen. Nach genau derselben Schlußweise, wie in Nr. 11 ergibt sich, daß das Integral II für verschiedene Winkel  $\Phi$  ein und dieselbe, auf  $L$  reguläre Funktion  $G(z)$  darstellt.

c) Beim Beweis, daß  $G(z)$  eine quasiganze Funktion ist, deren sektorieller Exponentialtypus  $H$  nicht übersteigt, kommt es wiederum lediglich auf eine Integralabschätzung an. Nach Voraussetzung hat  $g^*(te^{i\varphi})$  in einem vorgegebenen Sektor  $t > H + \eta$ ,  $\Phi_1 - \pi < \varphi < \Phi_2 + \pi$  eine endliche obere Schranke  $S_3$ . Da  $R(tze^{i\varphi}) < rt$ , so ist in Gleichung (26) für  $z = r \cdot e^{-i\Phi}$  das erste Integral im rechten Gliede absolut genommen kleiner als  $S_3 e^{r(H+\eta)}$ , die Summe der zwei letzteren Integrale aber kleiner als  $S_3 \cdot \frac{e^{-(H+\eta)r}}{\pi(H+\eta)r}$  und schließlich

$$(29) \quad |G(re^{-i\Phi})| \leq S_3 e^{(H+\eta)r} + \frac{S_3 e^{-(H+\eta)r}}{\pi(H+\eta)r} \quad \text{für } \eta > 0, r > 0, \Phi_1 < \Phi < \Phi_2.$$

Hieraus folgt, daß der Ausdruck  $|G(re^{i\Phi})| e^{-(H+\eta)r}$  im Gebiet  $r > \frac{1}{H}$ ,  $-\Phi_1 < \Phi < -\Phi_2$  beschränkt ist, nämlich kleiner als  $S_3 \left(1 + \frac{1}{\pi}\right)$ . Sei jetzt  $r < \frac{1}{H}$ . Ich wähle  $\eta$  so, daß  $r = \frac{1}{H + \eta}$ . Dann ist

$$|G(re^{i\Phi})| < S_3 \left( e + \frac{e^{-1}}{\pi} \right) \quad \text{für } r < \frac{1}{H}, \Phi_1 < \Phi < \Phi_2.$$

Der Ausdruck  $|G(re^{i\Phi})| e^{-(H+\eta)r}$  ist also in dem beliebig vorgegebenen

Sektor  $(-\Phi_1, -\Phi_2)$  auf  $L$  beschränkt und somit ist bewiesen, daß der sektorielle Typus  $\chi$  von  $G(z)$  nicht größer ist als  $H$ .

Aus dem Beweis ergibt sich unmittelbar der folgende

*Zusatz: Ist  $g(z)$  eine im Unendlichen quasireguläre Funktion vom minimalen Verschwindungsgrad 1 und hat die Funktion  $g^*(z) = z \cdot g(z)$  und mithin auch  $g(z)$  den Beschränktheitsradius  $B$ , so ist der gewöhnliche Exponentialtypus  $\beta$  der Borel'schen Adjungierten zu  $g(z)$  nicht größer als  $B$ .*

Denn man braucht nur im 3. Abschnitt des Beweises überall  $H$  durch  $B$  zu ersetzen und zu beachten, daß  $|g^*(z)|$  auf  $L(B + \eta)$  eine endliche obere Schranke besitzt und somit die rechte Seite von (29) von  $\Phi$  unabhängig ist.

13. Nach Satz V wird jeder quasiganzen Funktion vom Exponentialtypus durch das Integral (I) eindeutig eine im Unendlichen quasireguläre Funktion vom Verschwindungsgrad  $\geq 1$  zugeordnet. Fassen wir die quasiganzen Funktionen vom Exponentialtypus auf als die *Elemente eines Systems I* und entsprechend die im Unendlichen quasiregulären Funktionen vom Verschwindungsgrad  $\geq 1$  als die *Elemente eines Systemes II*, so wird nach Satz V das System I mittelst des Integrales (I) eindeutig in das System II und entsprechend nach dem dualen Satz VI das System II mittelst des Integrales (II) eindeutig in das System I abgebildet. Bezeichnen wir die Integraloperationen (I) resp. (II) mit  $\{I\}$  resp.  $\{II\}$ , so führen die zusammengesetzten Operationen  $\{I\} \{II\}$  resp.  $\{II\} \{I\}$  das System II resp. das System I in sich über. Daß nun aber diese Systeme *elementweise* in sich überführt werden und die Operationen  $\{I\}$  und  $\{II\}$  *eineindeutig* sind, ist der Inhalt vom

Satz VII.

1. Die Integraloperationen  $\{I\}$  und  $\{II\}$  sind eineindeutig, d. h. es wird jedem Element des einen Systemes ein und nur ein Element des anderen Systems zugeordnet und verschiedenen Elementen im einen System entsprechen verschiedene Elemente im anderen.

2. Die zusammengesetzte Integraloperation  $\{II\} \{I\}$  resp.  $\{I\} \{II\}$  läßt das System I resp. das System II elementweise fest, d. h. ist  $G(z)$  eine quasiganze Funktion vom Exponentialtypus und  $g(z)$  ihre Borel'sche Transformierte, so läßt sich die gegebene Funktion  $G(z)$  vermitteltst  $g(z)$  durch das Integral (II) darstellen. Umgekehrt, ist  $g(z)$  eine im Unendlichen quasireguläre Funktion vom minimalen Verschwindungsgrad 1 und  $G(z)$  ihre Borel'sche Adjungierte, so läßt sich die gegebene Funktion  $g(z)$  vermitteltst  $G(z)$  durch das Integral (I) darstellen.

Beweis: Der Beweis wird folgendermaßen geführt. Wir zeigen zunächst, daß die *zusammengesetzte Integraloperation*  $\{I\} \{II\}$  *das System II elementweise festläßt*. Hieraus folgt dann sofort, daß die Operation  $\{II\}$  *eindeutig* ist. Denn sind  $g_1(z)$  und  $g_2(z)$  verschiedene Elemente aus dem System II, so sind auch ihre *vermittelt* des Integrals (II) zugeordneten Funktionen  $G_1(z)$  und  $G_2(z)$  *verschieden voneinander*. Wären diese nämlich *identisch*, also  $G_1(z) \equiv G_2(z) \equiv G(z)$  und wird die Zugeordnete von  $G(z)$  mit  $g(z)$  bezeichnet, so würden die Elemente  $g_1$  und  $g_2$  durch die Operation  $\{I\} \{II\}$  in das Element  $g$  überführt und weil diese Operation das System II *elementweise festläßt*, müßten dann  $g_1$  und  $g_2$  mit  $g$ , also unter sich *identisch* sein.

Es bleibt dann noch zu zeigen, daß die Operation  $\{I\}$  *eindeutig* ist und die *zusammengesetzte Operation*  $\{II\} \{I\}$  das System I *elementweise* in sich überführt. Wir führen diesen Teil des Beweises, indem wir dartun, *daß die Operation*  $\{I\}$  *eindeutig* ist. Hieraus ergibt sich dann leicht die zweite Behauptung. Es werde etwa durch die Operation  $\{II\} \{I\}$  das Element  $G_1(z)$  in das Element  $G_2(z)$  überführt. Die auftretende Zwischenfunktion sei mit  $g(z)$  bezeichnet. Es geht dann  $G_1(z)$  durch  $\{I\}$  in  $g(z)$  und  $g(z)$  durch  $\{II\}$  in  $G_2(z)$  über. Weil aber die Operation  $\{I\} \{II\}$  das System II *elementweise festläßt*, so folgt, daß auch  $G_2(z)$  durch die Operation  $\{I\}$  in  $g(z)$  überführt wird und schließlich wegen der *Eindeutigkeit* der Operation  $\{I\}$ , daß auch  $G_1$  und  $G_2$  *identisch* sind, womit dann alles *bewiesen* ist.

1. Die Operation  $\{I\} \{II\}$  führt das System II *elementweise* in sich über. Bezeichnen wir das von der Kurve  $C(H, 0)$  umschlossene einfach zusammenhängende Gebiet auf  $L(H)$  mit  $D$ ;  $z$  sei ein Punkt dieses Gebietes,  $R$  und  $\eta > 0$  so gewählt, daß  $H + \eta < |z| < R$ . Die auf der Fläche  $L(R)$  gelegenen Teile des Weges  $C(H + \eta, 0)$  werden weggelassen und die Endpunkte des verbliebenen Stückes durch einen Kreisbogen  $K_R$  vom Radius  $R$  miteinander verbunden. Diese Kurve, im positiven Sinn durchlaufen, bezeichnen wir mit  $C$ . Nach dem Cauchy'schen Integralsatz ist dann für jedes  $R > |z|$

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C g(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Da  $g^*(\zeta) = \zeta \cdot g(\zeta)$  auf  $L(H + \eta)$  *sektoriell beschränkt* ist, so strebt das über den Bogen  $K_R$  erstreckte Integral mit *unbegrenzt wachsendem*  $R$  gegen Null und die *negativ durchlaufene Kurve*  $C$  geht hierbei in  $C(H + \eta, 0)$  über. Somit gilt für alle  $z$  des Gebietes  $D$  die Gleichung

$$g(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(H+\eta, 0)} g(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } 0 < \eta < |z| - H.$$

Wir wollen jetzt  $z$  positiv, reell, größer als  $H$  annehmen und mit  $x$  bezeichnen. Da

$$\int_0^\infty e^{-(x-\zeta)u} du = -\frac{1}{\zeta - x},$$

so folgt

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(H+\eta, 0)} g(\zeta) d\zeta \cdot \int_0^\infty e^{-(x-\zeta)u} du.$$

In diesem Integral ist die Reihenfolge der Integration vertauschbar. Denn die Doppelintegrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^\infty e^{-(x-(H+i)e^{i\varphi})u} g^*( (H+\eta)e^{i\varphi} ) d\varphi du$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{H+\eta}^\infty \int_0^\infty \{g^*(ve^{i\pi}) - g^*(ve^{-i\pi})\} e^{-(x+v)u} \frac{dv}{v} du$$

konvergieren absolut. Wir erhalten daher

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xu} du \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(H+\eta, 0)} e^{\zeta u} \cdot g(\zeta) d\zeta.$$

Die beiden durch die Operation {I} {II} einander zugeordneten Funktionen stimmen also für  $z = x > H$  miteinander überein und sind somit identisch, womit bewiesen ist, daß die Operation {I} {II} das System II elementweise in sich überführt.

2. Die Operation {I} ist eineindeutig, d.h. die Funktion

$$g(z) = \int_0^{(\Phi)\infty} e^{-z\zeta} \cdot G(\zeta) d\zeta$$

ist durch  $G(\zeta)$  eindeutig bestimmt und aus  $G_1 \not\equiv G_2$  folgt  $g_1 \not\equiv g_2$ . Das erstere ist trivial, das zweite gleichbedeutend mit der Behauptung, daß aus

$$(30) \quad g(z) = \int_0^{(\Phi)\infty} e^{-z\zeta} \cdot G(\zeta) d\zeta \equiv 0$$

folgt  $G(\zeta) \equiv 0$ . Wir setzen  $\Phi = 0$  und  $\zeta = t$ . Da das Integral (30) für  $R(z) \geq \chi + 1 > 0$  absolut konvergiert, so ist für positives reelles  $u$

$$(31) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda+1-i\infty}^{\lambda+1+i\infty} \frac{g(z) e^{uz}}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda+1-i\infty}^{\lambda+1+i\infty} \frac{e^{uz}}{z^2} \int_0^\infty G(t) e^{-tz} dt dz$$

$$= \int_0^\infty G(t) \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda+1-i\infty}^{\lambda+1+i\infty} \frac{e^{z(u-t)}}{z^2} dz dt = \int_0^u G(t) (u-t) dt ;$$

denn das Doppelintegral ist absolut konvergent<sup>11)</sup>. Ist nun  $g(z) \equiv 0$ , so folgt aus (31) für  $u > 0$

$$\int_0^u G(t) (u-t) dt = 0.$$

Durch Differentiation nach  $u$  folgt weiter

$$\int_0^u G(t) dt = 0$$

und durch nochmalige Differentiation

$$G(u) = 0,$$

woraus sich die Behauptung  $G(\zeta) \equiv 0$  ergibt. Die Zuordnung  $\{I\}$  ist also eineindeutig und so der ganze Satz bewiesen.

Unmittelbar folgt aus den Sätzen V und VI und ihren Zusätzen in Verbindung mit dem Satz VII das

*Korollar: Der sektorielle resp. gewöhnliche Exponentialtypus einer quasiganzen Funktion  $G(z)$  ist gleich dem Regularitätsradius ihrer Borel'schen Transformierten  $g(z)$  resp. gleich dem Beschränktheitsradius der Funktion  $z \cdot g(z)$ .*

14. Das Korollar zum Satz VII stellt, ganz allgemein gesprochen, eine Beziehung dar zwischen dem Wachstum einer quasiganzen Funktion und dem Regularitätsgebiet ihrer Borel'schen Transformierten. Diese Beziehung kann, wie durch folgenden Satz gezeigt wird, noch erheblich vertieft werden.

*Satz VIII. Zwischen dem Wachstumsindikator  $h(\Phi)$  einer quasiganzen Funktion vom Exponentialtypus und der Stützfunktion  $k(\Phi)$  der zu ihrer Borel'schen Transformierten gehörigen Windungsfläche besteht die Beziehung*

<sup>11)</sup> Diese Integrale sind bekannt; vgl. z. B. *Pólya und Szegő, Aufgaben und Lehrsätze*, Bd. 1, III 155, S. 114 oder *V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet*, Paris, 1933, S. 9—11.

$$(32) \quad h(\Phi) = k(-\Phi).$$

Beweis: Bezeichnen wir wie gewöhnlich mit  $\chi$  den sektoriellen Typus der Funktion  $G(z)$ . Die Borel'sche Transformierte  $g(z)$  von  $G(z)$  wird nach Satz V in der Halbebene  $E(\chi, -\Phi)$  dargestellt durch das Integral (I). Auf Grund der Definition des Indikators einer quasiganzen Funktion vom Exponentialtypus (vergl. Nr. 9) gibt es zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl  $\eta$  eine Zahl  $T = T(\eta, \Phi)$ , so daß

$$(33) \quad |G(te^{i\Phi})| < e^{(h(\Phi)+\eta)t}$$

für jedes  $t > T$ . Daraus ersehen wir (vergl. Nr. 11, a), daß das Integral (I) für alle Punkte  $z$  der Halbebene  $E(h(\Phi), -\Phi)$  existiert und eine dort eindeutige und analytische Funktion darstellt, die auf der Halbebene  $E(\chi, -\Phi)$  mit  $g(z)$  übereinstimmt. Die Funktion  $g(z)$  ist also von der Halbebene  $E(\chi, -\Phi)$  längs Senkrechten zu ihrer Begrenzungsgeraden in die ganze Halbebene  $E(h(\Phi), -\Phi)$  hinein analytisch fortsetzbar. Aus der Definition der Stützfunktion der zu  $g(z)$  gehörigen Windungsfläche folgt damit die Ungleichung

$$(34) \quad k(-\Phi) \leq h(\Phi).$$

Sei jetzt  $H$  der Holomorphieradius der Funktion  $g(z)$  und  $\eta$  eine beliebig kleine positive Zahl. Auf Grund von Satz VII und VI wissen wir, daß das Integral (II) unsere gegebene Funktion  $G(z)$  in der Halbebene  $E(-\Phi)$  darstellt. Weil  $k(\Phi) \leq H$ , so wird die Begrenzungsgerade der Halbebene  $E(k(\Phi) + \eta, \Phi)$  die Peripherie der Fläche  $L(H + \eta)$  entweder tangieren oder in zwei verschiedenen Punkten  $P_1$  und  $P_2$  schneiden. Im letzteren Fall wird sich das Integral (II) nicht ändern, wenn wir den in der Halbebene  $E(k(\Phi) + \eta, \Phi)$  gelegenen Teil des Integrationsweges durch die Strecke  $P_1 P_2$  ersetzen, da sich dieser Kreisbogen stetig in die Strecke  $P_1 P_2$  deformieren läßt, ohne eine singuläre Stelle von  $g(z)$  zu überstreichen. Den im zweiten Falle so abgeänderten, im ersten Falle aber beibehaltenen Integrationsweg wollen wir kurz mit  $C(\Phi)$  bezeichnen. Alle Punkte  $\zeta = \xi + i\eta$  auf  $C(\Phi)$  genügen der Bedingung

$$(35) \quad R(\zeta r e^{-i\Phi}) = r(\xi \cos \Phi + \eta \sin \Phi) \leq (k(\Phi) + \eta)r.$$

Die für die Funktion  $g(z)$  in dem von der Kurve  $C(\Phi)$  umschlossenen Gebiet gültige obere Schranke sei  $S$ . Indem wir das über den Weg  $C(\Phi)$  erstreckte Integral (II) zerlegen in ein Integral längs der Halbstrahlen von der Richtung  $\Phi + \pi$  und  $\Phi - \pi$  auf  $L(H + \eta)$  und ein Integral über

den verbleibenden Teil  $K$  und beachten, daß die Länge von  $K$  kleiner ist als  $2\pi(H + \eta)$ , so ergibt sich nach (35) (vgl. Nr. 12, c) die Abschätzung

$$|G(re^{-i\Phi})| < (H + \eta) S e^{(k(\Phi) + \eta)r} + \frac{S}{\pi} \cdot \frac{e^{-(H + \eta)r}}{r}$$

und dieser letzte Ausdruck wird für hinreichend großes  $r$  kleiner als  $e^{(k(\Phi) + 2\eta)r}$ , d. h.

$$(36) \quad k(\Phi) \geq h(-\Phi).$$

Die beiden Ungleichungen (34) und (36) haben für alle Winkel  $\Phi$  ihre Gültigkeit und ergeben somit die Behauptung.

15. Sei nun

$$g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$$

eine Folge auf  $L(C)$  ( $C$  bedeute eine endliche positive reelle Zahl) regulärer, nicht konstanter Funktionen, die in jedem Sektor auf  $L(C + \eta)$ ,  $\eta > 0$ , gleichmäßig konvergiert. Als die zur Folge  $\{g_n\}$  gehörige unendlich-vielblättrige Riemann'sche Fläche bezeichnen wir jene, die  $L(C)$  als Teilgebiet enthält, auf der alle Funktionen  $g_n(z)$  eindeutig und analytisch sind und die keiner Erweiterung (durch Hinzufügen neuer Punkte) mehr fähig ist, ohne daß eine der Funktionen  $g_n(z)$  darauf singulär würde (vgl. Nr. 2). Auf dieser Fläche betrachten wir das umfassendste konkave Gebiet  $\mathfrak{B}$ , in dessen abgeschlossenen Halbebenen die Folge  $\{g_n\}$  gleichmäßig konvergiert, und nennen sie die zur Folge  $\{g_n\}$  gehörige Windungsfläche.  $k(\Phi)$  bezeichne ihre Stützfunktion. Sei andererseits

$$G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$$

eine Folge quasiganzer Funktionen, die auf jeder Riemann'schen Fläche  $\overline{L(V)}$  sektoriell gleichmäßig konvergiert. Es gebe ferner eine Zahl  $\gamma$ , so daß die Folge

$$(37) \quad |G_n(z)| \cdot e^{-V|z|}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

für  $V > \gamma$  in jedem Sektor auf  $L$  gleichmäßig in  $n$  beschränkt bleibt. Die zum Winkel  $\Phi$  gehörige untere Grenze der Zahlen  $V$ , wofür die Folge (37) für  $\arg z = \Phi$  in  $n$  gleichmäßig beschränkt bleibt, bezeichnen wir mit  $h(\Phi)$  und nennen diese Funktion den Wachstumsindikator der Folge  $\{G_n\}$ <sup>12)</sup>. Diese Definitionen eingeführt, können wir folgenden, die Stetigkeit der Integraloperationen  $\{I\}$  und  $\{II\}$  betreffenden Satz aussprechen:

<sup>12)</sup> Für eine Folge von Polynomen vgl. <sup>10)</sup>.

**Satz IX. 1.** Sei  $\{G_n(z)\}$  eine Folge quasiganzer Funktionen, die auf jeder Riemann'schen Fläche  $\overline{L(V)}$  sektoriell gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $G(z)$  konvergiert. Es gebe ferner eine Zahl  $\gamma$ , so daß die Folge (37) für  $V > \gamma$  in jedem Sektor auf  $L$  gleichmäßig beschränkt bleibt.  $h(\Phi)$  sei der Wachstumsindikator der Folge  $\{G_n(z)\}$ . Dann streben die Borel'schen Transformierten  $g_n$  von  $G_n$  auf  $L(\gamma + \eta)$  sektoriell gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $g(z)$ , welches die Borel'sche Transformierte von  $G(z)$  ist. Die Folge  $\{z \cdot g_n(z)\}$  ist in jedem Sektor auf  $L(\gamma + \eta)$  gleichmäßig beschränkt. Bezeichnet  $k(\Phi)$  die Stützfunktion der zur Folge  $\{g_n\}$  gehörigen Windungsfläche, so gilt die Gleichung

$$(38) \quad h(\Phi) = k(-\Phi).$$

2. Sei umgekehrt  $\{g_n(z)\}$  eine Folge auf  $L(C)$  regulärer Funktionen, die auf  $L(C + \eta)$  sektoriell gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $g(z)$  konvergiert. Die Stützfunktion der zu dieser Folge gehörigen Windungsfläche sei mit  $k(\Phi)$  bezeichnet. Ferner sei die Folge  $\{z \cdot g_n(z)\}$  in jedem Sektor auf  $L(C + \eta)$  gleichmäßig beschränkt. Dann streben die zu  $g_n$  adjungierten quasiganzen Funktionen  $G_n(z)$  auf jeder Riemann'schen Fläche  $\overline{L(V)}$  sektoriell gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion  $G(z)$ , welches die Borel'sche Adjungierte zu  $g(z)$  ist und die Folge (37) ist für  $V > C$  in jedem Sektor auf  $L$  gleichmäßig beschränkt. Bezeichnen wir mit  $h(\Phi)$  den Wachstumsindikator der Folge  $\{G_n(z)\}$ , so gilt die Gleichung (38).

**Beweis:** Auf Grund der Definition des Indikators  $h(\Phi)$  der Folge  $\{G_n\}$  gibt es zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl  $\eta$  eine von  $n$  unabhängige Zahl  $T(\eta, \Phi)$ , derart, daß die Ungleichung (33) für alle Funktionen  $G_n(z)$  und somit auch für ihre Grenzfunktion  $G(z)$  (inkl. eventuell das Gleichheitszeichen) erfüllt ist, sobald  $t > T(\eta, \Phi)$ . Daraus ersehen wir (vergl. Nr. 11, a), daß die Integrale

$$(39) \quad g_n(z) = \int_0^{(\Phi)\infty} e^{-z\xi} \cdot G_n(\xi) d\xi$$

und

$$(40) \quad g(z) = \int_0^{(\Phi)\infty} e^{-z\xi} \cdot G(\xi) d\xi$$

für alle Punkte  $z$  der Halbebene  $E(h(\Phi), -\Phi)$  existieren und die durch sie dargestellten Funktionen  $g_n(z)$  resp.  $g(z)$  von der Halbebene  $E(\gamma, -\Phi)$  längs Senkrechten zu ihrer Stützgeraden in die Halbebene  $E(h(\Phi), -\Phi)$  hinein fortsetzbar sind.

Um nun zu beweisen, daß die Folge  $\{g_n(z)\}$  auf  $L(\gamma + 2\eta)$  sektoriell gleichmäßig gegen die Funktion  $g$  konvergiert, wähle ich  $T_1 > T(\eta, \Phi)$ , so daß

$$(41) \quad 2 \frac{e^{-\gamma T_1}}{\eta} < \varepsilon/2$$

ist, wo  $\varepsilon$  eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl bedeutet, und nachdem  $T_1$  so festgelegt ist, bestimme ich mir die Zahl  $N$ , so daß für  $n > N$  im ganzen Intervall  $0 < t \leq T_1$  die Ungleichung

$$(42) \quad |G(te^{i\Phi}) - G_n(te^{i\Phi})| < \varepsilon/2 |h(\Phi) + 2\eta| \cdot (e^{\gamma T_1} + 1)^{-1}$$

erfüllt ist (dies ist möglich, weil die Folge  $\{G_n(z)\}$  auf jeder Riemann'schen Fläche  $\overline{L(V)}$  sektoriell gleichmäßig konvergiert). Durch Subtraktion der Gleichungen (39) und (40) folgt

$$g(z) - g_n(z) = \int_0^{(\Phi) \infty} e^{-z\zeta} (G(\zeta) - G_n(\zeta)) d\zeta.$$

Schätzen wir das letztere Integral unter Berücksichtigung der Ungleichungen (41) und (42) ab, so finden wir für  $n > N$  und  $z \in E(h(\Phi) + 2\eta, -\Phi)$

$$\begin{aligned} |g(z) - g_n(z)| &< \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{h(\Phi) + 2\eta}{R(ze^{i\Phi})} \right| + 2 \frac{e^{(h(\Phi) + \eta - R(ze^{i\Phi})) T_1}}{R(ze^{i\Phi}) - (h(\Phi) + \eta)} \\ &< \varepsilon/2 + 2 \frac{e^{-\eta T_1}}{\eta} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Es konvergiert also die Folge  $\{g_n(z)\}$  auf jeder Halbebene  $E(h(\Phi) + 2\eta, -\Phi)$  gleichmäßig und wegen  $h(\Phi) \leq \gamma$  konvergiert sie für jedes positive  $\eta$  auf  $L(\gamma + 2\eta)$  sektoriell gleichmäßig. Zugleich ist bewiesen, daß die Stützfunktion der zur Folge gehörigen Windungsfläche der Ungleichung

$$(43) \quad k(\Phi) \leq h(-\Phi).$$

genügt.

Weil  $\{G_n(z)\}$  auf jeder Fläche  $\overline{L(V)}$  sektoriell gleichmäßig konvergiert, so ist sie auf der Strecke  $0 < z \leq T_1$ ,  $\arg z = \Phi$  gleichmäßig beschränkt. Wegen des Bestehens der Ungleichung (33) für alle  $G_n$  sobald  $t > T_1$ , folgt dann aus (24), daß die Folge  $\{z \cdot g_n(z)\}$  auf  $L(\gamma + 2\eta)$  sektoriell gleichmäßig beschränkt ist. Damit ist der erste Teil des Satzes bis auf die Gleichung (38) bewiesen.

2. Sei nun umgekehrt die Folge  $\{g_n(z)\}$  gegeben. Bezeichnen  $G_n$  resp.  $G$  die Borel'schen Adjungierten zu  $g_n$  resp.  $g$ , so ist für  $\eta > 0$

$$(44) \quad G_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(C+\eta, \Phi)} e^{z\zeta} \cdot g_n(\zeta) d\zeta$$

und

$$(45) \quad G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(C+\eta, \Phi)} e^{z\zeta} \cdot g(\zeta) d\zeta.$$

Weil nach Voraussetzung die Folge  $\{g_n^*(z)\}$  auf  $L(C + \eta)$  sektoriell gleichmäßig beschränkt ist, so ist nach Nr. 12, c die Folge (37) für  $V \geq C + \eta$  auf  $L$  sektoriell gleichmäßig in  $n$  beschränkt. Insbesondere ist also  $\{G_n\}$  auf jeder Fläche  $\overline{L(V)}$  sektoriell gleichmäßig beschränkt.

Sei in der Halbebene  $E(-\Phi)$  die Strecke  $r \cdot e^{-i\Phi}$ ,  $1 \leq r \leq 2$  gegeben. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge  $\{g_n\}$  gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N$ , so daß für  $n > N$  die Ungleichung

$$|g(\zeta) - g_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{(C + \eta) e^{2(C+\eta)} + \frac{e^{-(C+\eta)}}{\pi}} = \varepsilon_1$$

für jedes  $\zeta$  der Kurve  $C(C + \eta, \Phi)$  erfüllt ist. Es folgt dann durch Subtraktion der Gleichungen (44) und (45) wie in Nr. 12, c

$$|G(z) - G_n(z)| < \varepsilon_1 \left( (C + \eta) e^{2(C+\eta)} + \frac{e^{-(C+\eta)}}{\pi} \right) = \varepsilon,$$

sobald  $n > N$  für jedes  $z$  der angegebenen Strecke, d. h. die Folge  $\{G_n(z)\}$  konvergiert dort gleichmäßig. Weil aber diese auf jeder Fläche  $\overline{L(V)}$  sektoriell beschränkt ist, folgt aus dem Vitalischen Konvergenzsatz, daß sie auf jeder Fläche  $\overline{L(V)}$  sektoriell gleichmäßig gegen die zu  $g(z)$  adjungierte quasiganze Funktion  $G(z)$  konvergiert.

Weil die Folge  $\{g_n(z)\}$  in jeder abgeschlossenen Halbebene auf ihrer Windungsfläche gleichmäßig konvergiert, so konvergiert sie bei jedem positiven  $\eta$  auch in der Vereinigungsmenge der Halbebenen  $E(k(\Phi + \varphi) + \eta, \Phi + \varphi)$ ,  $|\varphi| < \pi$ , gleichmäßig und deshalb haben alle Funktionen  $g_n(z)$  auf  $C(\Phi)$  eine gemeinsame obere Schranke  $S$ . Hiebei wird mit  $C(\Phi)$  dieselbe Kurve bezeichnet wie in Nr. 14. Analog wie dort folgt

$$|G_n(re^{-i\Phi})| < S(H + \eta) e^{r(k(\Phi) + \eta)} + S \frac{e^{-r(H+\eta)}}{r\pi}$$

und dieser Ausdruck wird für hinreichend große  $r$  kleiner als  $e^{r(k(\Phi)+2\eta)}$  d. h. der Wachstumsindikator der Folge  $\{G_n(z)\}$  erfüllt die Ungleichung

$$(46) \quad h(-\Phi) \leq k(\Phi).$$

Die Ungleichungen (43) und (46) haben für alle Winkel  $\Phi$  ihre Gültigkeit. Sie ergeben daher zusammen (wegen der Dualität des Beweises) die Gleichung (38).

16. a) Wir ziehen aus dem Satz IX einige wichtige Folgerungen. Sei

$$(47) \quad g(z) = \sum_1^{\infty} a_\nu z^{-\lambda_\nu - 1}$$

eine nicht überall divergente Dirichlet'sche Reihe. Sie hat dann einen endlichen Konvergenzradius  $C$  und es ist nach der obigen Terminologie  $L(C)$  die zur Folge ihrer Partialsummen gehörige Windungsfläche, ihre Stützfunktion  $k(\Phi)$  ist also die Konstante  $C$ . Die Folge  $\{z \cdot g_n(z)\}$  der Partialsummen der Reihe

$$(48) \quad z \cdot g(z) = g^*(z) = \sum_1^{\infty} a_\nu z^{-\lambda_\nu}$$

ist in jedem Sektor auf  $L(C + \eta)$  gleichmäßig beschränkt, weil die Reihe (48) auf  $L(C + \eta)$  sektoriell gleichmäßig konvergiert. Wir setzen in (44)  $z = x$ , wo  $x$  eine positive reelle Zahl bedeutet, und erhalten durch gliedweises Integrieren unter Anwendung der sogenannten Hankel'schen Formel<sup>13)</sup>

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(C+\eta, 0)} e^{x\zeta} \cdot \zeta^{-\lambda} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)}, \quad x, \lambda > 0,$$

die für jedes  $n$  und jedes positive  $x$  gültige Gleichung

$$G_n(x) = \sum_1^n \frac{a_\nu}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} x^{\lambda_\nu} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(C+\eta, 0)} e^{x\zeta} \left( \sum_1^n a_\nu \zeta^{-\lambda_\nu} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(C+\eta, 0)} e^{x\zeta} \cdot g_n(\zeta) d\zeta.$$

Aus dem Satz IX folgt dann, daß die Reihe

$$(49) \quad G(z) = \sum_1^{\infty} \frac{a_\nu}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} z^{\lambda_\nu}$$

auf der ganzen logarithmischen Fläche  $L$  konvergiert und zwar auf jeder

<sup>13)</sup> Vgl. *Nielsen*, Handbuch der Gammafunktion, Leipzig, 1906, S. 148 oder *Hankel*, Zeitschrift für Math. und Phys., Bd. 9, 1864.

Fläche  $\overline{L(V)}$  sektoriell gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $G(z)$ , welches die Borel'sche Adjungierte zu  $g(z)$  ist, daß ferner der Wachstumsindikator der Folge der Partialsummen der Reihe (49) gleich der konstanten  $C$  ist.

Ist umgekehrt die Reihe (49) eine auf der ganzen logarithmischen Fläche  $L$  konvergente Reihe und ist für einen Winkel  $\Phi_0$  und eine Zahl  $V$  die Folge  $\left| \sum_1^n \frac{a_\nu}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} r^{\lambda_\nu} e^{i\lambda_\nu \Phi_0} \right| e^{-Vr}$  für alle  $r > 0$  in  $n$  gleichmäßig beschränkt, so hat nach Satz IV die Reihe (49) einen endlichen Konvergenztypus  $\gamma$  und es ist nach der obigen Terminologie der Wachstumsindikator der Folge  $\{G_n(z)\}$  der Partialsummen der Reihe (49) gleich der Konstanten  $\gamma$ . Wir setzen in (39)  $z = x$ , wo  $x$  eine positive reelle Zahl bedeutet, und erhalten durch gliedweises Integrieren die für jedes  $n$  und jedes positive reelle  $x$  gültige Gleichung

$$g_n(x) = \sum_1^n a_\nu x^{-\lambda_\nu - 1} = \int_0^\infty e^{-xt} \left( \sum_1^n \frac{a_\nu}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} t^{\lambda_\nu} \right) dt = \int_0^\infty e^{-xt} G_n(t) dt$$

Denn mittelst der Substitution  $x \cdot t = u$  und der bekannten Integraldarstellung der Gammafunktion finden wir

$$\int_0^\infty e^{-xt} t^\lambda dt = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{x^{\lambda + 1}}, \quad x, t, \lambda > 0.$$

Aus Satz IX folgt dann, daß der Konvergenzradius der Reihe (47) gleich  $\gamma$  und die durch sie dargestellte Funktion  $g(z)$  die Borel'sche Transformierte von  $G(z)$  ist.

b) Nennen wir die untere Grenze der Zahlen  $V$ , wofür es zu jedem Sektor auf  $L(V)$  eine daselbst gleichmäßig konvergente Teilfolge

$$g_{n_\nu}(z) = \sum_1^{n_\nu} a_\mu z^{-\lambda_\mu - 1}$$

der Partialsummen der Reihe (47) gibt<sup>14)</sup>, den *Überkonvergenzradius* der Reihe (47) und entsprechend die untere Grenze der Zahlen  $V$ , wofür es zu jedem Sektor auf  $L$  eine daselbst in  $n$  gleichmäßig beschränkte Teilfolge von

$$\left| G_n(z) \right| e^{-V|z|} = \left| \sum_1^n \frac{a_\mu z^{\lambda_\mu}}{\Gamma(\lambda_\mu + 1)} \right| e^{-V|z|}, \quad n = 1, 2, \dots$$

gibt, den (exponentiellen) *Überkonvergenztypus* der Reihe (29), so folgt

<sup>14)</sup> Es ist zugelassen, daß die Teilfolgen in verschiedene Sektoren differieren.

unmittelbar aus dem vorigen Abschnitt (Nr. 16, a), daß der Überkonvergenzradius der Reihe (47) gleich dem Überkonvergenztypus ihrer adjungierten Reihe (49) ist. Denn was für alle Partialsummen der Reihe (47) resp. (49) gilt, gilt insbesondere für jede Teilfolge derselben. Ebenso folgt durch Anwendung der Resultate im vorigen Abschnitt auf die Reihe  $\sum_1^{\infty} |a_n| z^{-\lambda_n - 1}$ , daß der absolute Konvergenzradius der Reihe (47) gleich dem absoluten Konvergenztypus der Reihe (49) ist. Aus dem Beweis des Satzes IX folgt weiter, daß der gleichmäßige Konvergenzradius der Reihe (47) mit dem gleichmäßigen Konvergenztypus der Reihe (49) übereinstimmt. Denn die dortigen Zahlen  $T$  und  $S$  lassen sich für den vorliegenden Fall unabhängig vom Winkel  $\Phi$  wählen. Die Konvergenzeigenschaften der Reihen (47) und (48) sind dieselben.

c) Zusammenfassend haben wir das folgende Ergebnis:

1. *Hat die Reihe*

$$(50) \quad g(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^{-\lambda_n - 1}$$

den endlichen Konvergenzradius  $C$ , so wird die zu  $g(z)$  adjungierte quasiganze Funktion  $G(z)$  dargestellt durch die überall auf  $L$  konvergente Reihe

$$(51) \quad G(z) = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(\lambda_n + 1)} z^{\lambda_n}$$

und ihr (exponentieller) Konvergenztypus ist gleich  $C$ .

Ist umgekehrt die Reihe (51) überall auf  $L$  konvergent und  $\gamma$  ihr (exponentieller) Konvergenztypus, so wird ihre Borel'sche Transformierte  $g(z)$  dargestellt durch die auf  $L(\gamma + \eta)$ ,  $\eta > 0$  sektoriell gleichmäßig konvergente Reihe (50) und es ist  $\gamma$  ihr Konvergenzradius.

2. Die Stützfunktion  $k(\Phi)$  der zu  $g(z)$  gehörigen Windungsfläche und der Wachstumsindikator  $h(\Phi)$  ihrer Borel'schen Adjungierten  $G(z)$  genügen der Gleichung  $h(\Phi) = k(-\Phi)$ .

3. Der Holomorphieradius resp. Beschränktheitsradius der Funktion

$$(52) \quad z g(z) = g^*(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^{-\lambda_n}$$

ist gleich dem sektoriellen resp. gewöhnlichen Exponentialtypus der quasiganzen Funktion  $G(z)$ .

4. Der Überkonvergenzradius resp. der gewöhnliche resp. der gleichmäßige resp. der absolute Konvergenzradius der Reihe (52) ist gleich dem Überkonvergenztypus resp. dem gewöhnlichen resp. dem gleichmäßigen resp. dem absoluten Konvergenztypus der Reihe (51).

Inbesondere, hat die Reihe (52) einen endlichen gleichmäßigen Konvergenzradius, so konvergiert die Reihe (51) auf jeder Fläche schlechthin gleichmäßig, hat (52) einen endlichen absoluten Konvergenzradius, so konvergiert (51) überall auf  $L$  absolut.

d) Lassen wir die in Nr. 1 der Exponentenfolge  $\{\lambda_n\}$  auferlegte Bedingung, daß sie unbegrenzt und monoton wachsend sei, fallen, setzen wir nur noch voraus, daß sie *irgend eine* Folge positiver Zahlen sei<sup>15)</sup>, so genügt für die Existenz eines endlichen Konvergenzradius der Reihe (50) nicht mehr die Konvergenz in einem einzigen Punkte. Ebenso wird der Satz IV hinfällig. Setzen wir aber voraus, daß sie einen endlichen Konvergenzradius  $C$  besitzt und auf jeder Fläche  $L(C + \eta)$ ,  $\eta > 0$ , sektoriell gleichmäßig konvergiert, so läßt sich das Ergebnis im vorigen Abschnitt, wie ohne weiteres ersichtlich ist, auf diese allgemeineren Dirichlet'schen Reihen übertragen, ebenso wie die im folgenden zu ziehenden Folgerungen, was ich im einzelnen hier nicht ausführen werde.

### Anwendungen

17. a) Es sei  $\chi$  der sektorielle Typus einer quasiganzen Funktion vom Exponentialtypus und  $h(\Phi)$  ihr Wachstumsindikator. Wir betrachten jene Werte  $\Phi^*$ , für welche  $h(\Phi^*) = \chi$  ist, d. h. das Maximum erreicht<sup>16)</sup>. Die Richtungen  $\Phi^*$  sind dann für  $G(z)$  die Richtungen des stärksten Anwachsens. Bezeichnet  $g(z)$  die Borel'sche Transformierte von  $G(z)$ ,  $H$  ihren Holomorphieradius und  $k(\Phi)$  die Stützfunktion ihrer Windungsfläche, so erreicht wegen der Gleichungen  $\chi = H$ ,  $h(-\Phi) = k(\Phi)$  die Funktion  $k(-\Phi)$  für  $\Phi = \Phi^*$  ihr Maximum, d. h. es ist  $k(-\Phi^*) = H$  und es trifft somit nach Nr. 4 der auf der Fläche  $L(H)$  gelegene Halbstrahl von der Richtung  $-\Phi^*$  ihre Peripherie in einem singulären Punkte von  $g(z)$ . Ist umgekehrt  $H e^{-i\Phi^*}$  eine im eben angegebenen Sinne singuläre Stelle von  $g(z)$ , so folgt durch dieselbe Betrachtungsweise, daß  $h(\Phi^*) = \chi$  ist.

<sup>15)</sup> Die Exponentenfolge kann z. B. alle nicht-negativen Zahlen als Häufungspunkte besitzen.

<sup>16)</sup> Die Funktion  $h(\Phi)$  braucht keineswegs für einen endlichen Wert  $\Phi$  sein Maximum zu erreichen.

Satz X. Der Indikator  $h(\Phi)$  der quasiganzen Funktion  $G(z)$  vom Exponentialtypus erreicht sein Maximum  $H$  für  $\Phi = \Phi^*$  dann und nur dann, wenn der auf der Fläche  $L(H)$  gelegene Halbstrahl von der Richtung  $-\Phi^*$  ihre Peripherie in einem singulären Punkte der Borel'schen Transformierten von  $G(z)$  trifft<sup>17)</sup>.

Insbesondere ist  $h(\Phi)$  dann und nur dann konstant, mit anderen Worten, das Anwachsen der Funktion  $G(z)$  in allen Richtungen gleich stark, wenn die zur Funktion  $g(z)$  gehörige Windungsfläche mit  $L(H)$  identisch,  $g(z)$  also über die Fläche  $L(H)$  hinaus nicht fortsetzbar ist.

b) Wenden wir diesen Satz auf den Fall an, wo sämtliche Koeffizienten  $a_n$  der Reihe (50) resp. (52) in einem Winkelraum enthalten sind, dessen Scheitel der Nullpunkt und dessen Öffnung  $< \pi$  ist. Es bedeutet für das folgende keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir gleich annehmen, daß die  $a_n$  alle dem Winkelraum  $|\arg z| < \vartheta < \pi/2$  angehören. Unter dieser Voraussetzung ist dann für alle  $n$   $R(a_n) \geq |a_n| \cos \vartheta$  und somit

$$|G(r)| \geq R(G(r)) \geq \cos \vartheta \sum_1^{\infty} \frac{|a_n|}{\Gamma(\lambda_n + 1)} r^{\lambda_n} \geq \cos \vartheta \cdot |G(r)|,$$

$$\lg |G(r)| \geq \lg \cos \vartheta + \lg \left( \sum_1^{\infty} \frac{|a_n|}{\Gamma(\lambda_n + 1)} r^{\lambda_n} \right) \geq \lg \cos \vartheta + \lg |G(r)|,$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \lg |G(r)| = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \lg \left( \sum_1^{\infty} \frac{|a_n|}{\Gamma(\lambda_n + 1)} r^{\lambda_n} \right).$$

Nun bedeutet die linke Seite der letzten Gleichung den Wert des Wachstumsindikators  $h(\Phi)$  für  $\Phi = 0$  und die rechte Seite den absoluten Konvergenztypus  $\alpha$  der Reihe (51). Es ist also  $h(0) = \chi = \alpha$ . Weil  $g(z)$  und  $g^*(z)$  auf der Peripherie der Fläche  $L(H)$  dieselben Singularitäten besitzen, so folgt aus Nr. 16, c und aus Satz X, daß die Reihe (52) für  $|z| > C$  absolut konvergiert und der auf der reellen Achse gelegene Punkt des Randes von  $L(C)$  ein singulärer Punkt der Funktion  $g^*(z)$  ist, d. h. es läßt sich  $g^*(z)$  von  $\infty$  her längs der positiven reellen Achse nicht über diesen Punkt hinaus fortsetzen. Das ist der bekannte Vivanti-Landau'sche Satz<sup>18)</sup>.

<sup>17)</sup> Vgl. P, S. 584, Satz III und I. R. Braitzew, Über die Singularitäten der durch eine Dirichlet'sche Reihe bestimmten analytischen Funktion, Math. Ann., Bd. 109, 1933, S. 63—94.

<sup>18)</sup> Vgl. V. Bernstein, loc. cit. S. 80 oder E. Landau, Über einen Satz von Tschebyscheff, Math. Ann., Bd. 61, 1905.

Um die Analogie zu einem nachfolgenden Resultat deutlich hervorzuheben, sei dieser in folgender leicht verallgemeinerter Form ausgesprochen: Hat die Reihe (52) den endlichen Konvergenzradius  $C$  und gibt es eine reelle Zahl  $t$ , so daß die Punkte  $a_n e^{i\lambda_n t}$  alle in einem Winkelraum enthalten sind, dessen Scheitel der Nullpunkt und dessen Öffnung  $< \pi$  ist, so fallen der Holomorphieradius und der absolute Konvergenzradius zusammen.

18. a) Die Voraussetzung, daß für wenigstens ein  $t$  die Punkte  $a_n e^{i\lambda_n t}$  alle in einem Winkelraum mit dem Scheitel in 0 und der Öffnung  $< \pi$  gelegen seien, wollen wir abschwächen. Es soll nämlich, etwas kurz aber ungenau gesprochen, die obige Eigenschaft nicht der ganzen Folge  $\{a_n e^{i\lambda_n t}\}$ , sondern nur jedem Abschnitt der Folge zukommen (wobei  $t$  sich von Abschnitt zu Abschnitt ändern darf).

Satz XI. *Es habe die Reihe (52) einen endlichen gleichmäßigen Konvergenzradius  $U$ . Ferner seien die Koeffizientenfolge  $\{a_n\}$  und die Exponentenfolge  $\{\lambda_n\}$  von folgender Eigenschaft:*

*Es existiere eine Zahl  $\vartheta < \pi$  und zu jedem  $N$  ( $N = 1, 2, \dots$ ) eine reelle Zahl  $t$ , so daß die Punkte*

$$(A) \quad a_n e^{i\lambda_n t}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

*alle in einem Winkelraum enthalten sind, dessen Scheitel im Nullpunkt gelegen und dessen Öffnung  $\vartheta$  nicht übersteigt.*

*Dann fallen der Beschränktheitsradius und der absolute Konvergenzradius zusammen<sup>19)</sup>.*

Beweis: Da die Reihe (52) den endlichen gleichmäßigen Konvergenzradius  $U$  besitzt, so ist die Funktion  $g^*(z)$  auf  $L(U + \eta)$  schlechthin beschränkt. Die Borel'sche Adjungierte  $G(z)$  zu  $g(z)$  ist also auf jeder Riemann'schen Fläche  $\overline{L(V)}$  beschränkt und von endlichem gewöhnlichem Exponentialtypus. Die Reihe (51) konvergiert auf jeder Riemann'schen Fläche  $\overline{L(V)}$  gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $G(z)$ .  $M(r)$  bezeichne die obere Grenze des absoluten Betrages von  $G(re^{i\Phi})$  für  $-\infty < \Phi < \infty$ . Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es dann wegen der gleichmäßigen Konvergenz eine nur von  $\varepsilon$  und  $r$  abhängige Zahl  $N(\varepsilon, r)$ , so daß für alle  $n > N(\varepsilon, r)$  und alle  $\Phi$  die Ungleichung

$$\left| \sum_1^n \frac{a_\nu}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} e^{i\lambda_\nu \Phi} \cdot r^{\lambda_\nu} \right| < M(r) + \varepsilon$$

<sup>19)</sup> Soviel läßt sich aus der hier vorgetragenen Theorie erschließen. Diese Methode besitzt gegenüber dem nachfolgenden direkten Beweis (Nr. 18, b), wodurch ein schärferer Satz bewiesen werden kann, den Vorteil, daß sie sich auf den in Nr. 16, d erwähnten allgemeineren Fall übertragen läßt.

richtig ist. Nach Voraussetzung gibt es nun zu jedem  $n$  eine reelle Zahl  $t$ , so daß die Punkte  $\frac{a_\nu}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} e^{i\lambda_\nu t}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) alle in einem Winkelraum von nicht größerer Öffnung als  $\vartheta$  gelegen sind. Sei  $\Psi$  die Richtung der Winkelhalbierenden. Dann ist

$$\left| \sum_1^n \frac{a_\nu}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} e^{i\lambda_\nu t} \cdot r^{\lambda_\nu} \right| = \left| \sum_1^n \frac{a_\nu}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} e^{i(\lambda_\nu t - \Psi)} \cdot r^{\lambda_\nu} \right| \geq R \left( \sum_1^n \frac{|a_\nu|}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} e^{i(\lambda_\nu t - \Psi)} \cdot r^{\lambda_\nu} \right) \geq \cos \vartheta \left( \sum_1^n \frac{|a_\nu|}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} r^{\lambda_\nu} \right)$$

und weiter

$$\sum_1^n \frac{|a_\nu|}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} r^{\lambda_\nu} < \frac{M(r) + \varepsilon}{\cos \vartheta}$$

für alle  $n > N(\varepsilon, r)$ . Da aber  $\varepsilon$  beliebig gewählt wurde, so ist auch

$$\sum_1^\infty \frac{|a_\nu|}{\Gamma(\lambda_\nu + 1)} r^{\lambda_\nu} \leq \frac{M(r)}{\cos \vartheta}.$$

Hieraus folgt, daß der absolute Konvergenztypus  $\alpha$  der Reihe (51) gleich dem gewöhnlichen Typus der Funktion  $G(z)$  ist, und aus Nr. 16, c die Behauptung.

b) Satz XI läßt sich durch einen direkten Beweis wie folgt verschärfen:

**Satz XII.** *Es habe die Dirichlet'sche Reihe (52) ein Konvergenzgebiet und die Exponenten- und Koeffizientenfolge die Eigenschaft (A). Dann fallen der absolute Konvergenzradius und der Beschränktheitsradius zusammen<sup>20)</sup>.*

**Beweis:** Ist  $B = \infty$ , so auch  $A = \infty$ . Wir dürfen also  $B$  endlich voraussetzen. Der Geläufigkeit der Formeln halber wollen wir die Dirichlet'sche Reihe in der gewöhnlichen Form schreiben, also

$$f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}.$$

<sup>20)</sup> Ist die Exponentenfolge über dem Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig, so ergibt sich aus dem Kronecker'schen Satz über Diophantische Approximationen, daß die Bedingung (A) für jede beliebige Koeffizientenfolge erfüllt ist. Vgl. hierzu H. Bohr, Lösung des absoluten Konvergenzproblems einer allgemeinen Klasse Dirichlet'scher Reihen, Acta math., t. 36, 1911.

Die Methode des nachfolgenden Beweises stammt im wesentlichen von H. Bohr; vgl. Bohr, loc. cit.

Ferner sei vorausgesetzt, daß die Funktion  $f(s)$  in der Halbebene  $R(s) > 0$  regulär und beschränkt sei. Dies kann durch eine Variabeltransformation immer erreicht werden.  $M$  sei die obere Grenze von  $f(s)$  in der Halbebene  $R(s) > 0$ . Es gilt dann für jedes  $\varepsilon > 0$  und jedes positive reelle  $x$  die Formel<sup>21)</sup>

$$\sum_{\lambda_n < x} (x - \lambda_n) a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} e^{xs} f(s) \frac{ds}{s^2} = \frac{e^{x\varepsilon} + \infty}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\varepsilon + it) e^{ixt}}{(\varepsilon + it)^2} dt$$

Setzen wir  $s = s' + i\tau$ , so wird

$$f(s) = f(s' + i\tau) = \sum_1^{\infty} a_n \cdot e^{-i\lambda_n\tau} \cdot e^{-\lambda_n s'} = f_{\tau}(s').$$

Die obige Formel auf diese Funktion angewandt, gibt für jedes  $\varepsilon$  die Gleichung

$$\sum_{\lambda_n < x} (x - \lambda_n) a_n e^{-i\lambda_n\tau} = \frac{e^{x\varepsilon} + \infty}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\tau}(\varepsilon + it) e^{ixt}}{(\varepsilon + it)^2} dt.$$

Da ferner  $|f_{\tau}(s)| < M$  für jedes  $\tau$ , sobald  $R(s) > 0$ , so folgt durch Integralabschätzung  $|\sum_{\lambda_n < x} (x - \lambda_n) a_n e^{-i\lambda_n\tau}| \leq \frac{e^{x\varepsilon}}{2\varepsilon} M$  für jedes  $\varepsilon > 0$ . Setzen wir  $x \cdot \varepsilon = 1$ , so gibt eine kleine Umformung

$$\left| \sum_{\lambda_n < x} \left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right) a_n e^{-i\lambda_n\tau} \right| < \frac{1}{2} e M$$

für jedes  $\tau$  und jedes  $x > 0$ . Nun existiert nach Voraussetzung zu jedem  $x$  ein  $\tau$ , so daß die Punkte  $\left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right) a_n e^{-i\lambda_n\tau}$ ,  $\lambda_n < x$ , alle in einem Winkelraum enthalten sind, dessen Scheitel im Nullpunkt gelegen und dessen Öffnung  $\vartheta$  nicht übersteigt und es folgt wie oben, daß für alle  $x$  die Ungleichung

$$\sum_{\lambda_n < x} \left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right) |a_n| < \frac{1}{2} e M / \cos \vartheta$$

gültig ist, die Folge  $\sum_{\lambda_n < x} \left(1 - \frac{\lambda_n}{x}\right) |a_n|$  also bei unbegrenzt wachsenden  $x$

<sup>21)</sup> Vgl. *V. Bernstein*, loc. cit., S. 10 ff. oder *O. Perron*, Zur Theorie der Dirichlet'schen Reihen, Journ. für Math., t. 134, 1908.

konvergiert. Weil bei festem  $n$  der Faktor  $1 - \frac{\lambda_n}{x}$  gegen 1 konvergiert, so konvergiert die Reihe  $\sum_1^{\infty} |a_n|$ , woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

19. a) Ziehen wir jetzt einige Konsequenzen, die sich auf das Wachstum quasiganzer Funktionen beziehen. Sei  $G(z)$  vom sektoriellen Mitteltypus endlicher, von 0 verschiedener Ordnung  $\rho$ . Es ist dann  $G_\rho(z) = G(z^{1/\rho})$  eine quasiganze Funktion vom Exponentialtypus. Bedeutet  $h(\Phi)$  den Wachstumsindikator der Funktion  $G(z)$ , so folgt aus

$$h(\Phi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \lg |G(re^{i\Phi})| = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \lg |G(R^{1/\rho} e^{i\Phi})|,$$

$$h_\rho(\Phi) = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \lg |G_\rho(R e^{i\Phi})| = \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \lg |G(R^{1/\rho} e^{i\Phi/\rho})| = h(\Phi/\rho),$$

daß  $h_\rho(\Phi) = h(\Phi/\rho)$  der Wachstumsindikator der Funktion  $G_\rho(z)$  ist. Wird die Funktion  $G(z)$  dargestellt durch die Reihe (16), so nennen wir die untere Grenze der Zahlen  $V$ , für welche die Folge

$$\left| \sum_1^N a_n z^{\lambda_n} \right| e^{-V|z|^\rho} \quad N = 1, 2, \dots$$

in  $N$  auf  $L$  sektoriell gleichmäßig beschränkt ist, den Konvergenztypus  $C$  der Ordnung  $\rho$ . Die Funktion  $G_\rho(z)$  wird dann dargestellt durch die Reihe  $G_\rho(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^{\lambda_n/\rho}$ . Ihr exponentieller Konvergenztypus ist  $C$ . Aus Nr. 16c folgt dann

**Satz XIII.** *Wird die quasiganze Funktion  $G(z)$  vom sektoriellen Mitteltypus der Ordnung  $\rho$  ( $\rho \neq 0, \infty$ ) dargestellt durch eine Reihe (16) von endlichem Konvergenztypus  $C$  der Ordnung  $\rho$ , so hat die Reihe*

$$g_\rho(z) = \sum_1^{\infty} a_n \Gamma(\lambda_n/\rho + 1) z^{-\lambda_n/\rho - 1}$$

den Konvergenzradius  $C$  und es besteht zwischen der Stützfunktion  $k(\Phi)$  der zur quasiregulären Funktion  $g_\rho(z)$  gehörigen Windungsfläche und dem Indikator der Funktion  $G(z)$  die Gleichung

$$(53) \quad h(\Phi) = k(-\rho\Phi). \quad {}^{22)}$$

<sup>22)</sup> Vgl. *Subbotin*, Math. Ann., Bd. 104, 1931, S. 377 und die eingehende Untersuchung von *V. Bernstein*, Sulla crescita delle trascendenti intere d'ordine finito, R. acad. d'Italia Mem. sc. fis., math. e nat., Vol. IV, 1933, p. 339—401. Beide Autoren behandeln nur die eigentlichen ganzen Funktionen und von letzterem wurden nur die positiven Werte des Wachstumsindikators berücksichtigt. Vgl. auch meine Ankündigung in l'Enseignement math., t. XXXII, 1933, p. 257.

b) Durch diesen Zusammenhang zwischen dem Indikator  $h(\Phi)$  und der Stützfunktion  $k(\Phi)$  lassen sich aus dem geometrisch anschaulichen Verhalten einer Windungsfläche Schlüsse über das Wachstum quasiganzer Funktionen ziehen. Nach Nr. 3 ist  $-H \leq k(\Phi) \leq H$  und allgemeiner

$$(54) \quad k(\Phi + \pi/2) + k(\Phi - \pi/2) \geq 0.$$

Der Indikator  $h(\Phi)$  einer quasiganzen Funktion vom sektoriellen Mitteltypus  $\chi$  der Ordnung  $\rho$  genügt also für alle  $\Phi$  den Ungleichungen

$$(55) \quad \begin{aligned} & -\chi \leq h(\Phi) \leq \chi \\ & h(\Phi + \pi/2\rho) + h(\Phi - \pi/2\rho) \geq 0. \end{aligned}$$

Aus der Ungleichung (54) folgt fast unmittelbar, daß die Intervalle, in denen  $k(\Phi) < 0$ , nicht breiter sein können als  $\pi$ . Analog ergibt sich, daß die Intervalle, in denen  $k(\Phi) > 0$  nicht kleiner sein können als  $\pi$ . Denn ist  $\Phi_1 \leq \Phi \leq \Phi_2$ ,  $k(\Phi_1) = k(\Phi_2) = 0$ ,  $\Phi_2 - \Phi_1 < \pi$  und  $k(\Phi) > 0$ , so ist die Halbebene  $E(k(\Phi), \Phi)$  samt ihrer Begrenzungsgeraden in der Vereinigungsmenge der Halbebenen  $E(0, \Phi_1)$  und  $E(0, \Phi_2)$  gelegen und so könnte auf der Stützgeraden der Normalenrichtung  $\Phi$  keine singuläre Stelle liegen, was mit Nr. 4 im Widerspruch steht.

Ist also der Indikator  $h(\Phi)$  der Funktion  $G(z)$  vom sektoriellen Mitteltypus der Ordnung  $\rho$  für  $\Phi = \Phi^*$  positiv, so gibt es um diesen Punkt  $\Phi^*$  ein Intervall von mindestens der Länge  $\pi/\rho$ , in dem  $h(\Phi)$  positiv bleibt, ist  $h(\Phi)$  für  $\Phi = \Phi^*$  aber negativ, so gibt es um diesen Punkt  $\Phi^*$  ein Intervall von höchstens der Länge  $\pi/\rho$ , in dem  $h(\Phi)$  negativ bleibt.

(Eingegangen den 9. Februar 1935.)