

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1935-1936)

Artikel: Die maximalen Ordnungen periodischer topologischer Abbildungen geschlossener Flächen in sich.
Autor: Steiger, Franz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9286>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die maximalen Ordnungen periodischer topologischer Abbildungen geschlossener Flächen in sich

Von FRANZ STEIGER, Solothurn

Einleitung

In seiner Habilitationsschrift „Zur Theorie der endlichen Gruppen topologischer Abbildungen von geschlossenen Flächen in sich“¹⁾ und in der Abhandlung „Über periodische Transformationen von Flächen“²⁾ hat W. Scherrer, im Anschluß an Arbeiten von Brouwer und v. Kerékjártó, die Grundlagen und die Methoden zur Untersuchung der endlichen topologischen Gruppen von Flächen verallgemeinert und ausgebaut. Die dort aufgestellten Relationen und Sätze ermöglichen es, *die höchste Ordnung der periodischen Transformationen von geschlossenen Flächen* herzuleiten, und zwar für einseitige und zweiseitige Flächen von beliebigem Geschlecht. Dies darzutun ist das Ziel vorliegender Arbeit. Für die indikatriceserhaltenden periodischen Transformationen einer zweiseitigen Fläche vom Geschlecht p beträgt, nach dem für algebraische Kurven vom Geschlecht p ausgesprochenen Satz von *Wiman*³⁾, die maximale Ordnung $n = 2(2p + 1)$. Für diesen Satz ergibt sich hier ein topologischer Beweis. Außerdem werden die maximalen Ordnungen aufgestellt für die periodischen Abbildungen der einseitigen Flächen und für die indikatricesumkehrenden Abbildungen der zweiseitigen Flächen. In den beiden letzten Fällen liefern gerades und ungerades Geschlecht p verschiedene Formeln. Nebenbei ergibt sich das Resultat, daß, mit einer einzigen Ausnahme, die Abbildungen von maximaler Periode nicht zwei „verschiedene“, das will hier sagen, topologisch inäquivalente Realisierungen auf der Fläche gestatten.

Die Beweise bestehen im wesentlichen aus Überlegungen arithmetischer Natur, da das Geometrische bereits restlos in den zugrunde liegenden Beziehungen eingefangen ist. Zur Vermeidung von Wiederholungen und unumgänglichen Fallunterscheidungen, welche die Lektüre und den Überblick nur erschweren konnten, findet der Leser nicht alle Varianten

¹⁾ Erschienen in den „Commentarii Mathematici Helvetici“, Heft II/MCMXXIX, S. 69.

²⁾ Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, LXX, 1925, S. 278.

³⁾ Stockholm, K. Svenska vetenskap. Akademie. Bihang till Handlingar, 21, 1895, S. 4.

bis ins einzelne durchgeführt, sondern nur den *Wiman*'schen Fall der indikatrix-erhaltenden Abbildungen zweiseitiger Flächen. Dafür ist am Schluß der Abhandlung eine modellmäßige Beschreibung eines bestimmten Beispiels angefügt.

In der Bezeichnungsweise halte ich mich möglichst an die zitierten Arbeiten von Scherrer.

1. ABSCHNITT

Allgemeine Beziehungen

Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen sind endliche Gruppen von eineindeutigen und stetigen Abbildungen geschlossener Flächen auf sich selber. Man denke sich die Fläche F vom Geschlecht p zunächst etwa in einer der in der Flächentopologie gebräuchlichen Normalformen gegeben, beispielsweise der „Henkelform“, oder, bei einseitigen Flächen, der Kugel mit p Kreuzhauben⁴). Die betrachtete Gruppe von Abbildungen habe die Ordnung n . Ein beliebiger Punkt P der Fläche wird dann, falls er nicht gerade Fixpunkt der Transformationsgruppe oder einer ihrer Untergruppen ist, durch die $n - 1$ von der Identität verschiedenen Abbildungen der Gruppe der Reihe nach in $n - 1$ verschiedene Punkte übergeführt. Die Stetigkeit der Transformationen hat zur Folge, daß man die ganze Fläche lückenlos in n unter sich topologisch äquivalente Gebiete einteilen kann, derart, daß bei Ausübung jeder Transformation der Gruppe jedes Gebiet als Ganzes in eines der andern übergeführt wird. Dabei gehen aneinandergrenzende wieder in aneinandergrenzende über. Die Ausübung aller Operationen der Abbildungsgruppe auf einen einzigen (aber beliebigen) dieser Fundamentalbereiche läßt eine vollständige und einfache Überdeckung der Fläche entstehen. Anschauliche Beispiele sind etwa die durch beliebige stetige Deformation aus den regulären Polyedern hervorgehenden Flächen vom Geschlechte null mit ihren zugehörigen Abbildungsgruppen, den bekannten Polyedergruppen. Daß der Fundamentalbereich keineswegs einfach zusammenhängend zu sein braucht, zeigt das Beispiel eines Torus, der etwa einer Spiegelung an einer ihn symmetrisch (im topologischen Sinne) schneidenden Ebene unterworfen wird. Er zerfällt nämlich hier in zwei Kreisringe. Bei einer einseitigen Fläche kann auch der Fundamentalbereich einseitig sein.

⁴) Siehe z. B. *B. v. Kerékjártó*, Vorlesungen über Topologie, Bd. 1, Springer, Berlin 1923, S. 151.

Läßt eine Untergruppe von Abbildungen einen Punkt fest (Fixpunkt), so gehört er zu allen durch die Untergruppe permutierten Bereichen, sei es als gemeinsamer Eckpunkt, oder, bei einer einfachen Spiegelung, als innerer Punkt eines fest bleibenden Bogens, der die zwei benachbarten Gebiete trennt.

Die Vorstellung der Fläche in ihrer Normalform als Kugel mit Henkeln und Kreuzhauben ist wohl recht anschaulich und allenfalls zur Beschreibung fertiger Ergebnisse tauglich. Für Untersuchungen der beabsichtigten Art hat sich aber die Vorstellung einer aus mehreren übereinander gelagerten Blättern aufgebauten Fläche besser bewährt. Während bei der Henkelform die Fundamentalbereiche nebeneinanderliegen, denken wir sie uns künftig übereinandergeschichtet und passend verknüpft. Wir gebrauchen also den nach dieser zweiten Vorstellung benannten Begriff der Überlagerungsfläche. Eine gewisse Vertrautheit mit ihm muß deshalb für das folgende vorausgesetzt werden⁵⁾.

Nach einem grundlegenden, von Brouwer aufgestellten und von Scherrer erweiterten Satze darf die betrachtete geschlossene Fläche F , die einer endlichen Gruppe von Abbildungen unterworfen ist, als *reguläre* Überlagerungsfläche einer Modulfläche Φ aufgefaßt werden. Die Abbildungsgruppe ist dann die Gruppe der Decktransformationen der Überlagerungsfläche F . Wenn n ihre Ordnung ist, so besteht F aus n übereinanderliegenden Blättern, nämlich aus n nach bestimmten Vorschriften zusammengehefteten Exemplaren der mit einem geeigneten Schnittsystem versehenen Modulfläche Φ . Jeder Punkt P der „Grundfläche“ Φ ist gemeinsamer Spurpunkt von n übereinanderliegenden (gelegentlich zusammenfallenden) Punkten P_1, P_2, \dots, P_n von F . Über dem Innern von Φ liegen endlich viele Verzweigungspunkte von F , über den Rändern von Φ jeweils n Faltungslinien und endlich viele Faltverzweigungspunkte.

Seine volle Bedeutung erhält der erwähnte Satz erst, wenn der „Monodromiesatz“ hinzugenommen wird. Ordnet man der Durchlaufung von n Kurven auf F , die auf Φ *dieselbe geschlossene* Spurkurve haben, nach bestimmter Vorschrift eine Substitution S zu*), so erhält man eine endliche Gruppe von Substitutionen, die sogenannte Monodromiegruppe.

⁵⁾ loc. cit. ⁴⁾ (S. 158) und ¹⁾ (S. 78).

*) Die n übereinanderliegenden laufenden Punkte der Kurven führen von einer gewissen Ausgangslage (P_1, P_2, \dots, P_n) in die Endlage $(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_n})$ über. Die Substitution S ist die dadurch definierte Permutation der n Blätter und ist bestimmt durch die Art, in der die Blätter längs der Schnitte oder Ränder zusammengeheftet sind. Ausführlichere Darlegung des Verfahrens auf S. 87 der unter ¹⁾ zitierten Arbeit.

Sie ist also die Gruppe der Verzweigungssubstitutionen im allgemeinsten Sinne. Es gilt dann der

Monodromiesatz: Die Monodromiegruppe einer regulären Überlagerungsfläche ist vollständig isomorph mit der Gruppe der Decktransformationen unter Vertauschung der Faktorenfolge.

Man kann daher von der durch die Zusammenheftung der Blätter bestimmten Monodromiegruppe sofort auf die Decktransformationen schließen und umgekehrt.

Als *Verzweigungssubstitutionen* kommen in Frage:

1. V_1, V_2, \dots, V_v für die Umkreisung der Verzweigungspunkte (Überschreiten der nach den Verzweigungspunkten hingeführten Schnitte);
2. R_1, R_2, \dots, R_ρ für das Überschreiten der zu den Rändern hingeführten Schnitte;
3. S_{ik} für die Randübergänge auf dem k -ten Bogen des i -ten Randes;
4. \bar{V}_{ik} für das Umfahren der Faltverzweigungspunkte auf dem i -ten Rande;
5. $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_\pi, B_\pi$ für das Überschreiten der Schnitte eines kanonischen Schnittsystems auf Φ ($\pi =$ Geschlecht von Φ), wenn Φ zweiseitig ist, A_1, A_2, \dots, A_π , wenn Φ einseitig ist.

Es bestehen nun folgende *Grundrelationen*:

$$\text{I} \quad V_1 V_2 \cdots V_v R_1 R_2 \cdots R_\rho A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \cdots A_\pi B_\pi A_\pi^{-1} B_\pi^{-1} = 1, \quad (1)$$

falls Φ zweiseitig ist;

$$\text{I}' \quad V_1 V_2 \cdots V_v R_1 R_2 \cdots R_\rho A_1^2 A_2^2 \cdots A_\pi^2 = 1, \quad (2)$$

falls Φ einseitig ist.

Diese Relation besagt, daß in dem Punkte, von dem aus das Schnittsystem gelegt wurde, beim Zusammenheften der n Blätter keine Verzweigung auftreten darf.

$$\text{II} \quad S_{i, \lambda+1} S_{i, \lambda} = \bar{V}_{i, \lambda} \quad \lambda = 1, 2, \dots, v_i - 1 \quad (3)$$

$$\text{III} \quad R_i^{-1} S_{i, 1} R_i S_{i, v_i} = \bar{V}_{i, v_i} \quad (4)$$

Die Relationen II und III ergeben sich, wenn man überlegt, wie durch das Zusammenheften der Ränder und der nach den Rändern hingeführten Schnitte Faltverzweigungen entstehen.

Falls ein Rand keine Faltverzweigung trägt, gilt

$$\text{III}' \quad R_i^{-1} S_i R_i S_i = 1 \quad (\text{es ist } S_i \text{ für } S_{i1} \text{ gesetzt}) \quad (5)$$

Falls Ränder auf Φ (nicht aber auf F !) überhaupt vorhanden sind, gilt weiter

$$\text{IV} \quad \left. \begin{array}{l} S_{ik}^2 = 1 \\ n \equiv 0 \pmod{2} \end{array} \right\} \quad (6)$$

Schließlich ist

$$\text{V} \quad V_i^{\lambda_i} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, v \quad (7)$$

(λ_i , die Ordnung der Verzweigung, ist ein Teiler von n)

$$\text{VI} \quad \bar{V}_{ik}^{\mu_{ik}} = 1 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, \varrho \\ k = 1, 2, \dots, v_i \end{array} \quad (8)$$

Dazu kommt noch die erweiterte „Hurwitz-Relation“:

$$(H) \quad 2 - z = n(2 - \zeta) - \sum_{(i)} n \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right) - \sum'_{(i,k)} \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu_{ik}}\right) \quad (9)$$

Hierbei bedeutet

$$z = 2p_2 + p_1 \text{ die Zusammenhangszahl der (geschlossenen) Überlagerungsfläche } F, \quad (10)$$

$$\zeta = 2\pi_2 + \pi_1 + \varrho \text{ diejenige der Modulfläche } \Phi, \quad (11)$$

ϱ die Anzahl Ränder auf Φ .

$$\text{Ist } F \text{ zweiseitig, so ist } z = 2p, \quad (p = p_2 = \text{Geschlecht}) \quad (12)$$

$$\text{ist } F \text{ einseitig, so ist } z = p, \quad (p = 2p_2 + p_1 = \text{Geschlecht}) \quad (13)$$

Ebenso gilt:

$$\text{wenn } \Phi \text{ zweiseitig ist: } \zeta = 2\pi + \varrho, \quad (14)$$

$$\text{wenn } \Phi \text{ einseitig ist: } \zeta = \pi + \varrho \quad (\pi = \text{Geschlecht}) \quad (15)$$

Schließlich brauchen wir noch folgenden *Satz*:

Eine endlichblättrige Überlagerungsfläche ist dann und nur dann einseitig, wenn die Monodromiegruppe eine Relation enthält, in welcher die unter Berücksichtigung der Multiplizitäten festgestellte Anzahl der

indikatrixumkehrenden erzeugenden Operationen ungerade ist. Als indikatrixumkehrende Operationen sind dabei diejenigen Substitutionen bezeichnet, welche einem Randübergang oder einem einufrigen Rückkehrschnitt entsprechen. (16)

Damit sind die erforderlichen Grundlagen zusammengestellt, und wir können dazu übergehen, sie für den Fall periodischer Transformationen, also für den Fall einer *zyklischen Gruppe* zu spezialisieren:

Das erzeugende Element derselben bezeichnen wir mit S , die Ordnung mit n , so daß die definierende Relation besteht

$$S^n = 1. \quad (17)$$

Wegen der Kommutativität reduziert sich die Relation I (1) für zweiseitige Modulfläche Φ auf

$$I \quad V_1 V_2 \cdots V_v R_1 R_2 \cdots R_\rho = 1. \quad (18)$$

Eine zyklische Gruppe enthält höchstens *ein* Element von der Ordnung 2, und zwar dann, wenn n gerade ist.

Die Randübergangssubstitutionen S_{ik} sind deshalb alle identisch, nämlich:

$$S_{ik} = S^{\frac{n}{2}} (= S_1) \quad (19)$$

in Verbindung mit $n \equiv 0 \pmod{2}$.

Sofort folgt jetzt aus (3) und (4), daß

$$\bar{V}_{ik} = 1, \quad (20)$$

d. h., daß gar keine Faltverzweigungen vorkommen können. III' (5) liefert keine neue Beziehung. In der Hurwitz-Relation fällt die Summe über die Faltverzweigungen weg. Wir schreiben sie in der Gestalt

$$\sum_{i=1}^v \frac{n}{\lambda_i} = n(v + \zeta - 2) - z + 2 \quad (21)$$

(v bedeutet die Anzahl Verzweigungsstellen über Φ).

Wir stellen jetzt die Verzweigungssubstitutionen durch die erzeugende Substitution S folgendermaßen dar⁶⁾:

$$V_i = S^{\frac{\sigma_i n}{\lambda_i}}, \text{ wo } (\sigma_i, \lambda_i) = 1. \quad (22)$$

⁶⁾ loc. cit ²⁾, S. 280.

Wir bedienen uns hier des in der Zahlentheorie gebräuchlichen Symbols (a, b, \dots) für einen Modul bzw. ein Ideal zur Bezeichnung des größten gemeinsamen Teilers der ganzen Zahlen a, b, \dots . $(\sigma_i, \lambda_i) = 1$ bedeutet also, die Zahlen σ_i und λ_i seien teilerfremd.

$$R_i = S^{\frac{\tau_i n}{\varrho_i}}, \text{ wo } (\tau_i, \varrho_i) = 1 \quad (23)$$

$$S_{ik} = S^{\frac{n}{2}} = S_1 \quad (\text{vergl. (19)}) \quad (24)$$

$$A_i = S^{\frac{\alpha'_i n}{\alpha_i}}, \text{ wo } (\alpha'_i, \alpha_i) = 1 \quad (25)$$

$$B_i = S^{\frac{\beta'_i n}{\beta_i}}, \text{ wo } (\beta'_i, \beta_i) = 1 \quad (26)$$

Unter Verwendung dieser Formeln nehmen die „Grundrelationen“ I und I' ((18) und (2)) die Gestalt an:

Für zweiseitige Modulfläche $\Phi = \Phi_2$

$$\sum_{i=1}^v \frac{\sigma_i n}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{\varrho} \frac{\tau_i n}{\varrho_i} \equiv 0 \pmod{n} \quad (27)$$

Für einseitige Modulfläche $\Phi = \Phi_1$

$$\sum_{i=1}^v \frac{\sigma_i n}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{\varrho} \frac{\tau_i n}{\varrho_i} + \sum_{i=1}^{\pi} 2 \frac{\alpha'_i n}{\alpha_i} \equiv 0 \pmod{n} \quad (28)$$

Zu diesen Grundrelationen treten weitere 4 Beziehungen, die ich kurz als „Vollständigkeitsrelationen“ bezeichne. Es sind die Bedingungen dafür, daß die Gruppen durch die jeweiligen angegebenen erzeugenden Verzweigungssubstitutionen erschöpft, d. h., daß wirklich Gruppen von der Ordnung n erzeugt werden.

Φ einseitig, ohne Ränder: $\varrho = 0$.

Erzeugende Substitutionen: $V_i, A_k; \quad i = 1, 2, \dots, v$
 $k = 1, 2, \dots, \pi.$

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \frac{\sigma_2 n}{\lambda_2}, \dots, \frac{\sigma_v n}{\lambda_v}, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \frac{\alpha'_2 n}{\alpha_2}, \dots, \frac{\alpha'_\pi n}{\alpha_\pi}, n \right) = 1 \quad (29)$$

Φ einseitig, berandet: $\varrho > 0$.

Erzeugende Substitutionen: V_i, A_k, S_1 ; eventuell R_l .

$i = 1, 2, \dots, v. \quad k = 1, 2, \dots, \pi. \quad l = 1, 2, \dots, \varrho.$

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\sigma_v n}{\lambda_v}, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, \frac{\tau_\varrho n}{\varrho_\varrho}, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha'_\pi n}{\alpha_\pi}, \frac{n}{2} \right) = 1 \quad (30)$$

Φ zweiseitig, ohne Ränder: $\varrho = 0$.

Erzeugende Substitutionen: V_i, A_k, B_l ;

$i = 1, 2, \dots, v. \quad k = 1, 2, \dots, \pi. \quad l = 1, 2, \dots, \pi.$

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\sigma_v n}{\lambda_v}, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha'_\pi n}{\alpha_\pi}, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, \frac{\beta'_\pi n}{\beta_\pi}, n \right) = 1 \quad (31)$$

Φ zweiseitig, berandet: $\varrho > 0$.

Erzeugende Substitutionen: V_i, A_k, B_l, S_1 ; eventuell R_m .

$i = 1, 2, \dots, v. \quad k = 1, 2, \dots, \pi. \quad l = 1, 2, \dots, \pi. \quad m = 1, 2, \dots, \varrho.$

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\sigma_v n}{\lambda_v}, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, \frac{\tau_\varrho n}{\varrho_\varrho}, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha'_\pi n}{\alpha_\pi}, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, \frac{\beta'_\pi n}{\beta_\pi}, \frac{n}{2} \right) = 1 \quad (32)$$

Alle diese Bedingungen sind für die „Vollständigkeit“ der Gruppe notwendig und hinreichend.

Die in einem Satze (16) ausgesprochene Bedingung für die Nichtorientierbarkeit bzw. Orientierbarkeit einer Überlagerungsfläche läßt sich bei den zyklischen Gruppen für fünf Fälle spezialisieren. Die gewonnenen Bedingungen nenne ich dann kurz „Orientierbarkeitsrelationen“:

1. Φ sei zweiseitig und unberandet. Dann ist F sicher zweiseitig, weil gar keine indikatixumkehrende Substitution existiert. (33)

2. Φ sei zweiseitig und berandet. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß F einseitig ist, besteht darin, daß wenigstens *eine* Relation folgender Art besteht:

$$S_1 = V_1^{x_1} V_2^{x_2} \dots V_v^{x_v} R_1^{y_1} \dots R_\varrho^{y_\varrho} A_1^{z_1} \dots A_\pi^{z_\pi} B_1^{t_1} \dots B_\pi^{t_\pi}, \quad (34)$$

wo x_i, y_i, z_i und t_i irgend welche ganze Zahlen sind. Unter Verwendung der Formeln (22) bis (26) nebst (17) läßt sich dann schreiben:

$$S^2 = S^{x_1 \frac{\sigma_1 n}{\lambda_1} + x_2 \frac{\sigma_2 n}{\lambda_2} + \dots + y_1 \frac{\tau_1 n}{\varrho_1} + \dots + z_1 \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1} + \dots + t_1 \frac{\beta'_1 n}{\beta_1} + \dots + qn} \quad (q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (35)$$

Der Exponent auf der rechten Seite möge in der für mehrgliedrige Moduln oder vielmehr Ideale gebräuchlichen Weise dargestellt werden:

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \frac{\sigma_2 n}{\lambda_2}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, n \right).$$

Dann folgt aus (35)

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, n \right) = \left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, \frac{n}{2} \right) \quad (36)$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für $F = F_1$, wenn $\Phi = \Phi_2$ und berandet.

3. Φ sei zweiseitig und berandet. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß F zweiseitig ist, besteht darin, daß, trotz dem Vorhandensein der Randübergangssubstitution S_1 , für beliebige x_i, y_i, z_i, t_i keine Relation (34) existiert. Dies kommt darauf hinaus, entsprechend (36) zu schreiben:

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, n \right) \neq \left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, \frac{n}{2} \right) \quad (37)$$

Diese Bedingung läßt sich noch schärfer fassen:

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, n \right) = 2 \left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, \frac{n}{2} \right) \quad (38)$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für $F = F_2$, wenn $\Phi = \Phi_2$ und berandet.

4. Φ sei einseitig, berandet oder unberandet. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß F einseitig ist, besteht darin, daß wenigstens eine Relation folgender Art besteht:

$$A_1^{x_1} A_2^{x_2} \dots A_{\pi}^{x_{\pi}} S_1^{\delta} = V_1^{y_1} V_2^{y_2} \dots V_v^{y_v} R_1^{z_1} R_2^{z_2} \dots R_{\varrho}^{z_{\varrho}}, \quad (39)$$

wobei $\delta = \begin{cases} 0 & \text{oder} \\ 1 \end{cases}$ sein kann, ferner $\delta + \sum_1^{\pi} x_i \equiv 1 \pmod{2}$ ist, die x_i, y_i, z_i im übrigen aber beliebige ganze Zahlen bedeuten, welche auch Null sein können.

Wenn wir wieder die Formeln (22) bis (26) einsetzen und die Exponenten der entstehenden Relation vergleichen, so folgt

$$x_1 \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1} + x_2 \frac{\alpha'_2 n}{\alpha_2} + \dots + \delta \frac{n}{2} = y_1 \frac{\sigma_1 n}{\lambda_1} + \dots + z_1 \frac{\tau_1 n}{\varrho_1} + \dots + qn \quad (40)$$

mit obigen Zusatzbedingungen.

Dies läßt sich so formulieren: Die Beziehung

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, n \right) = \left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, n, x_1 \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1} + x_2 \frac{\alpha'_2 n}{\alpha_2} + \dots + \delta \frac{n}{2} \right) \quad (41)$$

soll gelten für mindestens ein System (x_i, δ) , wobei $\delta = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, x_i irgend welche ganze Zahlen, und $\delta + \Sigma x_i \equiv 1 \pmod{2}$.

Notwendige und hinreichende Bedingung für $F = F_1$, wenn $\Phi = \Phi_1$. (Wenn Φ unberandet ist, so gilt natürlich stets $\delta = 0$).

5. Φ sei einseitig, berandet oder unberandet. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß F zweiseitig ist, besteht darin, daß bei beliebigen y_i und z_i für *kein* System (x_i, δ) , wo $\delta + \Sigma x_i \equiv 1 \pmod{2}$ ist, eine Relation (39) besteht. Also gilt

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, n \right) \neq \left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, n, x_1 \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1} + x_2 \frac{\alpha'_2 n}{\alpha_2} + \dots + \delta \frac{n}{2} \right) \quad (42)$$

für jedes System (x_i, δ) , wobei $\delta = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ und $\delta + \Sigma x_i \equiv 1 \pmod{2}$.

Notwendige und hinreichende Bedingung für $F = F_2$, wenn $\Phi = \Phi_1$. (Wenn Φ unberandet ist, gilt $\delta = 0$).

Es ist bequem, noch folgende *Kombinationen* der Vollständigkeitsrelationen und Orientierbarkeitsrelationen vorzunehmen:

(32) und (36) ergeben

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, n \right) = 1 \quad (43)$$

als notwendige und hinreichende Bedingung für $F = F_1$ und Erschöpfung der Gruppe, wenn $\Phi = \Phi_2$ und berandet.

Ferner liefern (32) und (38)

$$\left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \dots, \frac{\tau_1 n}{\varrho_1}, \dots, \frac{\alpha'_1 n}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta'_1 n}{\beta_1}, \dots, n \right) = 2 \quad (44)$$

als notwendige (aber *nicht* hinreichende!) Bedingung für $F = F_2$ und Erschöpfung der Gruppe, wenn $\Phi = \Phi_2$ und berandet.

Hierzu ist zu bemerken: Es könnte sehr wohl (44) erfüllt sein, aber trotzdem weder (32) noch (38)! Ist aber (32) sicher erfüllt, so ist (44) für das gleichzeitige Bestehen der beiden erwähnten Eigenschaften auch hinreichend.

2. ABSCHNITT

Die maximalen Ordnungen periodischer Abbildungen geschlossener Flächen

Im 1. Abschnitt wurden die Hilfsmittel für eine speziellere Untersuchung der periodischen Transformationen geschlossener Flächen bereitgestellt. Bevor wir an die Hauptaufgabe, die Aufstellung der maximalen Ordnungen, herantreten, mögen einige Bemerkungen, teils historischer Art, vorausgeschickt werden.

Wiman untersuchte die periodischen Transformationen algebraischer Kurven in sich. Er bewies mit den analytischen Methoden der Kurventheorie den Satz, daß die maximale Ordnung der periodischen Transformationen einer algebraischen Kurve vom Geschlechte p in sich durch den Ausdruck $n = 2(2p + 1)$ gegeben sei.

Nun sind bekanntlich die Begriffe „Geschlecht einer algebraischen Kurve“ und „ein-eindeutige Transformation einer algebraischen Kurve in sich“ einerseits und andererseits die Begriffe „Geschlecht einer zweiseitigen geschlossenen Fläche“ und „ein-eindeutige Abbildung einer solchen Fläche auf sich“ nur zwei verschiedene Erscheinungsformen ein und desselben topologischen Sachverhalts. Der Zusammenhang sei ganz kurz angedeutet. Eine algebraische Gleichung $f(x, y) = 0$ in zwei Variablen definiert einerseits, wenn x und y als Punktkoordinaten gedeutet werden, eine algebraische Kurve; andererseits bestimmt sie, wenn x und y als komplexe Variable aufgefaßt und je durch Punkte von Gauß'schen Ebenen dargestellt werden, zwei Riemann'sche Flächen, die x - und die y -Fläche, welche sich ein-eindeutig entsprechen.

Von der Funktionsgleichung ausgehend, gelangt man durch den in den Lehrbüchern über algebraische Kurventheorie beschriebenen Abzählungsprozeß (Abzählung von Tangenten, singulären Punkten usw.) zu der Formel von *Clebsch* für das Geschlecht einer algebraischen Kurve:

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$$

n = Ordnung der Kurve; d = Anzahl der Doppelpunkte; r = Anzahl der Rückkehrpunkte.

Andererseits erreicht man durch genau denselben, aber entsprechend anders gedeuteten Abzählungsprozeß (Abzählung von Verzweigungspunkten usw.), die in den Funktionentheorie- und Topologielehrbüchern abgeleitete Formel von *Riemann* (Spezialfall der Hurwitzrelation) für das Geschlecht einer Riemann'schen Fläche

$$p = \frac{w}{2} - m + 1$$

w = Summe der Verzweigungsordnungen aller Verzweigungspunkte;
 m = Blätterzahl.

Gewisse Aussagen, wie der Satz von Wiman, über Transformationen algebraischer Kurven gelten somit, bei sinngemäßer Interpretation, ohne weiteres für topologische Abbildungen geschlossener zweiseitiger Flächen. Das Bedürfnis, sie auch mit den Methoden der Flächentopologie zu beweisen, ist daher nichts als natürlich. Gleichzeitig dienen diese Beweismethoden dazu, die Aussagen auf einseitige Flächen auszudehnen. Wir stellen die Ergebnisse in Form eines Satzes voran.

Satz: Die maximalen Ordnungen n der periodischen Abbildungen geschlossener zweiseitiger oder einseitiger Flächen F vom Geschlecht p betragen:

- A) wenn F einseitig, p ungerade ($p > 2$) $n = 2p$
- B) wenn F einseitig, p gerade ($p > 2$) $n = 2(p - 1)$
- C) wenn F zweiseitig, p beliebig ($p > 1$),
für indikatrizerhaltende Abbildungen $n = 2(2p + 1)$
(Wiman!)
- D) wenn F zweiseitig, p ungerade ($p > 1$),
für indikatrizerhaltende Abbildungen $n = 4(p - 1)$
- E) wenn F zweiseitig, p gerade ($p > 1$),
für indikatrizerhaltende Abbildungen $n = 4(p + 1)$. (45)

Als Grundlage für den *Beweis* dieses Satzes, dem dieser 2. Abschnitt gewidmet ist, dienen die im 1. Abschnitt aufgestellten Relationen.

Der Gang der Überlegungen sei kurz auseinandergesetzt. Zuerst werden mit Hilfe der Hurwitz-Relation diejenigen Überlagerungsflächen aufgesucht, welche überhaupt zu den im Satz behaupteten maximalen oder eventuell noch höheren Ordnungen Anlaß geben könnten. Dann kann

man die weiteren Bedingungen dazu benützen, um in den einzelnen Fällen nachzuweisen, daß höhere als die behaupteten Ordnungen nicht möglich sind. Gleichzeitig lassen sich aber Fälle mit den behaupteten maximalen Ordnungen wirklich aufstellen und ihre Verträglichkeit mit allen Bedingungen erhärten.

Obschon bei diesem Beweisverfahren die fünf Einzelfälle A) bis E) und die bei näherer Untersuchung hinzutretenden Varianten teilweise gemeinsam behandelt werden können, läßt sich doch von einer gewissen Stelle an eine recht umständliche Fallunterscheidung und Einzelbehandlung nicht wohl vermeiden. Im Interesse der leichteren Lesbarkeit und der Übersichtlichkeit des Beweisganges soll deshalb nur der *Wiman'sche Fall C)* in allen Einzelheiten durchgeführt werden. Für die andern vier Fälle läßt sich der Beweis auf demselben Weg erbringen, ohne daß sich hierbei prinzipielle Abweichungen ergeben.

Vorläufig mögen die Fälle noch gemeinsam untersucht werden.

Wenn wir statt des Geschlechtes p die Zusammenhangszahl z verwenden, so sind die maximalen Ordnungen nach der Behauptung des Satzes (siehe (12) und (13)):

$$\begin{aligned} \text{A)} \quad n &= 2z \\ \text{B)} \quad n &= 2(z - 1) \\ \text{C)} \quad n &= 2(z + 1) \\ \text{D)} \quad n &= 2(z - 2) \\ \text{E)} \quad n &= 2(z + 2) \end{aligned} \tag{46}$$

$$\text{Dabei ist stets vorausgesetzt: } z > 2. \tag{46a}$$

Wir ziehen jetzt die Hurwitz-Relation (21) heran; aus ihr folgt

$$n = \frac{z - 2}{N}, \tag{47}$$

$$\text{wobei} \quad N = v + \zeta - 2 - \sum_1^v \frac{1}{\lambda_i} \text{ ist.} \tag{48}$$

Ein Punkt ist nur dann wirklich „Verzweigungspunkt“, falls dort $\lambda_i \geq 2$ ist. (49)

Dann schließt man aus (48) und (49) :

$$\begin{aligned} N &\geq v + \zeta - 2 - v \frac{1}{2}, \text{ also} \\ N &\geq \frac{v}{2} + \zeta - 2. \end{aligned} \tag{50}$$

Andererseits ist

$$N \leq v + \zeta - 2. \quad (51)$$

Wir suchen jetzt alle Fälle, bei denen die Ordnung $n = \frac{z-2}{N}$ größer oder gleich derjenigen ist, von welcher wir in (46) behaupteten, sie sei die maximale. Dies gibt dann eine Bedingung für N (es wird stets vorausgesetzt $z > 2$):

$$\begin{aligned} A) \quad & \frac{z-2}{N} \geq 2z & N < \frac{1}{2} \\ B) \quad & \frac{z-2}{N} \geq 2(z-1) & N < \frac{1}{2} \\ C) \quad & \frac{z-2}{N} \geq 2(z+1) & N < \frac{1}{2} \\ D) \quad & \frac{z-2}{N} \geq 2(z-2) & N \leq \frac{1}{2} \\ E) \quad & \frac{z-2}{N} \geq 2(z+2) & N < \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (52)$$

Für alle Fälle ist außerdem $N > 0$ (53)

Wir stellen, unter Berücksichtigung von (50), (51), (52), (53) eine Tabelle auf:

	ζ	v	N
	0	≤ 2	≤ 0 wegen (51)
1.	0	3	$-\frac{1}{2} \leq N \leq 1$
2.	0	4	$0 \leq N \leq 2$
3.	0	5	$\leq \frac{1}{2}$ „ (50)
	0	≤ 6	≤ 1 „ (50)
	1	≤ 1	≤ 0 „ (51)
4.	1	2	$0 \leq N \leq 1$
5.	1	3	$\leq \frac{1}{2}$ „ (50)
	1	≤ 4	≤ 1 „ (50)
	2	0	≤ 0 „ (51)
6.	2	1	$\leq \frac{1}{2}$ „ (50)
	2	≤ 2	≤ 1 „ (50)
	≤ 3	≤ 0	≤ 1 „ (50)

(54)

Diskussion :

Nach (52) kommen für A), B), C) und E) nur 1., 2. und 4. in Betracht.

Nach (45) müssen bei A) und B), da die Fläche einseitig ist und ferner bei D) und E) indikatrixumkehrende Operationen (Randübergänge oder einufrige Rückkehrschnitte) vorkommen. Danach muß π oder ϱ von Null verschieden, also sicher $\zeta > 0$ sein. Für A), B), D) und E) fallen somit 1., 2. und 3. weg.

Andererseits dürfen, nach (45), bei C) keine indikatrixumkehrenden Operationen vorkommen, d. h. es muß $\varrho = 0$ sein und $\Phi = \Phi_2$, also $\zeta = 2\pi + \varrho = 2\pi = \text{gerade!}$ Für C) fällt 4. weg.

Fassen wir diese Überlegungen zusammen, so bleiben nur folgende Möglichkeiten übrig:

$$\begin{array}{ll}
 \text{A):} & 4. \\
 \text{B):} & 4. \\
 \text{C):} & 1. \text{ und } 2. \\
 \text{D):} & 4., 5. \text{ und } 6. \\
 \text{E):} & 4.
 \end{array} \tag{55}$$

Die fünf nach Tabelle (55) in Betracht kommenden Fälle lassen sich weiter spezialisieren:

1.	$\Phi = \Phi_2$	$\pi = 0$	$\varrho = 0$	$v = 3$	
2.	$\Phi = \Phi_2$	$\pi = 0$	$\varrho = 0$	$v = 4$	
4. a	$\Phi = \Phi_2$	$\pi = 0$	$\varrho = 1$	$v = 2$	
b	$\Phi = \Phi_1$	$\pi = 1$	$\varrho = 0$	$v = 2$	
5. a	$\Phi = \Phi_2$	$\pi = 0$	$\varrho = 1$	$v = 3$	(56)
b	$\Phi = \Phi_1$	$\pi = 1$	$\varrho = 0$	$v = 3$	
6. a	$\Phi = \Phi_2$	$\pi = 0$	$\varrho = 2$	$v = 1$	
b	$\Phi = \Phi_1$	$\pi = 1$	$\varrho = 1$	$v = 1$	
c	$\Phi = \Phi_1$	$\pi = 2$	$\varrho = 0$	$v = 1$	
[d	$\Phi = \Phi_2$	$\pi = 1$	$\varrho = 0$	$v = 1$	

Dieser Fall hat nur indikatrix *erhaltende* Operationen und kommt für D) nicht in Frage!.]

Von hier an beschränken wir uns, wie schon angekündigt, auf die ausführliche Behandlung des *Wiman'schen* Falles C). Um die an die Spitze gestellte Formel ((45) und (46)) zu beweisen, setzen wir

$$n = 2z + 2 + \mu, \tag{57}$$

wobei $\mu \geq 0$ vorausgesetzt werde. (58)

Es wird sich dann zeigen, daß $\mu > 0$ ausgeschlossen werden muß, und daß andererseits eine Lösung für $\mu = 0$ existiert, welche mit allen Bedingungen verträglich ist. Damit wird die Behauptung für den Fall C) bewiesen sein.

Wenn wir für $\frac{n}{\lambda_i}$ zur Abkürzung a_i setzen, und dann nach (55) und (54) die Hurwitz-Relation (21) spezialisieren, erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{C) } 1. \quad a_1 + a_2 + a_3 &= n - z + 2 \\ 2. \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 2n - z + 2 \end{aligned} \quad (59)$$

Hieraus und aus (57) werde z eliminiert und dann die Bedingung $\mu \geq 0$ (58) geltend gemacht:

$$\begin{aligned} \text{C) } 1. \quad 2(a_1 + a_2 + a_3) - n - 6 &\geq 0 \\ 2. \quad 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - 3n - 6 &\geq 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Die im 1. Abschnitt als Grund- und Vollständigkeitsrelationen bezeichneten Bedingungen, ferner die in den Beziehungen (60) ausgedrückte Forderung $\mu \geq 0$, werden jetzt gestatten, einen für die Ordnung n noch zu gewinnenden Ausdruck immer mehr einzuengen, bis schließlich aus der Diskussion einer tabellarischen Aufstellung der Möglichkeiten die einzige brauchbare Lösung der Hurwitz-Relation hervorgeht.

Der Fall C 1. (Vergleiche (55) und (56)!).

Es gelten die Relationen

$$(31) \quad \left(\frac{\sigma_1 n}{\lambda_1}, \frac{\sigma_2 n}{\lambda_2}, \frac{\sigma_3 n}{\lambda_3}, n \right) = 1 \quad (61)$$

$$(27) \quad \frac{\sigma_1 n}{\lambda_2} + \frac{\sigma_2 n}{\lambda_2} + \frac{\sigma_3 n}{\lambda_3} \equiv 0 \pmod{n} \quad (62)$$

$$\text{Die ganzen Zahlen } \frac{n}{\lambda_i} = a_i \text{ sind Teiler von } n. \quad (63)$$

Wenn jetzt $(a_1, a_2) = \alpha$ ist, so folgt aus (61) und (63)

$$\begin{aligned} (\sigma_3 a_3, \alpha) &= 1 \text{ und aus (62)} \\ \sigma_3 a_3 &= x n - \sigma_1 a_1 - \sigma_2 a_2 = f \alpha. \end{aligned}$$

Dann ist $(\sigma_3 a_3, \alpha) = (f \alpha, \alpha) = \alpha = 1$ und somit

$$(a_1, a_2) = 1$$

Analog ist $(a_2, a_3) = 1$ (64)

und $(a_3, a_1) = 1$

und deshalb $n = a_1 a_2 a_3 m$, wo $m \geq 1$. (65)

(60) liefert dann $2(a_1 + a_2 + a_3) - a_1 a_2 a_3 m - 6 \geq 0$ (66)

Man erkennt leicht, daß diese Bedingung nur für $m = 1$ erfüllt werden kann: $n = a_1 a_2 a_3$ und (67)

$$r = 2(a_1 + a_2 + a_3) - a_1 a_2 a_3 - 6 \geq 0 \quad (68)$$

Danach bestehen folgende vier Möglichkeiten, wobei a_1, a_2 und a_3 als gleichberechtigt aufzufassen sind:

	a_1	a_2	a_3	r
$\alpha)$	n	1	1	> 0
$\beta)$	$\frac{n}{2}$	2	1	$= 0$
$\gamma)$	$\frac{n}{4}$	2	2	≤ 0 für $n \leq 4$
$\delta)$	$\frac{n}{2} > a_1 > 2$	$\frac{n}{2} > a_2 > 2$	≥ 1	< 0 (Beweis folgt !)

(69)

Diskussion:

$\alpha)$ kommt wegen $\lambda_i \geq 2, a_i = \frac{n}{\lambda_i} \leq \frac{n}{2}$ gar nicht in Frage.

$\beta)$ Setzt man die Werte $\frac{n}{\lambda_1} = \frac{n}{2}, \frac{n}{\lambda_2} = 2, \frac{n}{\lambda_3} = 1$ in (59) ein, so folgt

$$n = 2(z + 1) \text{ und dann aus (57) } \mu = 0. \quad (70)$$

Die Lösung ist, wie man sich leicht überzeugen kann, mit allen Bedingungen verträglich.

$\gamma)$ $n \leq 4$ kann nicht maximale Ordnung sein, da schon im Falle $p = 2, z = 4$ durch $\beta)$ die Lösung $n = 2(z + 1) = 10$ sichergestellt ist.

$\delta)$ Es ist der Beweis nachzuholen für $r < 0$.

Sei zunächst $a_3 = 1$. Dann ist

$$r = 2(a_1 + a_2 + a_3) - n - 6 = 2\left(a_1 + \frac{n}{a_1} + 1\right) - n - 6 = \frac{2}{a_1}\left(\frac{n}{2} - a_1\right)\left(2 - a_1\right) < 0.$$

Wird nun noch a_3 um 1 erhöht, so wird dadurch der Ausdruck $2(a_1 + a_2 + a_3)$ um 2 vergrößert, dagegen $n = a_1 a_2 a_3$ um mehr als 2. Es bleibt also für $a_3 > 1$: $r < 0$, w. z. b. w.

Der Fall C 2).

Es gilt die Bedingung (60):

$$h = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - 3n - 6 \geq 0 \tag{71}$$

Wegen $\lambda_i \geq 2$ ist hier $a_i = \frac{n}{\lambda_i} \leq \frac{n}{2}$.

Danach bestehen folgende Möglichkeiten:

	a_1	a_2	a_3	a_4	h
$\alpha)$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	> 0
$\beta)$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$a_4 < \frac{n}{2}$	
$\gamma)$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{3}$	$a_4 < \frac{n}{2}$	
	$\leq \frac{n}{2}$	$\leq \frac{n}{2}$	$\leq \frac{n}{4}$	$\leq \frac{n}{4}$	< 0
	$\leq \frac{n}{2}$	$\leq \frac{n}{3}$	$\leq \frac{n}{3}$	$\leq \frac{n}{3}$	< 0

(72)

Diskussion:

Es gilt hier (unter anderen) die Relation (31):

$$(\sigma_1 a_1, \sigma_2 a_2, \sigma_3 a_3, \sigma_4 a_4, n) = 1 \tag{73}$$

$\alpha)$ Wegen $\lambda_i = 2$ ist hier $\sigma_i = 1$, und deshalb $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, n\right) = 1$, somit $n = 2$. Dies ist aber sicher keine maximale Periode für C).

$$\beta) \text{ Hier ist } \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \sigma_4 a_4, n \right) = \left(\frac{n}{2}, \sigma_4 a_4 \right) = 1.$$

Da a_4 ein Teiler von n ist, und $n > 2$, bleiben nur die Möglichkeiten $a_4 = 1$ und $= 2$. Dann ist jedoch die Bedingung (71) nicht erfüllt.

$\gamma)$ Hier ist sicher $n = 6x$, also

$$\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \sigma_3 \frac{n}{3}, \sigma_4 a_4, n \right) = (3x, 3x, 2\sigma_3 x, \sigma_4 a_4, 6x) = (x, \sigma_4 a_4) = 1. \quad (74)$$

Danach bestehen, da a_4 Teiler von n ist, nur die vier Möglichkeiten $a_4 = 1; 2; 3; 6$. Für die ersten drei derselben ist sofort ersichtlich, daß die Bedingung (71) nicht erfüllt ist. Aber auch die Lösung $a_4 = 6$ genügt ihr nicht. Denn nach dem Wert $x = 1$, der sicher keine maximale Ordnung liefert, kommt als nächst höherer wegen (74) erst $x = 5$, also $n = 30$ in Betracht, so daß (71) wieder nicht erfüllt wird.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß der Fall C 2) für die maximale Periodenordnung wegfällt. (75)

Zusammenfassung.

(70) und (75) liefern das Resultat und damit die Bestätigung der entsprechenden Behauptung des Satzes (45): Für den *Wiman'schen* Fall C) besteht, topologisch, nur eine einzige Lösung, nämlich:

$$C 1) : \quad \Phi = \Phi_2, \quad \pi = 0, \quad \varrho = 0, \quad v = 3,$$

$$(\text{wobei } \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{n}{2}, \quad \lambda_3 = n),$$

bei welcher, für $p > 1$, die maximale Perioden-Ordnung $n = 2(2p + 1)$ erreicht wird.

Wie schon gesagt, können die entsprechenden Formeln für die Fälle A), B), D) und F) auf ganz ähnliche Weise hergeleitet werden. Für A), D) und E) findet man hierbei, wie für C), nur eine einzige topologische Realisierung der höchsten Periodenordnung; für B) dagegen ergeben sich deren drei. Die folgende Tabelle gibt Aufschluß über die ermittelten Modelldarstellungen mit Modulfläche Φ , Überlagerungsfläche F und deren Verzweigungsart.

Übersicht der Überlagerungsmodelle für die maximalen Perioden-Ordnungen.

	F	p	Indikatrix	n_{\max}	Φ	π	ρ	v	α_1	α_2	ϱ_1	λ_1	λ_2	λ_3
A)	F_1	u^*)	—	$2p$	Φ_2	0	1	2	—	—	n	2	$\frac{n}{2}$	—
B)	F_1	g^*)	—	$2(p-1)$	Φ_2	0	1	2	—	—	$\frac{n}{2}$	2	n	—
					Φ_1	1	0	2	n	—	—	2	n	—
					Φ_1	1	0	2	$\frac{n}{2}$	—	—	2	n	—
C)	F_2	u, g	Erhalten!	$2(2p+1)$	Φ_2	0	0	3	—	—	—	2	$\frac{n}{2}$	n
D)	F_2	u	Umgekehrt!	$4(p-1)$	Φ_1	2	0	1	n	n	—	2	—	—
E)	F_2	g	Umgekehrt!	$4(p+1)$	Φ_1	1	0	2	n	—	—	2	$\frac{n}{4}$	—

*) u bedeutet „ungerade“, g „gerade“.

Modellmäßige Beschreibung eines Beispiels.

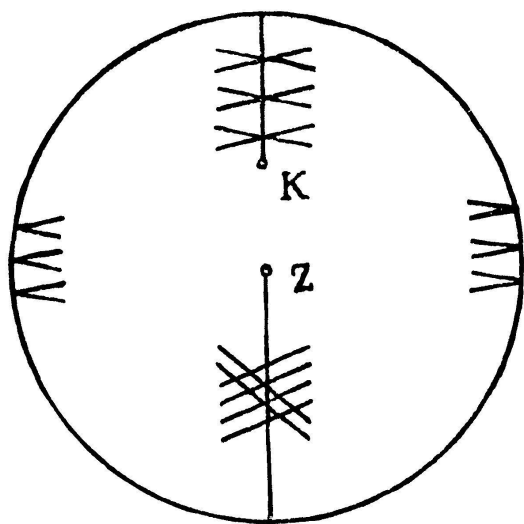
Zur Veranschaulichung der arithmetisch gewonnenen Resultate beschreibe ich zum Schluß ein einfaches konkretes Beispiel etwas ausführlicher, so daß dann bei allen übrigen Fällen die Auslegung der formelmäßigen Ergebnisse dem Leser überlassen werden kann.

Die Fläche F sei einseitig und vom Geschlechte $p = 3$. Wir haben es also mit dem Fall A) zu tun. Die höchste Periode ist $n = 2p = 6$. Die Modulfläche, welche zweiseitig ist und das Geschlecht 0 und einen einzigen Rand besitzt, denken wir uns in Form einer Kreisscheibe gegeben. Ihr Zentrum Z und einen beliebigen weiteren Punkt K markieren wir als Verzweigungsstellen und führen von ihnen aus in entgegengesetzten Richtungen je einen radialen Schnitt nach dem Rande hin.

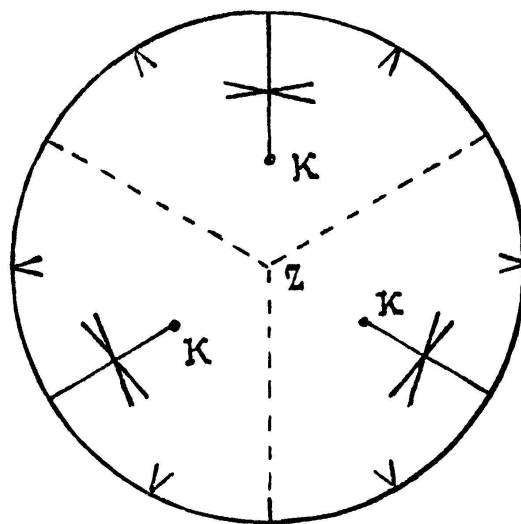
Dann legen wir sechs solche, von 1 bis 6 nummerierte, Blätter übereinander und verknüpfen sie folgendermaßen: An den Rändern je 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6; am Schnitt von K kreuzweise (mit Selbstdurchdringung der Fläche) ebenfalls je 1 mit 2, 3 mit 4, 5 mit 6; am Schnitt von Z kreuzweise (mit Durchdringung) nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (Figur 1).}$$

Man erkennt, daß die gebildete geschlossene Fläche einseitig ist, und daß bei Z zwei dreiblättrige, bei K drei zweiblättrige Verzweigungspunkte entstanden sind, wie es durch $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = \frac{n}{2} = 3$ gefordert wird. Ein Weg längs der Kreisperipherie schließt sich, wenn man auf die Verknüpfungen und Selbstdurchdringungen achtet, erst nach 6 Umläufen ($\varrho_1 = n = 6$).



Figur 1



Figur 2

Um nun die Abbildungsgruppe anschaulicher zu beschreiben, führen wir unser Überlagerungsmodell in eine Kreuzhauben-Normalform über. Wir lösen zu dem Zwecke am Schnitt von Z die Verbindungen $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dann erkennen wir, daß sich die Fläche schraubenartig dreimal um Z herumwindet und deshalb auseinandergewickelt werden kann. Jetzt stellen wir uns noch vor, die Zentriwinkel um Z herum und damit die ganze Fläche würden sich auf den dritten Teil zusammenziehen, so daß jedes der ursprünglichen sechs Kreis-Blätter auf einen Sektor von $\frac{2\pi}{3}$ zusammenschrumpft. Bei der so entstehenden zweiblättrigen Fläche liegen wieder die Schnitttränder $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ einander gegenüber und können, diesmal ohne Durchdringung anderer Blätter, verbunden werden. Die fertige, wieder geschlossene Fläche besteht jetzt aus zwei übereinanderliegenden Kreisblättern, die längs der Ränder vereinigt und außerdem in drei regelmäßig angeordneten „Kreuzschlitzen“ kreuzweise zusammengeheftet sind (Figur 2). Dies ist aber nichts anderes als eine in ihre Äquatorebene plattgedrückte Kugel mit drei Kreuzhauben. Die ehemals

dreiblättrigen Verzweigungspunkte Z , jetzt mit schlichtartigen Umgebungen, bilden ihre Pole.

Die zyklische Abbildungsgruppe dieser Fläche wird erzeugt von einer sechs-zähligen Drehspiegelung mit der Äquatorebene als Dreh- und Spiegelebene.

Eine entsprechende Modelldarstellung läßt sich im Falle A) für beliebig großes Geschlecht p geben.

(Eingegangen den 25. April 1935.)