

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 8 (1935-1936)

**Artikel:** Über geschlossene ebene Kurven von beschränkter Krümmung.  
**Autor:** Bähler, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9285>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über geschlossene ebene Kurven von beschränkter Krümmung

Von F. BÄBLER, Göttingen

## Einleitung

Die Kurven, um welche es sich handelt, sollen „eben, einfach, glatt und von beschränkter Krümmung“<sup>1)</sup> sein. Sie werden immer mit dem Buchstaben  $C$  bezeichnet. Solche Kurven spielen eine gewisse Rolle in der Theorie der konformen Abbildungen. Herr W. Seidel bewies u. a., daß eine für  $|z| < 1$  reguläre Funktion  $f(z)$ , welche die offene Kreisscheibe konform auf das von einer derartigen Kurve berandete Gebiet abbildet, in jedem Peripheriepunkte eine von Null verschiedene Winkelderivierte besitzt, die Abbildung also gewissermaßen auf dem Rande konform bleibt<sup>2)</sup>. Ein völlig gleichartiges Resultat kann man auch auf Grund variationstheoretischer Betrachtungen erzielen. Dieser und einige andere, die Theorie der schlichten Funktionen betreffende Umstände haben mich veranlaßt, ein paar Fragen zu untersuchen, welche sich — grob gesagt — auf die Abhängigkeit der Länge einer Kurve  $C$  von der „Ausdehnung“ des von ihr eingeschlossenen Bereiches beziehen.

Zunächst sei bemerkt, daß man aus der Umkehrung des Jordan'schen Kurvensatzes und aus dem Heine-Borel'schen Theorem unmittelbar die Existenz der Länge einer jeden Kurve  $C$  folgern kann.

Beschränkt man die Krümmung  $K(s)$  ( $s$  sei die von irgendeinem Punkt auf  $C$  aus gemessene Bogenlänge) durch die Ungleichung  $|K(s)| \leq \frac{1}{\rho}$ ;  $\rho > 0$ , so ist es anschaulich plausibel, daß der Kreis vom Radius  $\rho$  die kürzeste unter allen Kurven  $C$  mit derselben Krümmungsbeschränkung ist, und daß es unter ihnen auch keine geben kann, die einen kleineren Bereich begrenzt. Betrachtet man eine beliebige unter ihnen, die etwa noch der weiteren Bedingung unterworfen sei, innerhalb eines Kreises vom Radius  $\rho + \varepsilon$  zu verlaufen, oder einen Durchmesser  $2\rho + 2\varepsilon$  zu haben oder einen Bereich der Größe  $\pi\rho + \varepsilon$  zu begrenzen, so liegt es wiederum anschaulich nahe, zu vermuten, daß die Länge dieser Kurve nicht beliebig viel von  $2\rho\pi$  abweichen kann, wenn nur  $\varepsilon$  genügend klein ist im Vergleich zu  $\rho$ . Auf diese Weise ergeben sich die folgenden Fragen:

<sup>1)</sup> Vergl. die exakte Formulierung S. 16—17.

<sup>2)</sup> Vergl. W. Seidel.: Über die Ränderzuordnung bei konf. Abb. Math. An. Bd. 104.

1. Gibt es für die Länge aller Kurven  $C$ , die in einen Kreis vom Radius  $r$  eingeschlossen werden können, aber in keinem kleineren eine *genaue obere* und eine *genaue untere Schranke*? Welches sind diese genauen Schranken und wie hängen sie von  $r$  ab? Werden sie von irgendwelchen  $C$  angenommen und wenn ja: von welchen?

2. Gibt es für die Längen aller Kurven  $C$  vom festen Durchmesser  $d$  eine *genaue obere* und eine *genaue untere Schranke* und wenn ja: wie hängen diese vom Durchmesser  $d$  ab? Welche Kurven haben genau diese Schranken als Länge?

3. Existiert für die Flächen der Bereiche, welche jeweils von den Kurven  $C$  der unter 2 bzw. 3 genannten Kurvenmengen begrenzt werden, eine *genaue untere* bzw. eine *genaue obere Schranke*? Wie hängen diese Schranken von  $r$  und  $d$  ab, und gibt es Kurven, für welche sie angenommen werden und welche?

Schon durch eine einfache Überlegung kann festgestellt werden, daß die oberen Schranken für 1 und 2, wenn überhaupt für irgendwelche Werte außer  $r = \varrho$  und  $d = 2 \varrho$  doch sicher nur für ein beschränktes Intervall dieser Parameter existieren können. Genauer: Man stellt leicht fest, daß eine Kurve  $C$  beliebig lang sein kann, sobald ihr Durchmesser eine bestimmte feste Größe übersteigt oder sobald ihr Umkreis einen Radius hat, der größer ist als eine bestimmte feste Zahl. Um das einzusehen, denke man sich einen ebenen Schnitt durch die Längsachse einer Hantel, und dieser werde so abgerundet und geglättet, daß er überall den Seite 5 gemachten Voraussetzungen über Glattheit und Krümmung genügt.

Die parallelen Strecken dieses Schnittes sollen sehr lang sein und einen sehr geringen Abstand haben, und seine, den Gewichtskörpern entsprechenden Bögen wenig mehr als je einen  $\varrho$ -Kreis  $K_1$  bzw.  $K_2$  einschließen. Diese Schnittfigur denke man sich, indem man am einen Ende beginnt, immer in der Ebene bleibend, um einen  $\varrho$ -Kreis  $K_3$  aufgewunden und zwar so, daß die Glattheits- und Krümmungsvoraussetzungen stets erhalten bleiben. Man kann sich die Länge der Strecken so gewählt denken, daß nach vollendeter Aufwicklung die drei  $\varrho$ -Kreise  $K_1, K_2, K_3$  in den Ecken eines regulären Dreiecks liegen. Man kann nun, wie lang auch die Strecken seien, ihren Abstand so gering wählen, daß die ganze aufgewundene Kurve ins Innere eines Kreises eingeschlossen werden kann, dessen Radius  $r$  beliebig wenig größer ist als  $\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \varrho$ . (Dieser Kreis enthält gerade 3 sich gegenseitig berührende  $\varrho$ -Kreise.) Die Aufwindung läßt sich ferner gleichzeitig so einrichten, daß der Durchmesser der aufgewundenen Kurve  $4 \varrho$  beliebig wenig übersteigt.

Die genauen oberen Schranken  $S_1(r)$  bzw.  $S_2(d)$  existieren demnach bestenfalls in den Intervallen  $\varrho \leq r \leq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\varrho$  bzw.  $2\varrho \leq d \leq 4\varrho$ . In diesen existieren sie wirklich. Durch gewisse einfache Lagebeziehungen zwischen einer bestimmten Umgebung eines Punktes  $P$  auf  $C$  und den  $C$  in  $P$  berührenden  $\varrho$ -Kreisen, zusammen mit einer Art von Symmetrisierungsverfahren durch Spiegelung gelingt es, die Existenz und die analytische Form von  $S_1(r)$ ,  $S_2(d)$  zu ermitteln. Durch ihre Bestimmung ergeben sich gleichzeitig diejenigen Kurven, deren Länge gleich diesen Schranken ist.

Bezüglich der unteren Schranken  $s_1(r)$  zu 1 bzw.  $s_2(d)$  zu 2 liegen die Verhältnisse viel einfacher. Schon die eben erwähnten Lagebeziehungen zwischen den Kurvenbögen und den berührenden  $\varrho$ -Kreisen genügen im wesentlichen, um ihre Existenz sicherzustellen und die kürzesten Kurven zu ermitteln. Die Schranken existieren für alle  $r$  und alle  $d$ .

Die Existenz der genauen oberen Schranke für 3 ist bei der Kreisbedingung trivial. Für die Kurvenmenge mit festem Durchmesser ist sie leicht aus der Theorie der konvexen Kurven ableitbar. Sie existiert für alle  $r$  und alle  $d$  und wird immer erreicht. Betreffs der unteren Schranken  $F_1(r)$  bzw.  $F_2(d)$  gewinnt man gewisse Anhaltspunkte schon bei der Feststellung der genauen oberen Schranken für die Längen, indem man dort beweist, daß jedes  $C$  einen  $\varrho$ -Kreis ganz, ja sogar deren zwei getrennte enthalten muß, falls der Durchmesser genügend groß ist. Jedoch besteht ein wesentlicher Unterschied darin, ob  $r \leq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\varrho = R$  bzw.  $d \leq 4\varrho$  oder  $r > R$  bzw.  $d > 4\varrho$  ist. Für die kleineren  $r$  bzw. die kleineren  $d$  kann man die Schranken ermitteln, indem man im wesentlichen eine Tatsache über den Kurvenverlauf verwendet, die mit zur Feststellung der oberen Schranken  $S_1(r)$  bzw.  $S_2(d)$  gebraucht wurde. Für die größeren Werte der beiden Variablen sind es die schon mehrfach erwähnten Lagebeziehungen zwischen  $C$  und den berührenden  $\varrho$ -Kreisen, die zum Ziele führen. *Indes wird die untere Schranke nur für die kleineren Werte der Parameter erreicht.*

Die Resultate dieser Arbeit gewinnen vielleicht auch einiges Interesse, wenn man sie vom variationstheoretischen Gesichtspunkt aus betrachtet. Sie liefern anschauliche Beispiele dafür, daß Variationsaufgaben mit Nebenbedingungen für gewisse Wertebereiche eines Parameters, der diese Nebenbedingungen wesentlich bestimmt, wohlbestimmte, einfache Lösungen besitzen, während sie für alle anderen Werte des Parameters völlig sinnlos werden. Darüber hinaus sind es weitere Beispiele für die Verwen-

dung der direkten Methoden in Fällen, in welchen die klassischen Wege über die Differentialgleichungen versagen.

Ich werde alle Sätze unter der Voraussetzung  $|K(s)| \leq 1$  ableiten, da die Übertragung auf den Fall  $|K(s)| \leq \frac{1}{\varrho}$ ;  $\varrho \neq 1$  sich unmittelbar ergibt.

Die Beweismethoden sind ausschließlich geometrisch, und den Fragestellungen entsprechend fast durchweg elementar. Mehrere der hier behandelten Fragen haben Analoga in der Theorie der konvexen Kurven; die dort ermittelten Ergebnisse werden an verschiedenen Stellen benutzt.

---

Eine „ebene einfache geschlossene glatte Kurve von beschränkter Krümmung“<sup>3)</sup> soll immer mit dem Buchstaben  $C$  (eventuell mit Index) bezeichnet werden, und umgekehrt soll jede mit  $C$  bezeichnete Kurve den genannten Bedingungen genügen. Mit  $s$  wird in den §§ 1, 2, 3 nur die von einem beliebigen Punkt einer Kurve aus gemessene Bogenlänge bezeichnet; mit  $P(s)$  bzw.  $Q(s)$  sind dann die Punkte auf  $C$  gemeint, die man erreicht, wenn man von diesem festen Punkt auf  $C$  aus den Bogen der Länge  $s$  durchlaufen hat.

Positiver und negativer Umlaufsinn auf einer Kurve  $C$  werden wie üblich so verstanden, daß man bei Durchlaufung der Kurve im positiven Sinn ihr Inneres zur Linken, bei Durchlaufung im negativen Sinn zur Rechten läßt. Durchlaufung im positiven Sinn wird durch das Zeichen  $(p)$ , Durchlaufung im negativen Sinn durch das Zeichen  $(n)$  angedeutet. Das Zeichen  $\overrightarrow{AB}$  soll bedeuten, daß die Strecke  $\overline{AB}$  in der Richtung von  $A$  nach  $B$  durchlaufen wird. Unter der Bezeichnung „positiver Tangentenvektor“ wird der dem positiven Umlaufsinn auf einer Kurve  $C$  entsprechende Tangentenvektor verstanden. Entsprechend ist die Bezeichnung „negativer Tangentenvektor“ gemeint.

Wenn von einem Koordinatensystem bzw. dessen Achsen die Rede ist, so ist immer ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem gemeint. Da die bezüglich einer Kurve  $C$  betrachteten Größen invariant gegenüber Bewegungen sind, wird die Lage von  $C$  bezüglich des Koordinatensystems jeweils nach Zweckmäßigkeit willkürlich gewählt. Kurven, die durch Bewegungen ineinander transformierbar sind, werden als identisch betrachtet. Mit den Ausdrucksweisen: Eine geschlossene Kurve

---

<sup>3)</sup> Vergl. die exakte Formulierung S. 16—17.

„umschließt“ eine andere geschlossene Kurve, oder „enthält sie im Innern“, soll nur gesagt sein, daß kein Punkt der zweiten außerhalb der ersten liegen kann. Analog ist der Ausdruck „eine geschlossene Kurve liegt im Innern einer andern“ zu verstehen. Die beiden Kurven können also je nachdem einzelne Punkte gemeinsam haben, längs ganzer Bögen oder völlig zusammenfallen oder ganz getrennt liegen. Dagegen heißt die Redeweise „ein Punkt liegt in, oder im Innern einer geschlossenen Kurve“ immer, er ist innerer Punkt des von der Kurve eingeschlossenen Gebietes. Ganz analog heißt „ein Bogen liegt in  $C$ “, daß sich auf ihm wirklich innere Punkte befinden.

### § 1.

In diesem Paragraphen werden zunächst einige Hilfssätze bewiesen, welche späterhin häufig verwendet werden.

Eine glatte, ebene Kurve, deren Krümmung stückweise stetig und durch  $|K(s)| \leq 1$  beschränkt sei, berühre die  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems im Ursprung  $O$  und verlaufe von da aus ins Innere der rechten Halbebene.  $k_1$  bzw.  $k_2$  seien die beiden Einheitskreise, welche die  $x$ -Achse in  $O$  berühren und sonst in der oberen bzw. in der unteren Halbebene verlaufen.  $\widehat{OP}$  sei der von  $O$  ausgehende Bogen der Länge  $\frac{\pi}{2}$  auf der Kurve. Es gilt dann:

Hilfssatz 1a. *Kein Punkt des Bogens  $\widehat{OP}$  liegt im Innern eines der beiden Kreise  $k_1$  bzw.  $k_2$ .*

$\widehat{OP}$  sei dargestellt in der Form

$$x = x(s); \quad y = y(s); \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Die Voraussetzung der Glattheit bedeutet, daß  $\dot{x}(s)$ ,  $\dot{y}(s)$  überall existieren und stetig sind. Als Parameter kann man die von  $O$  aus auf der Kurve gemessene Bogenlänge wählen, also  $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ . Der positive Richtungssinn auf der Kurve sei durch den Tangentenvektor in der Richtung der positiven  $x$ -Achse in  $O$  definiert. Die Krümmung  $K(s)$  wird positiv genommen, falls der Normalenvektor in Richtung auf den Krümmungsmittelpunkt von der im positiven Sinn durchlaufenen Kurve nach links weist, im anderen Fall negativ.  $K(s)$  soll für alle  $s$  existieren stetig und absolut höchstens gleich 1 sein, abgesehen von einer Punktmenge, die so beschaffen ist, daß sie mit Ausnahme von endlich vielen

ins Innere von Teilintervallen eingeschlossen werden kann, deren Gesamtlänge kleiner als  $\varepsilon$  sei ( $\varepsilon > 0$  sonst beliebig). Erteilt man  $K(s)$  für diese Punkte beliebige, zwischen  $-1$  und  $+1$  liegende Werte, so existiert  $\varphi(s) = \int_0^s K(\sigma) d\sigma$  für jedes  $s$  in  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  und ist von den willkürlich gewählten Funktionswerten unabhängig. Es ist alsdann

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= \cos \varphi(s); \quad \dot{y}(s) = \sin \varphi(s) \\ x(s) &= \int_0^s \cos \varphi(\sigma) d\sigma; \quad y(s) = \int_0^s \sin \varphi(\sigma) d\sigma. \quad \text{Man setzt ferner} \\ \xi(s) &= \int_0^s \cos \sigma d\sigma \quad \text{bzw.} \quad \eta_1(s) = \int_0^s \sin \sigma d\sigma \quad \text{und} \\ \eta_2(s) &= -\eta_1(s). \end{aligned}$$

Wegen  $|K(s)| \leq 1$  ist  $|\varphi(s)| \leq s$ , woraus folgt:

$$x(s) \geq \xi(s) \quad \text{und} \quad |y(s)| \leq \eta_1(s) = |\eta_2(s)|.$$

$\xi(s)$  und  $\eta_1(s)$  bzw.  $\xi(s)$  und  $\eta_2(s)$  sind aber die Koordinaten der Punkte auf den bei  $O$  in die rechte Halbebene eintretenden Bögen von  $k_1$  und  $k_2$ . Es ist also

$$\text{I.} \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq \xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \quad \text{II.} \quad -1 = \eta_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq y\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \eta_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1.$$

1. Das Gleichheitszeichen in der ersten Gleichung kann nur gelten für  $K(s) \equiv +1$  bzw.  $K(s) \equiv -1$  für  $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ . Dann aber gilt in der zweiten Ungleichung auch entweder das zweite oder das erste Gleichheitszeichen, d. h. der Bogen  $\widehat{OP}$  fällt mit dem einen der bei  $O$  in die rechte Halbebene eintretenden Viertelkreise zusammen.

2. Ist für irgendein Teilintervall von  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$   $|K(s)| \neq 1$ , so können in beiden Ungleichungen I und II nur die Ungleichheitszeichen gelten, d. h. der Bogen  $\widehat{OP}$  verläuft von einem Punkte  $Q$  an im Äußeren der beiden Kreise  $k_1$  und  $k_2$ , insbesondere liegt  $P$  rechts von der Geraden  $x = 1$ .

Die Kurve setze sich über  $P$  hinaus mit den gleichen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften versehen fort. Im ersten Falle kann ein weiteres Bogenstück  $\widehat{PP}_2$  der Länge  $\frac{\pi}{2}$  nirgends im Inneren von  $k_1$  und  $k_2$  verlaufen.

Im zweiten Falle gebe es einen ersten Parameterwert  $s_1 > \frac{\pi}{2}$ , so daß  $|\varphi(s_1)| = \frac{\pi}{2}$  ist, d. h. es existiere ein erster Punkt  $P_1(s_1)$  mit vertikaler Tangente. Der Bogen  $\widehat{PP_1}(s_1)$  liegt sicher rechts von  $x = 1$ , da  $\cos \varphi(s) > 0$  ist für  $\frac{\pi}{2} \leq s < s_1$ . Daher gilt

Hilfssatz 1: Kein Punkt von  $\widehat{OP}(s_1)$  liegt in  $k_1$  bzw.  $k_2$ . Ferner gilt

Zusatz 1: Falls  $\widehat{OP_1}(s_1)$  keinen Punkt in der unteren Halbebene hat, liegt  $P_1(s_1)$  oberhalb der Geraden  $y = 1$  oder auf ihr.

Die gegenteilige Annahme würde bei Vertauschung von  $O$  und  $P_1(s_1)$  zum Widerspruch mit dem eben abgeleiteten Ergebnis über den Bogen  $\widehat{OP_1}(s_1)$  führen.

Diese Tatsachen wären ausreichend für alle unsere Überlegungen, in welchen die gegenseitige Lage von Kurvenbögen auf  $C$  und der sie berührenden Einheitskreise eine Rolle spielen. Um jedoch später einfacher schließen zu können, werden jetzt noch einige etwas weitergehende Schlüsse über diese Lagebeziehungen gezogen.

Bezüglich des jetzt betrachteten Bogens  $\widehat{OP}$  auf  $C$  gelten genau dieselben Voraussetzungen wie für den Hilfssatz 1, nur soll die Bogenlänge nicht mehr durch  $\frac{\pi}{2}$  beschränkt sein. Ich beweise

Hilfssatz 2: Längs eines Bogens  $\widehat{OP}$  von der Gesamtkrümmung  $\Phi(s) \leq \pi$  schneidet keiner der von rechts berührenden Einheitskreise irgend einen unter den von links berührenden Einheitskreisen.

Ist der Satz für den in  $O$  von links berührende Kreise  $k_1$  richtig, so gilt er um so mehr für alle andern. Es genügt also, ihn für diesen Spezialfall zu beweisen.

Unter der Gesamtkrümmung wird, wie üblich,  $\Phi(s) = \int_0^s |K(\sigma)| d\sigma$  verstanden. Es ist also  $\Phi(s) \geq |\varphi(s)|$ .

Zunächst sei  $s_1$  der erste Parameterwert, für den  $|\varphi(s_1)| = \frac{\pi}{2}$  ist.  $P_1 = P_1(s_1)$  sei der ihm entsprechende Punkt auf  $\widehat{OP}$ . Es gilt

Hilfssatz 2a. Der Hilfssatz 2 gilt für den Bogen  $\widehat{OP_1}$ , wenn man links nur  $k_1$  in Betracht zieht. Fällt  $\widehat{OP_1}$  mit einem der beiden Viertelkreise zusammen, ist die Behauptung trivial. Ist dies nicht der Fall, so ver-

folge man die Kurve, welche von den Mittelpunkten der den Bogen  $\widehat{OP}_1$  von rechts berührenden Einheitskreise beschrieben wird. Sie ist in der Form  $y = f(x)$  darstellbar, wobei  $f(x)$  eine eindeutige stetige Funktion von  $x$  in einem gewissen Intervall rechts von Null ist. Den Bögen auf  $\widehat{OP}_1$  mit  $K(s) \equiv -1$  entspricht jeweils auf ihr ein einziger Punkt. Alle anderen Teilbögen dieser Mittelpunktskurve sind mit stetiger Tangente versehen. Durchläuft man sie vom Punkt  $(0, -1)$  aus, so ist der Tangentenvektor immer ins Innere der rechten Halbebene gerichtet, d. h. er besitzt eine Komponente in Richtung der positiven  $x$ -Achse. Dies mit Ausschluß des Endpunktes.

Soll ein von rechts berührender Einheitskreis  $k$  den Kreis  $k_1$  schneiden, so muß sein Mittelpunkt im Innern des zu  $k_1$  konzentrischen Kreises  $K^*$  vom Radius 2 liegen. Da  $f(0) = -1$  ist, müßte es auf der Mittelpunktskurve Punkte geben, welche in der rechten untern Viertelsebene innerhalb von  $K^*$  liegen.  $Q$  mit den Koordinaten  $(a, b)$  sei ein solcher, *und es soll sich weiterhin auf dem Bogen  $(0, -1), (ab)$  der Mittelpunktskurve kein Punkt in der abgeschlossenen oberen Halbebene befinden.*

Der Einheitskreis  $k$  mit  $Q$  als Mittelpunkt schneidet  $k_1$  in zwei Punkten,  $Q_1$  und  $Q_2$ . Der Punkt  $(a + 1, b) = Q_3$  auf  $k$  liegt sicher außerhalb von  $k_1$ , und die Indizierung der Schnittpunkte soll so gewählt sein, daß man zunächst  $Q_1$  trifft, wenn man  $k$  von  $Q_3$  aus in negativem Sinn durchläuft.

$k$  berührt den Bogen  $\widehat{OP}_1$  in einem ersten<sup>4)</sup> Punkte  $P'$ . Für die Abszisse von  $P'$ ,  $a'$  gilt entweder 1.  $a \leq a' \leq a + 1$  oder 2.  $a_2 \leq a' \leq a$  oder 3.  $a' < a_1$  wobei  $a_1$  und  $a_2$  die Abszissen von  $Q_1$  bzw.  $Q_2$  sind.

Zu 1. Dann existiert auf  $\widehat{OP}'$  ein Punkt  $P_m$  mit maximaler Ordinate.  $a_m, b_m$  seien seine Koordinaten. Er liegt außerhalb  $k_1$ . Es ist  $a_m \leq a$ ,  $b_m \geq b + 1$ , was eine unmittelbare Folge des Hilfssatzes 1 bzw. des Zusatzes 1 ist.  $P_m$  liegt nach Voraussetzung in der unteren Halbebene. Der Einheitskreis  $k_m$  mit  $(a_m, b_m - 1)$  als Mittelpunkt berührt  $\widehat{OP}_1$  in  $P_m$  und schneidet  $k_1$ . Der Bogen  $\widehat{OP}_m$  hat weder Punkte in  $k_1$  noch in  $k_m$  und auch keine in der linken Halbebene und in der Halbebene  $x > a_m$  (Hilfssatz 1). Er muß aber die Gerade durch  $(0, 1)$  und  $(a_m, b_m - 1)$  schneiden. Diese beiden Forderungen stehen in Widerspruch zueinander.

Zu 2. Hier tritt an Stelle von  $k_m$  der Kreis  $k$ .  $\widehat{OP}'$  kann nirgends in  $k_1$  oder in  $k$  verlaufen, bleibt im Streifen  $0 \leq x \leq a'$  und muß die Gerade

<sup>4)</sup> Bei Durchlaufung von  $\widehat{OP}$  von  $O$  aus.

durch  $(0, 1)$  und  $(a, b)$  schneiden. Daraus folgt derselbe Widerspruch wie unter 1.

Zu 3. Der Mittelpunkt des Einheitskreises  $k'$ , der  $\widehat{OP}_1$  in  $P'$  von links berührt, liegt in der linken Halbebene. Man könnte daher, indem man  $\widehat{OP}'$  von  $P'$  aus durch einen Bogen auf  $k'$  fortsetzt, einen Kurvenbogen konstruieren, der allen Voraussetzungen S. 9—10 genügt und dessen erster Punkt mit senkrechter Tangente links von der Geraden  $x = 1$  läge. Das steht im Widerspruch zu Hilfssatz 1. Damit ist Hilfssatz 2a bewiesen.

Den Bogen  $\widehat{OP}_1$  denke man sich weiterhin über  $P_1$  hinaus fortgesetzt, und zwar unter Erhaltung der Stetigkeits- und Krümmungseigenschaften, bis zum ersten Punkt  $P_2$ , in welchem die Tangente wiederum mit der  $x$ -Achse parallel ist.

Zusätzlich setzen wir zunächst ferner voraus, daß der ganze Bogen  $\widehat{OP}_2$  in der abgeschlossenen oberen Halbebene verlaufe.

a) Fällt dann der Tangentenvektor in  $P_1$ , welcher dem positiven Durchlaufungssinn entspricht, mit der negativen  $y$ -Richtung zusammen, so muß  $P_1$  auf der Geraden  $y = 1$  oder weiter oberhalb liegen, und der Bogen  $\widehat{OP}_1$  trifft in mindestens einem Punkt die Gerade  $y = 2$ . Die gegenteilige Annahme ergibt einen Widerspruch zu Hilfssatz 1 und der zusätzlichen Voraussetzung.

b) Ist die Richtung des Tangentenvektors in  $P_1$  die positive  $y$ -Richtung, so gilt über die Lage von  $P_1$  dasselbe wie eben. Wenn wir die zum Beweise von Hilfssatz 2a durchgeführten Betrachtungen auf den in  $P_1$  von links berührenden Einheitskreis  $k'$  und die längs  $\widehat{P_1P_2}$  von rechts berührenden Einheitskreise übertragen, so erhalten wir das Resultat, daß keiner unter den längs  $\widehat{OP}_2$  von rechts berührenden Einheitskreisen  $k_1$  schneiden kann.  $P_2$  selbst liegt auf der Geraden,  $y = 2$  oder oberhalb. Der Bogen  $\widehat{QP}_2$  hat aber mindestens eine Gesamtkrümmung  $\pi$ ; damit ist für diesen Spezialfall Hilfssatz 2 bewiesen.

Wenn aber keiner unter den  $\widehat{OP}_2$  von rechts berührenden Einheitskreisen den Einheitskreis  $k_1$  schneiden darf, so liegt keiner der Berührungspunkte dieser Kreise mit dem Bogen, also kein Punkt des Bogens selbst im Innern von  $k_1$ .

Dieses spezielle Resultat wird für die spätere Anwendung genügen. Es sei als Hilfssatz 3 formuliert.

*Hilfssatz 3. Berührt ein stetiger glatter Kurvenbogen, dessen Krümmung im Sinne der Voraussetzung von Hilfssatz 1 existiert und beschränkt ist, die  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems im Ursprung  $O$  und weiß man, daß mindestens einer unter den ihn von rechts berührenden Einheitskreisen den Einheitskreis schneidet, der in  $O$  von links berührt, verläuft der Bogen ferner ganz in der oberen Halbebene, so besitzt er einen Punkt, in welchem der Tangentenvektor mit der  $y$ -Richtung zusammenfällt, und er hat mindestens einen Punkt mit der Geraden  $y = 2$  gemein, und das Bogenstück von  $O$  aus bis zum ersten Punkt auf diesen Geraden verläuft nirgends im Innern von  $k_1$ .*

Für den vollständigen Beweis des Hilfssatzes 2 sind zwei Fälle zu unterscheiden: a) Der Tangentenvektor in  $P_1$  fällt mit der positiven; b) er fällt mit der negativen  $y$ -Richtung zusammen.

Zu a).  $P_1$  mit den Koordinaten  $x_1 y_1$  liegt dann nach Hilfssatz 1 in der Halbebene  $x \geq 1$  und der ihm entsprechende Punkt der Mittelpunktskurve in der Halbebene  $x \geq 2$ . Sei  $k'_1$  der in  $P_1$  von links berührende Einheitskreis und  $K_1^*$  der zu ihm konzentrische, vom Radius 2. Ist  $\widehat{P_1 P_2}$  ein Kurvenbogen, der allen Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 bezüglich Stetigkeit, Glattheit und Krümmung genügt, und dessen Tangentenvektor in  $P_2$ , sonst nirgends, parallel zur  $x$ -Achse ist, so besitzt der ihm entsprechende Bogen der Mittelpunktskurve nach Hilfssatz 2a) nirgends einen Punkt im Innern von  $K_1^*$  und seine Tangente hat überall da, wo sie existiert, eine Komponente in der Richtung der positiven  $y$ -Achse.

Liegt  $P_1$  in der Halbebene  $y \geq 1$ , so folgt hieraus unmittelbar die Behauptung des Hilfssatzes 2.

Sei daher  $y_1 < 1$ , dann ist  $x_1 > 1$ .  $K^*$  und  $K_1^*$  besitzen eine gemeinsame Tangente  $T$ , die beide Kreise auf ihren oberen Hälften in den Punkten  $B^*$  und  $B_1^*$  berührt. Soll die Mittelpunktskurve, die dem Bogen  $\widehat{P_1 P_2}$  entspricht, einen Punkt in  $K^*$  haben, so muß auf ihr mindestens ein Punkt  $Q$  liegen, in welchem der Tangentenvektor mit dem Einheitsvektor in der positiven  $y$ -Richtung einen gleichen oder größeren Winkel einschließt als der Vektor  $\overrightarrow{B_1^* B^*}$ . Dem Punkt  $Q$  entspricht ein Punkt  $R$  auf  $\widehat{OP_2}$  als Berührungspunkt mit dem Einheitskreis um  $Q$  als Mittelpunkt. Die Tangentenvektoren in  $Q$  und  $R$  sind parallel.

Nach Voraussetzung schneidet  $\widehat{OP_1}$  den Kreis  $k_1$  nicht. Er schneidet auch  $k'_1$  nicht (b)S. 13). Die beiden Kreise haben eine gemeinsame Tangente  $t$ , die sie beide auf der unteren Hälfte in den Punkten  $b_1$  und  $b'_1$

berührt.  $t$  ist parallel zu  $T$ . Der Vektor  $\overrightarrow{b_1 b'_1}$  ist entgegengesetzt gerichtet zum Vektor  $\overrightarrow{B_1^* B^*}$ . Auf  $\widehat{OP_1}$  muß es mindestens einen Punkt  $R_1$  geben, in welchem der Tangentenvektor parallel und gleichgerichtet zu  $\overrightarrow{b_1 b'_1}$  ist. Längs des Bogens  $\widehat{R_1 R}$  dreht sich daher die Tangente mindestens um  $\pi$ , d. h. die Gesamtkrümmung ist mindestens  $\pi$ .

Zu b). Falls die Ordinate  $y_1$  von  $P_1$  nicht größer ist als  $-1$ , ist die Behauptung trivial. Andernfalls ziehe man die Tangente an  $K^*$  in  $P_1^0$ , wenn dieser Punkt auf  $K^*$  liegt, oder man lege diejenige Tangente von  $P_1^0$  an  $K^*$ , welche  $K^*$  auf der unteren Hälfte berührt. ( $P_1^0$  ist der Punkt auf der Mittelpunktskurve, welcher  $P_1$  — eventuell einem ganzen von  $P_1$  begrenzten Bogen — entspricht.) Liegt  $P_1^0$  in der Halbebene  $y \leq 1$ , so ist es klar, daß es immer eine solche Tangente gibt. Ist dagegen  $y_1 > 1$ , so muß  $x_1 > 2$  sein, da sonst  $\widehat{OP_1}$  entweder  $k_1$  oder den in  $P_1$  von rechts berührenden Einheitskreis  $k_1''$  schneiden oder in mindestens zwei inneren Punkten Tangentenvektoren in Richtung der positiven  $y$ -Richtung haben müßte, woraus wiederum die Existenz der Tangente folgt.

Von hierab verlaufen die Schlüsse genau wie im Fall a), nur daß an Stelle des von links in  $P_1$  berührenden Einheitskreises der von rechts berührende tritt.

Was für  $k_1$  gilt, ist um so mehr für alle andern längs  $\widehat{OP}$  von links berührenden Einheitskreise wahr. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Ein Bogen  $\widehat{OP}$  von der Gesamtkrümmung  $\pi$  hat mindestens die Länge  $\pi$ . Da keiner der von rechts berührenden Einheitskreise einen Punkt in  $k_1$  hat, kann das auch für den Bogen selbst nicht der Fall sein.

Es gilt daher

*Hilfssatz 4. Kein Bogen einer Kurve, die den Voraussetzungen bezüglich Stetigkeit, Glattheit und Krümmung in den vorangehenden Hilfssätzen genügt, und der nicht länger ist als  $\pi$ , kann einen Punkt im Innern eines der Einheitskreise haben, die ihn berühren.*

Ohne weiteres folgt, daß man in den Hilfssätzen 2a und 3 die Kreise in den Endpunkten durch jeden andern im Innern von derselben Seite berührenden Einheitskreis ersetzen darf.

$\pi$  ist übrigens sowohl für die Gesamtkrümmung, als auch für die Bogenlänge die *genaue obere Schranke*, für welche diese Sätze gelten.

## § 2.

In diesem Paragraphen werden zunächst die Voraussetzungen bezüglich der Kurven  $C$  präzisiert, die wir bisher ungenau

1. als „*eben, einfach und geschlossen*“, 2. als „*glatt und von beschränkter Krümmung*“ bezeichnet haben. Daran anschließend lassen sich dann unmittelbar zwei Eigenschaften solcher Kurven ableiten, von welchen die eine die Rektifizierbarkeit, die andere das von der Kurve begrenzte Gebiet betrifft.

Unter „*eben, einfach und geschlossen*“ ist das in der Literatur übliche zu verstehen<sup>5)</sup>. Eine Kurve mit diesen Eigenschaften kann immer in unendlich vielfacher Art eindeutig und stetig auf die Peripherie eines Einheitskreises abgebildet werden. Eine beliebige unter diesen Abbildungen werde herausgegriffen. Dabei entspreche dem Punkte  $P_0$  auf  $C$  der Punkt  $\omega_0$  auf dem Einheitskreis ( $\omega$  bedeutet die von einem beliebigen Punkte aus gemessene Bogenlänge auf dem Einheitskreis). Dann verstehe ich unter einer  $\varepsilon$  = Umgebung von  $P_0$  denjenigen Bogen auf  $C$ , der auf den abgeschlossenen Bogen  $(\omega_0 - \varepsilon), (\omega_0 + \varepsilon)$  mit  $\omega_0$  als Mittelpunkt abgebildet wird. ( $\varepsilon > 0$ , klein.)

Die Eigenschaften „*glatt und von beschränkter Krümmung*“ werden jetzt folgendermaßen definiert:

1. Es gibt zu jedem Punkt  $P_0$  auf  $C$  eine von  $P_0$  abhängige  $\varepsilon$ -Umgebung und zu ihr einen Parameter  $t$ , so daß jeder Punkt dieser Umgebung in einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der Form

$$x = x_0 + \xi(t); \quad y = y_0 + \eta(t), \quad -t_1 \leq t \leq t_1$$

darstellbar ist, wobei  $x_0, y_0$  die Koordinaten von  $P_0$  bedeuten.  $\xi(t), \eta(t), \dot{\xi}(t), \dot{\eta}(t)$  sind dabei im ganzen abgeschlossenen Intervall  $(-t_1, t_1)$  stetig. Ferner existiere

2. Die Krümmung  $K(t)$  für das ganze Intervall  $(-t_1, t_1)$  mit Ausnahme einer Menge von Punkten, die in eine Anzahl von Teilintervallen mit beliebig kleiner Gesamtlänge eingeschlossen werden können.  $K(t)$  sei überall da stetig, wo es existiert und  $|K(t)| \leq 1$ . Wählt man dann  $K(t)$  positiv, wenn der Normalenvektor nach dem Krümmungsmittelpunkt hin bezüglich des positiven Umlaufsinns nach links weist, im anderen Fall negativ und setzt man den Wert der Funktion überall da, wo sie

<sup>5)</sup> Vergl. z. B.: *Kerékjartó*: Vorl. über Topologie, Berlin 1923 S. 59; 79.

nicht definiert ist, gleich Null, dann existieren die Integrale  $\varphi(t) = \int_0^t K(\tau) d\tau$ ,  
 $\Phi(t) = \int_0^t |K(\tau)| d\tau$  für alle  $t$  des Intervalls  $(-t_1, t_1)$ .

Aus 1. folgt, daß  $\int_{-t_1}^{t_1} \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} d\tau$  existiert, d. h. der Bogen  $\widehat{P^-P^+}$  auf  $C$  hat eine Bogenlänge.  $P^-$  ist dabei der Punkt mit den Koordinaten  $x + \xi(-t_1)$ ,  $y + \eta(-t_1)$ ,  $P^+$  derjenige mit den Koordinaten  $x + \xi(t_1)$ ,  $y + \eta(t_1)$ . Nach dem Heine-Borelschen Satz genügen endlich viele von den  $\varepsilon$ -Bögen auf dem Einheitskreis, um diesen ganz zu bedecken. Darum gilt:

**Satz 1:** *Jede Kurve  $C$  hat eine endliche Länge.*

Es hätte für diesen Satz genügt, die Kurve  $C$  in jeder  $\varepsilon$ -Umgebung rektifizierbar vorauszusetzen. Diese Voraussetzung ist dann aber auch notwendig.

Um den Anschluß an die Hilfssätze des vorigen Paragraphen zu erhalten, bemerken wir, daß man nach Satz 1 eine beliebige Kurve  $C$  in einem beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystem in der Form

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

darstellen kann. Dabei ist  $s$  die von einem beliebigen Punkt auf  $C$  ausgemessene Bogenlänge und  $S$  Gesamtlänge von  $C$ , so daß also für  $s$   $0 \leq s \leq S$  gilt. Es ist  $x(0) = x(S)$ ;  $y(0) = y(S)$ ; ferner sind beide Funktionen und ihre Derivierten für das ganze Intervall stetig und  $K(s)$  genügt ebenfalls für das ganze Intervall genau den S. 9 und 10 aufgestellten Voraussetzungen.

Es folgen jetzt einige, das von einer beliebigen Kurve  $C$  eingeschlossene Gebiet  $g$  betreffende Feststellungen.

Sei  $Q$  ein beliebiger innerer Punkt von  $g$ . Um ihn schlage ich den größten Kreis  $K(Q)$ , der noch in  $C$  liegt. Berührt er  $C$  nur in einem einzigen Punkt  $P$ , dann wird der größte unter allen Kreisen gewählt, die die Kurve im selben Punkt von innen berühren und der ganz im Innern der Kurve liegt. Dieser Kreis heiße *Berührungskreis* in  $P$ . Andernfalls ist schon  $K(Q)$  Berührungskreis für jeden seiner Berührungspunkte mit  $C$ .

Nun seien zu allen Punkten von  $C$  die Berührungskreise konstruiert. Ihr Radius  $r$  ist, wie man aus den Stetigkeitseigenschaften der Kurve bzw. ihrer Tangente leicht folgert, eine stetige positive Funktion  $r(s)$  ( $s =$  Bogenlänge). Sie nimmt im abgeschlossenen Intervall  $(0, S)$  ihren kleinsten Wert an. Dieser ist größer als Null. Wäre er nämlich in einem

Punkte  $R(s_0)$  gleich Null, so gäbe es zu  $R(s_0)$  eine Umgebung auf  $C$ , für die alle Berührungskreisradien kleiner als  $\varepsilon$ , eine beliebig kleine positive Konstante wären. Es müßte dann wegen des durch Hilfssatz 1 charakterisierten Kurvenverlaufs für die Umgebung eines beliebigen Punktes auf  $C_1$  zwei Werte  $s_0$  und  $s_1$  ( $s_0 \neq s_1$ ) geben (Null und  $S$  gelten hier als ein Wert), so daß der Punkt  $P(s)$  für  $s \rightarrow s_0$  und auch  $Q(s)$  für  $s \rightarrow s_1$  gegen  $R(s_0)$  ginge.  $C$  wäre also nicht einfach. Aus der Stetigkeit von  $r(s)$  folgt weiterhin, daß es *größte* Berührungskreise gibt.

Nun gebe es auf  $C$  einen Punkt  $P(s')$  mit dem Berührungsradius  $r(s') < 1$ . Durchlaufe ich den Berührungskreis  $K(s')$  von  $P' = P(s')$  aus in positivem Sinn, so sei  $Q'$  der erste weitere Berührungspunkt auf  $C$ , den ich treffe. (Es gibt ihrer, wie man leicht sieht, höchstens fünf.) Jetzt fasse man die einfache geschlossene Kurve  $\varphi'$  ins Auge, die von  $P'$  aus im positiven Sinn durchlaufen, successive aus den Bögen  $\widehat{P'Q'}$  auf  $C$  ( $p$ )<sup>6)</sup> und  $\widehat{Q'P'}$  auf  $K(s')$  ( $p$ ) besteht. Bezüglich  $\varphi'$  gilt:

Hilfssatz 5.  $\varphi'$  enthält mindestens einen Einheitskreis ganz im Innern.

$C$  werde von  $P'$  aus in positivem Sinn durchlaufen, bis zum Punkte  $P\left(s' + \frac{\pi}{2}\right)$  und dort der Berührungskreis  $K\left(s' + \frac{\pi}{2}\right)$  konstruiert. Ist sein Radius 1 oder größer, so ist man fertig. Ist er kleiner, so beachtet man, daß  $P'' = P\left(s' + \frac{\pi}{2}\right)$  außerhalb von  $K(s')$  liegen muß (Hilfssatz 1), daß sich also auf dem Berührungskreis  $K\left(s' + \frac{\pi}{2}\right)$  kein Punkt des abgeschlossenen Kreisbogens  $\widehat{Q'P'}$  befinden kann. Bezüglich  $K\left(s' + \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $P''$  und  $C$  konstruiere man genau analog zu  $\varphi'$  die geschlossene Kurve  $\varphi''$ . Das von ihr umschlossene Gebiet  $g''$  ist ein Teil des von  $\varphi'$  umschlossenen,  $g'$ . Der ihr zugehörige Bogen von  $C$  ist um mehr als  $\frac{\pi}{2}$  kürzer als  $\widehat{P'Q'}$ . Von  $P''$  ausgehend, wende man ein zweites Mal das eben beschriebene Verfahren an, und so fort. Man kommt derart entweder nach endlich vielen,  $n$  Schritten zu einem Berührungskreis, der ein Einheitskreis ist oder größer und der in einer geschlossenen Kurve  $\varphi^{(n)}$  liegt, deren Inneres selbst einen Teil des Inneren von  $g'$  ausmacht, oder man endet bei einem Berührungskreis, der einen Radius  $r < 1$  hat und den ein Bogen auf  $C$  von höchstens der Länge  $\frac{\pi}{2}$  in zwei Punkten berührt. Das Letztere steht im Widerspruch zu Hilfssatz 1. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen. Unmittelbar erhält man jetzt:

<sup>6)</sup> Vergl. S. 10.

Satz 2. *Jede Kurve  $C$  enthält mindestens einen Einheitskreis ganz.*

Hat der größte Berührungskreis von  $C$  einen Radius  $r \geq 1$ , so ist nichts zu beweisen. Die gegenteilige Annahme aber wird durch Hilfssatz 5 widerlegt, da man mit Hilfe eines Berührungskreises und eines Bogens auf  $C$  eine Kurve  $\varphi'$  konstruieren kann.

Dieselben Überlegungen führen zu

Satz 3: *Jede Kurve  $C$ , deren Durchmesser mindestens 4 ist, enthält mindestens zwei getrennt liegende Einheitskreise ganz.*

Unter dem Durchmesser einer Kurve  $C$ , wird, wie üblich, das Maximum des Abstandes zweier Punkte auf  $C$  verstanden. Daß dieses existiert folgt daraus, daß das Maximum des Abstandes eines festen Punktes  $P$  von allen anderen Punkten auf  $C$  existiert und eine stetige Funktion der Bogenlänge ist.

Auf der Kurve  $C$  vom Durchmesser  $d$  gibt es mindestens zwei Punkte  $P_1$  und  $P_2$  mit diesem Durchmesser als Abstand. Diese beiden Punkte sollen mit den Punkten  $-\frac{d}{2}$  und  $\frac{d}{2}$  der  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems zusammenfallen.  $C$  liegt dann im Streifen  $g$  zwischen den Geraden  $x = -\frac{d}{2}$  und  $x = \frac{d}{2}$ .  $K_1$  sei der Berührungskreis in  $P_1$ ,  $K_2$  derjenige in  $P_2$ . Sind beide Einheitskreise oder größer, oder hat der eine von ihnen den Durchmesser  $\geq 4$ , so ist die Richtigkeit der Behauptung evident.

Es sei der Radius von  $K_1$ ,  $r_1 < 1$ . Ich denke mir  $C$  von  $P_1$  aus zuerst im positiven Sinne bis  $P_2$  durchlaufen. Den durchlaufenen Bogen bezeichne ich mit  $\beta_1$ . Entsprechend sei  $\beta_2$  der im negativen Sinn von  $P_1$  bis  $P_2$  durchlaufene Bogen. Mindestens der eine von ihnen muß  $K_1$  außer in  $P_1$  in mindestens einem weiteren Punkte berühren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen,  $\beta_1$  tue dies. Der erste Berührungspunkt mit  $K_1$ , den man bei der Durchlaufung des Bogens  $\beta_1$  von  $P_1$  aus trifft, sei  $P'_1$ . Der Bogen  $\widehat{P_1 P'_1}$  werde mit  $\beta'_1$  bezeichnet. Auf  $\beta'_1$  liegt kein Punkt von  $K_2$ . Es sei nämlich  $Q$  der erste gemeinsame Punkt von  $\beta_1$  und  $K_2$ , bezüglich derselben Durchlaufung von  $\beta_1$ . Dann muß der Tangentenvektor an  $\beta_1$  in  $Q$  mit dem positiven Tangentenvektor an  $K_2$  in  $Q$  zusammenfallen. Andernfalls müßte ein auf  $\beta_1$  in positivem Sinn laufender Punkt die  $x$ -Achse in  $P_2$  in der Richtung von der oberen zur unteren Halbebene durchqueren, was gegen die Voraussetzungen geht. Würden  $P'$  und  $Q$  zusammenfallen, so müßte der Tangentenvektor in diesem

Punkt gerade die nicht erlaubte Richtung haben. Wäre  $Q$  ein innerer Punkt von  $\beta'_1$ , so könnte  $\beta_1$  überhaupt keinen Berührungspunkt mit  $K_1$  haben. Die Kurve, bestehend aus den Bögen  $\widehat{P_1Q}$  und  $\widehat{QP_2}$  auf  $K_2$  ( $p$ ) zerlegte nämlich den Streifen  $g$  in zwei Gebiete  $g_1$  und  $g_2$ . Während  $K_1$  bis auf den Punkt  $P_1$  ganz im Innern des oberen,  $g_1$  liegt, müßte  $\beta_1$  von  $Q$  aus im Innern oder auf dem Rande des unteren,  $g_2$  verlaufen.

Der Bogen  $\beta'_1$  auf  $C$  ( $p$ ) zusammen mit  $P'P_1$  auf  $K_1$  ( $p$ ) bildet eine einfache geschlossene Kurve  $\varphi_1$  vom Charakter der im Hilfssatz 5 betrachteten. Sie liegt völlig außerhalb des  $C$  in  $P_2$  berührenden Einheitskreises wenn  $r_3 \geq 1$ , und, wenn  $r_2$  der Radius von  $K_2$  kleiner ist als 1, völlig außerhalb von  $K_2$ . Auch enthält sie keinen Bogen von  $C$  in ihrem Innern.

Ist auch  $r_2 < 1$ , kann man bezüglich  $K_2$  und  $C$  eine entsprechende beschlossene Kurve  $\varphi_2$  konstruieren.  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  liegen völlig getrennt, und keine befindet sich im Innern der anderen. Sie umschließen nur innere Punkte von  $C$ . Nach Hilfssatz 5 enthält jede mindestens einen Einheitskreis vollständig. Diese Einheitskreise liegen in  $C$  und sind getrennt. Ist  $r_2 \geq 1$ , so sind der in  $\varphi_1$  enthaltene und der  $C$  in  $P_2$  berührende Einheitskreise der behaupteten Art.

### § 3.

Zuerst soll jetzt das in der Einleitung angedeutete Aufwicklungsverfahren einer Kurve  $C$  exakt beschrieben werden. Mit anderen Worten: Es soll durch ein Beispiel Satz 4 bewiesen werden.

Satz 4: *Es gibt im Innern jedes Kreises vom Radius  $r > 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  und zu jedem Durchmesser  $d > 4$  Kurven  $C$ , deren Länge jede beliebige Größe  $M$  übertrifft.*

Um die Punkte  $M_1 = (-1 - \varepsilon, 0)$ ;  $\varepsilon > 0$  und  $M_2 = (1 + \varepsilon, 0)$  der  $x$ -Achse werden die beiden Kreise  $K_1$  und  $K_2$  vom Radius  $r = 1 + \varepsilon$  geschlagen, desgleichen um den Punkt  $M_3 = (0, (1 + \varepsilon)\sqrt{3})$  der Kreis  $K_3$  vom selben Radius. Der Kreis  $K_m$  mit  $(0, (1 + \varepsilon)\frac{1}{\sqrt{3}})$  als Mittelpunkt und  $r_m = 1 + (1 + \varepsilon)\frac{2}{\sqrt{3}}$  als Radius, berührt  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  und enthält sie in seinem Innern.  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  berühren sich paarweise gegenseitig. Um  $M_i$   $i = 1, 2, 3$  konstruiere man hierauf die Kreise  $K_{ij}$  mit den Radien

$$r_{ij} = r - \frac{\varepsilon \cdot j}{4} \left\{ \begin{array}{l} i = 1, j = -1, 1, 2, 3, 4 \\ i = 2; j = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right. \text{ und } r_{ij} = r + \frac{\varepsilon \cdot j}{4}; i = 3; j = -1, 1, 2, 3,$$

ferner, um den Punkt  $\left(-1 - \varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  die Kreise  $K'_{1j}$ , mit den Radien  $r_j = r - \frac{\varepsilon \cdot j}{4}$ ;  $j = 1, 2, 3, 4$  und um  $\left(1 + \frac{5\varepsilon}{4}, 0\right)$  den Kreis  $K'_{21}$  mit dem Radius  $r - \frac{\varepsilon}{4}$ . Schließlich werde um den Punkt  $\left(0, (1 + \varepsilon) \sqrt{3} + \frac{\varepsilon}{4}\right)$  der Kreis  $K'_3$  vom Radius  $r'_3 = r - \frac{\varepsilon}{4}$  und um  $M_2$  der Kreis  $K$  vom Radius  $3(1 + \varepsilon)$  geschlagen.

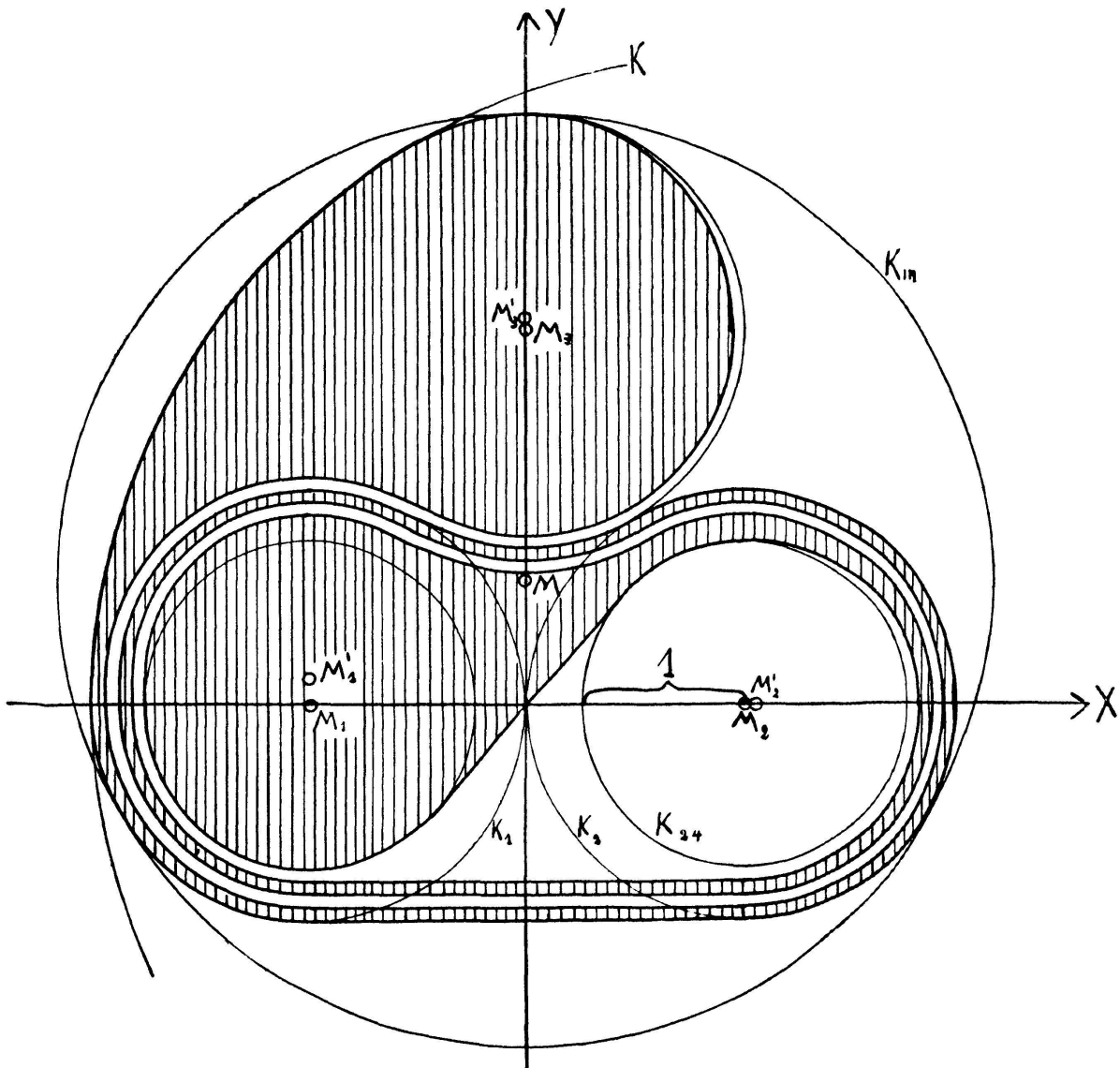


Fig. 1

$K$  berührt  $K_1$  bzw.  $K_3$  in den Punkten  $(-2(1 + \varepsilon), 0)$  bzw.  $P$ , dessen Koordinaten uns nicht interessieren.

$K_3$  berührt die Kreise  $K_{1j}$  bzw.  $K_{2j}$   $j = 1, 2, 3$  und  $K_{3,-1}$  den Kreis  $K_{1,-1}$ .

Es ist nun leicht an Hand der Fig. 1 die Entstehungsweise der Kurve  $C$  aus Bögen der Kreise  $K_{ij}$ ,  $K'_{ij}$ ,  $K'_3$ ,  $K$  und Strecken auf den gemeinsamen

Tangenten an sie zu überblicken und nachzuprüfen, daß sie allen Voraussetzungen genügt. Natürlich hätte man  $\varepsilon$  ebenso gut in  $2n$  gleiche Teile teilen können statt in 4, wobei  $n$  eine beliebige ganze Zahl ist. Es wäre dann eine  $n$  mal gewundene Kurve  $C$  statt der zweimal gewundenen entstanden. Da  $n$  beliebig groß sein kann, ist die Länge der so in  $K_m$  konstruierten Kurven nicht beschränkt. Der Radius  $r_m$  ist für genügend kleines  $\varepsilon$  beliebig wenig größer als  $1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  und ebenso der Durchmesser  $d$  beliebig wenig größer als 4.

Um die in der Einleitung genannte Schranke  $S_1(r_m)$  für die Längen aller in einem bestimmten Kreis eingeschlossenen Kurven  $C$  bzw. die Schranke  $S_2(d)$  für die Längen aller Kurven  $C$  vom festen Durchmesser  $d$  herzuleiten, definiere ich zunächst den Begriff des *Umkreises* einer solchen Kurve und leite einige seiner Eigenschaften ab.

*Definition: Unter dem Umkreis einer Kurve  $C$  ist der kleinste Kreis zu verstehen, in welchem sie liegt.*

*Hilfssatz 6: Es gibt zu jeder Kurve  $C$  genau einen Umkreis.* Daß es zu jedem Punkt  $P$  im Innern und auf  $C$  als Mittelpunkt einen kleinsten Kreis gibt, in welchem  $C$  liegt, ist evident. Die Radien  $r(P)$  dieser Kreise stellen eine stetige Funktion über dem durch  $C$  abgeschlossenen Bereich dar. Eine stetige Funktion nimmt über einem abgeschlossenen Bereich einen kleinsten Wert an. Gäbe es zwei Punkte des Bereiches, für welche die zugehörigen Radien gleich diesem kleinsten Wert wären, so müßte  $C$  in dem von beiden gleichzeitig bedeckten Bereich liegen. Das hätte zur Folge, daß es sicher einen Kreis mit noch kleinerem Radius gäbe, der  $C$  einschloesse.

*Hilfssatz 7: Jede Kurve  $C$  berührt ihren Umkreis entweder in den Endpunkten eines Durchmessers oder dann in drei Punkten, welche die Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks sind.*

Lägen nämlich alle Berührungspunkte zwischen dem Umkreis  $K_m$  und  $C$  auf ein und demselben offenen Halbkreis von  $K_m$ , so könnte man letzteren sicher senkrecht zur größten Sehne zwischen zwei Berührungspunkten um einen kleinen Betrag verschieben, so daß er in der neuen Lage keinen Punkt mit  $C$  gemeinsam hätte. Es gäbe also noch einen kleineren Kreis, in dem  $C$  läge.

Andererseits ist der Umkreis eines spitzwinkligen Dreiecks der kleinste, in welchem es liegen kann, und der Durchmesser eines Kreises kann nicht Sehne oder Teil einer Sehne eines kleineren Kreises sein.

Hilfssatz 8: *Der Radius  $r_m$  des Umkreises  $K_m$  einer Kurve  $C$ , die einen Durchmesser  $d \leq 4$  hat, ist höchstens  $1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ .*

Seien  $Q_1 Q_2 Q_3$  drei unter den Berührungspunkten von  $C$  und  $K_m$ , die ein spitzwinkliges Dreieck bilden. Die Mittelpunkte  $M_1, M_2, M_3$  der Einheitskreise, die  $C$  in  $Q_1, Q_2$  und  $Q_3$  von innen berühren, liegen auf der Peripherie eines zu  $K_m$  konzentrischen Kreises  $K^*$  vom Radius  $r_m - 1$  und sind gleichfalls Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks. Jede der drei Geraden durch je zwei der Mittelpunkte schneidet  $C$  außerhalb der zugehörigen Kreise und außerhalb von  $K^*$  (Hilfssatz 1). Wäre  $r_m > 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  also der Radius von  $K^*$  größer als  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ , so wäre mindestens eine Seite des Dreiecks  $M_1 M_2 M_3$  größer als  $2^7)$ , und  $C$  hätte dann einen Durchmesser  $> 4$ .

Im Zusammenhang mit dem Umkreis werden in den folgenden Betrachtungen die Eigenschaften der konvexen Hülle einer Kurve  $C$  wesentlich verwendet.

*Unter der konvexen Hülle  $c$  der Kurve  $C$  wird wie üblich die Einhüllende derjenigen Tangenten an  $C$  verstanden, die  $C$  ganz auf der einen Seite lassen.*

Die konvexe Hülle  $c$  einer Kurve  $C$  liegt in ihrem Umkreis  $K_m$  und es gilt daher nach der Theorie der konvexen Kurven

Hilfssatz 9: *Die Länge der konvexen Hülle  $c$  einer Kurve  $C$  ist kleiner als der Umfang ihres Umkreises.*

Dasselbe gilt natürlich von  $C$  selbst, falls es konvex ist und nicht mit  $K_m$  zusammenfällt. Es wird daher für das Folgende stets vorausgesetzt:  $C$  sei nicht konvex. *Bezüglich der von jetzt ab betrachteten Kurven  $C$  gelte überdies immer  $r_m \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  bzw.  $d \leq 4$ .*

Das in der Einleitung erwähnte Symmetrisierungsverfahren kann nun folgendermaßen beschrieben werden:  $c$  sei die konvexe Hülle von  $C$  und  $\overline{P_1 P_2}$  eine ihrer Strecken. Durchläuft man  $C$  von  $P_1$  aus im positiven Sinn, so soll man außer eventuellen Punkten der Strecke  $\overline{P_1 P_2}$  keine anderen Punkte von  $c$  treffen, ehe man  $P_2$  erreicht. Der durchlaufene Bogen  $\widehat{P_1 P_2}$  werde nun an  $\overline{P_1 P_2}$  gespiegelt. Dasselbe geschehe mit allen im selben Sinne einer Strecke  $\overline{P_i P_k}$  der konvexen Hülle zugeordneten

<sup>7)</sup> Vergl. auch S. 31.

Teilbögen von  $C$ . Man erhält durch diesen Prozeß eine neue Kurve. Von dieser weiß man:

1. daß sie stetig und glatt ist und den Seite 16—17 formulierten Voraussetzungen über die Krümmung genügt;

2. daß sie die gleiche Länge hat wie  $C$ .

Wäre man außerdem sicher, daß sie

3. ebenfalls einfach wäre und

4. denselben Umkreis  $K_m$  hätte wie  $C$ , so hätte man nach der Spiegelung eine neue vergleichsfähige Kurve  $C_1$  vor sich. Auf diese würde man das Spiegelungsverfahren von neuem anwenden. Man würde also die konvexe Hülle  $c_1$  von  $C_1$  konstruieren und die ihren Strecken auf die eben charakterisierte Weise zugeordneten Bögen an den Strecken spiegeln.

Setzen wir einen Augenblick als bewiesen voraus, daß aus jeder vergleichsfähigen Kurve durch die Spiegelung wiederum eine vergleichsfähige Kurve hervorgeht, so können wir durch eine nicht abbrechende Folge von Spiegelungen eine Folge von Kurven  $C, C_1, C_2 \dots$  mit folgenden Eigenschaften erzeugen:

a) Sie sind alle vergleichsfähig, d. h. sie haben denselben Umkreis, sind einfach, geschlossen, glatt und von beschränkter Krümmung.

b) Sie haben alle dieselbe Länge.

c) In der Folge der ihnen entsprechenden konvexen Hüllen  $c, c_1, c_2, c_3 \dots$  enthält jede mindestens einen Teilbogen der vorhergehenden im Innern und keinen im Äußern.

d) Die Differenz zwischen der Länge von  $C_\nu$  und derjenigen von  $c_\nu$  wird mit wachsendem  $\nu$  beliebig klein.

e) Die Länge von  $c_\nu$  ist für jedes  $\nu$  kleiner als der Umfang von  $K_m$ .

Aus diesen Punkten folgt unmittelbar

*Satz 5: Die Länge einer Kurve  $C$  ist nicht größer als der Umfang ihres Umkreises  $K_m$ , wenn dessen Radius  $r_m \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  ist.*

Daß dann  $2r_m\pi$  für die Längen aller in  $K_m$  liegenden  $C$  die *genaue obere Schranke* ist, bedarf keiner weiteren Erörterung; denn es ist leicht, Kurven  $C$  anzugeben, die Punkte im Innern von  $K_m$  haben und deren Länge vom Umfang dieses Kreises beliebig wenig abweicht. Offen bleibt noch die Frage, ob es außer  $K_m$  selbst Kurven  $C$  von der Länge  $2r_m\pi$  in  $K_m$  gibt. Von den Punkten  $a, b, c, d, e$  ist einzig der Punkt  $d$  eines Be-

weises bedürftig. Dieser ergibt sich am einfachsten aus dem Beweis für Punkt 3 S. 19. Letzterer soll jetzt geführt werden.

$P_1$  und  $P_2$  seien die Endpunkte einer Strecke, der einer Kurve  $C$  zugehörigen konvexen Hülle  $c$ . Sie sollen in die Punkte  $-a$  und  $a$  ( $a > 0$ ) der  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems fallen und  $C$  selbst liege in der abgeschlossenen oberen Halbebene. Unter  $k_1$  und  $k_2$  werden die beiden Einheitskreise verstanden, welche die  $x$ -Achse in  $-a$  bzw.  $a$  berühren und die in der oberen Halbebene liegen.  $k_3$  ist derjenige Einheitskreis, der sowohl  $k_1$  als  $k_2$  berührt und dessen Mittelpunkt auf der negativen  $y$ -Achse liegt. Daß es immer ein  $k_3$  gibt, folgt durch eine leichte Rechnung aus der Tatsache, daß  $a \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$  sein muß. Diese letzte Tatsache folgt aus Hilfssatz 1, Zusatz 1, wenn man  $C$  von  $P_1$  aus in negativer und von  $P_2$  aus in positiver Richtung bis zu den Punkten verfolgt, in denen die Tangente zum erstenmal parallel zur  $y$ -Achse ist. Aus Hilfssatz 2a folgt weiterhin, daß man, bei diesen Durchlaufungen über die letztgenannten Punkte hinaus fortschreitend, nicht ins Innere von  $k_1$  bzw.  $k_2$  gelangen kann, ehe man die Gerade  $y = 2$  erreicht hat. Man muß aber diese auf beiden Wegen erreichen, da  $C$  geschlossen ist. Daraus folgt, daß  $k_1$  und  $k_2$  in  $K_m$  liegen.

$k_3$  berühre  $k_1$  bzw.  $k_2$  in den Punkten  $P'_1$  bzw.  $P'_2$ .  $\psi_{12}$  sei der Kurvenbogen, der sich zusammensetzt aus  $\widehat{P_1 P'_1}$  auf  $k_1$  ( $p$ )  $\widehat{P'_1 P'_2}$  auf  $k_3$  ( $n$ ),  $\widehat{P'_1 P_2}$  auf  $k_2$  ( $p$ ) und  $\Phi$  sei die geschlossene Kurve aus  $\psi_{12}$  und  $\overline{P_1 P_2}$ . Dann gilt der

Hilfssatz 10: *Kein Punkt des Bogens  $\widehat{P_1 P_2}$  auf  $C$  liegt außerhalb von  $\Phi$ .*

Beweis: Man denke sich  $\widehat{P_1 P_2}$  von  $P_1$  durchlaufen. Nach Hilfssatz 3 kann keiner unter den von rechts den Bogen berührenden Einheitskreisen den Kreis  $k_1$  schneiden, ehe der Bogen die Gerade  $y = 2$  erreicht hat. Nun schneide  $\widehat{P_1 P_2} \psi_{12}$  zum erstenmal im Punkte  $P$  auf  $\widehat{P'_1 P'_2}$ . Der dort von rechts berührende Einheitskreis  $k$  schneidet  $k_2$ . Der Mittelpunkt von  $k$  liegt nämlich, wie man leicht erkennt, innerhalb des zu  $k_2$  konzentrischen Kreises vom Radius 2. Dasselbe wäre a fortiori der Fall, wenn der erste Schnittpunkt  $P$  auf  $\widehat{P'_1 P_2}$  läge.

Zweig  $\widehat{P_1 P_2}$  in einem Punkte  $P'$  von  $\widehat{P'_1 P'_2}$  berührend von  $\psi_{12}$  nach außen ab, dann gibt es beliebig nahe an  $P'$  auf  $\widehat{P_1 P_2}$  Punkte  $P$ , für welche der von rechts berührende Einheitskreis  $k_2$  schneidet. In allen diesen Fällen muß man nach Hilfssatz 3 auf dem von  $P_2$  aus im negativen Sinn durchlaufenen Bogen  $\widehat{P_2 P}$  einmal die Gerade  $y = 2$  erreicht haben, ehe

man zum Punkt  $P$  gelangt. Erreicht man aber von  $P_2$  aus in negativem Sinn die Gerade  $y = 2$ , so muß das auch bei der Durchlaufung in positivem Sinn von  $P_1$  aus der Fall sein. Bei der Durchlaufung von  $P_1$  aus kann man aber nicht ins Innere von  $k_1$  gelangen, ehe man die Gerade  $y = 2$  erreicht hat, und bei der Durchlaufung von  $P_2$  aus bleibt man auf oder außerhalb von  $k_2$ , so lange man im Streifen  $0 \leq y < 2$  bleibt (Hilfssatz 3).

Schneiden oder berühren sich  $k_1$  und  $k_2$ , so ist es leicht einzusehen, daß den obigen Forderungen nicht genügt werden kann, ohne daß der Bogen  $\widehat{P_1 P_2}$  mindestens einen Doppelpunkt hat. Liegen  $k_1$  und  $k_2$  getrennt, so denke ich mir  $\widehat{P_1 P_2}$  von  $P_1$  aus bis zum ersten Schnittpunkt mit  $y = 1$  durchlaufen. Dort sei unter den  $C$  von rechts berührenden Kreisen der größte,  $K_a$  geschlagenen, der keinen Punkt von  $\widehat{P_1 P_2}$  enthält. Daß es einen solchen gibt, folgt ebenso wie die Existenz des Berührungskreises (S. 22). Sein Radius ist sicher kleiner als 1.

Aus einem Bogen auf  $K_a$  und einem Teilbogen von  $\widehat{P_1 P_2}$ , läßt sich eine den Voraussetzungen des Hilfssatzes 5 genügende geschlossene Kurve  $\varphi'$  konstruieren. Sie liegt ganz in  $K_m$  und enthält nach Hilfssatz 5 einen Einheitskreis  $k'$  ganz in ihrem Innern. Dieser liegt außerhalb von  $C$ . Da aber  $C$  bei dieser Lage von  $k_1$  und  $k_2$  einen Durchmesser hat, der größer ist als 4, so liegen in ihrem Innern zwei getrennte Einheitskreise  $k''$  und  $k'''$ . Die Kreise  $k', k'', k'''$  liegen alle in  $K_m$  und sind getrennt. Das ist sicher nicht möglich, wenn  $r_m < 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  ist. Für  $r_m = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  aber müßten die beiden in  $C$  liegenden Einheitskreise sich berühren, wenn außer ihnen noch ein dritter Einheitskreis in  $K_m$  liegen soll, d. h. keine Strecke der konvexen Hülle kann dann größer sein als  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . Diese Konfiguration ist aber bereits im vorigen Abschnitt behandelt.

Aus dem eben bewiesenen Hilfssatz folgt, daß alle Punkte des Bogens  $\widehat{P_1 P_2}$  auf den inneren Normalen der Strecken  $\overline{P_1 P_2}$  der konvexen Hülle  $c$  liegen. Die Punkte des aus  $\widehat{P_1 P_2}$  durch Spiegelung hervorgehenden Bogens  $\widehat{P_1 P'_2}$  liegen daher auf den äußeren Normalen zu  $\overline{P_1 P_2}$ . Es kann aber die äußere Normale in einem beliebigen Punkte einer konvexen Kurve weder diese selbst in einem zweiten Punkt noch irgendeine andere äußere Normale schneiden. Daraus folgt, daß die durch die Spiegelungen aus  $C$  entstehende Kurve  $C_1$  einfach ist, d. h. Punkt 3 ist bewiesen.

Die den verschiedenen Strecken  $\overline{P_i P_k}$  von  $c$  entsprechenden Bögen  $\psi_{ik}$  bilden mit den der konvexen Hülle  $c$  angehörigen Bögen von  $C$  ebenfalls eine einfache geschlossene Kurve  $C'$ . Die aus dieser durch die Spiegelungen der  $\psi_{ik}$  hervorgehende Kurve  $C^*$  hat dieselben Eigenschaften. Kein Punkt  $C_1$  liegt außerhalb von  $C^*$ . Wir brauchen also, um Punkt 4 S. 24 zu beweisen, nur zu zeigen, daß auch  $C^*$  in  $K_m$  liegt.

Im Hinblick auf spätere Betrachtungen wird etwas mehr bewiesen.

Um die Punkte  $-x_0$  und  $x_0$  ( $0 < x_0 \leq 2$ ) der  $x$ -Achse werden die Einheitskreise  $k_1$  und  $k_2$  geschlagen. Sie berühren die Gerade  $y = -1$  in den Punkten  $(-x_0, -1)$  bzw.  $(x_0, -1)$ .  $K_3$  sei der Kreis vom Radius 3, dessen Mittelpunkt auf der positiven  $y$ -Achse (inkl. Null) liegt und der  $k_1$  und  $k_2$  im Innern enthält und berührt. Mit  $k_3$  bezeichne ich den Einheitskreis der  $k_1$  und  $k_2$  berührt und dessen Mittelpunkt auf der negativen  $y$ -Achse liegt.

$\psi_{12}$  sei der aus Bögen von  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  auf die gleiche Weise wie der S. 25 mit demselben Buchstaben bezeichnete Kurvenbogen zusammengesetzte Bogen. Dann gilt

Hilfssatz 11a. *Der durch Spiegelung an der Geraden  $y = -1$  aus  $\psi_{12}$  hervorgehende Bogen  $\psi'_{12}$  liegt in  $K_3$ .*

Ich beweise, daß der durch diese Spiegelung aus  $k_3$  hervorgehende Kreis  $k'_3$  in  $K_3$  liegt. Das ist der Fall, wenn sein Mittelpunkt nicht außerhalb des zu  $K_3$  konzentrischen Kreises  $K^*$  vom Radius 2 liegt. Die Ordinate des Mittelpunktes von  $k_3$  ist  $-\sqrt{4-x_0^2}$ . Durch Spiegelung an  $y = -1$  geht dieser Punkt über in den Punkt  $-2 + \sqrt{4-x_0^2}$  auf der negativen  $y$ -Achse. Das ist aber auch die Ordinate des Schnittpunktes von  $K^*$  mit der negativen  $y$ -Achse.

Jeder andere Kreis von kleinerem Radius als 3, der ebenfalls  $k_1$  und  $k_2$  enthält und berührt und dessen Mittelpunkt auf der positiven  $y$ -Achse (inkl. Null) liegt, enthält denjenigen Bogen auf  $K_3$ , der in der unteren Halbebene zwischen den Berührungspunkten von  $K_3$  mit  $k_1$  und  $k_2$  liegt in seinem Innern. Also enthält er auch den Bogen  $\psi'_{12}$ .

Nun sei  $K'_3$  ein Kreis vom Radius 3 mit dem Mittelpunkt in der oberen Halbebene, der weder  $k_1$  noch  $k_2$  berührt und sie enthält.

Dann gibt es einen zu  $K'_3$  konzentrischen Kreis  $K'$  von kleinerem Radius, der sie beide enthält und wenigstens den einen von ihnen berührt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen,  $k_1$  sei der berührte und zwar werde er im Punkt  $B = (x_1, y_1)$  berührt ( $y_1 > -1$ ). Alsdann gibt es einen weiteren Kreis  $K''$ , dessen Mittelpunkt auf der Strecke  $\overline{BM}$  ( $M =$  Mittelpunkt von  $K'_3$ ) und auf der  $y$ -Achse liegt, der

durch  $B$  geht und der auch  $k_2$  berührt.  $K''$  liegt in  $K'_3$ . Spiegeln wir die Kurve  $\psi_{12}$  an der Geraden  $y = -1$ , so liegt das Spiegelbild ganz in  $K''$ , also auch in  $K'_3$ . Läge der Mittelpunkt von  $K'_3$  in der unteren Halbebene, so würde dies um so mehr der Fall sein. Es gilt also allgemein:

Hilfssatz 11. *Genüßten 3 Einheitskreise  $k_1, k_2, k_3$  den S. 25 Zeile 6—10 genannten Voraussetzungen, ist ferner  $\psi_{12}$  die dort definierte Kurve und enthält ein Kreis  $K$  vom Radius  $r \leq 3$  die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  im Innern, so liegt das Spiegelbild von  $\psi_{12}$  bezüglich der gemeinsamen Tangente an  $k_1$  und  $k_2$ , die  $\psi_{12}$  in den Endpunkten berührt, ganz in  $K$ .*

Die unter 4 S. 24 aufgestellte Behauptung ist also richtig.

Um Punkt  $d$  der Seite 22 sicherzustellen, und dann zu zeigen, daß der Umkreis länger ist als jede unter den von ihm eingeschlossenen Kurven, beweise ich

Hilfssatz 12: *Der Bogen  $\widehat{P_1 P_2}$  aus Hilfssatz 10 ist kürzer als der Bogen  $\psi_{12}$ , wenn er nicht mit diesem zusammenfällt.*

Ich denke mir  $\widehat{P_1 P_2}$  in der Form

$$y = f_{12}(x), \quad -a \leq x \leq a; \quad f_{12}(x) \geq 0$$

dargestellt.

Die Länge  $l_{12}$  von  $\widehat{P_1 P_2}$  ist

$$l_{12} = \int_{-a}^{+a} \sqrt{1 + f_{12}'^2(x)} \, dx.$$

Der Bogen  $\psi_{12}$  sei dargestellt durch die Gleichung

$$y = \psi_{12}(x), \quad -a \leq x \leq a.$$

Das Maximum von  $f_{12}(x)$  in  $(-a, a)$  sei  $2b$ , dasjenige von  $\psi_{12}(x)$  sei  $2b_1$ . Es ist  $b_1 \geq b$ . Im Falle des Gleichheitszeichens ist  $f_{12}(x) \equiv \psi_{12}(x)$ .

Um den Punkt  $(0, -1 + b)$  werde ein Einheitskreis  $k$  geschlagen. Er schneide die  $x$ -Achse in den Punkten  $-d$  und  $d$ . Es ist  $d \leq \frac{a}{2}$ . Der Differentialquotient der Funktion, welche den in der oberen Halbebene verlaufenden Bogen von  $k$  darstellt, hat in den Punkten der  $x$ -Achse absolut genommen seinen größten Wert. Wir bezeichnen diesen mit  $m(b)$ .

$f_{12}(x)$  nehme sein Maximum  $2b$  für  $x = x_0$  an. Nach den Ungleichungen, die zum Beweis für Hilfssatz 1 führen, gilt dann für die Intervalle

( $-a, -a + d$ ) und ( $a - d, a$ )  $\alpha$ )  $|f'_{12}(x)| \leq |\psi'_{12}(x)|$  (' bedeutet hier Derivierte). Ferner

$$\beta) |f'_{12}(x_0 - d + \xi)| \leq |\psi'_{12}(-d + \xi)| \text{ für } 0 \leq \xi \leq 2d.$$

Für das ganze Intervall ( $-a, a$ ) ist

$$\gamma) |f'_{12}(x)| \leq m(b)$$

da sonst nach Hilfssatz 1 entweder für ein  $x_1$   $f_{12}(x_1) < 0$  oder für ein  $x_2$   $f_{12}(x_2) > 2b$  sein müßte.

Für  $-a + d < x < -d$  und  $d < x < a - d$  gilt aber andererseits

$$\delta) |\psi'_{12}(x)| > m(b).$$

Aus  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  folgt für  $f_{12}(x) \neq \psi_{12}(x)$

$$l_{12} = \int_{-a}^a \sqrt{1 + f_{12}'^2(x)} dx < \int_{-a}^a \sqrt{1 + \psi_{12}'^2(x)} dx = \text{Länge von } \psi_{12}.$$

Wenn  $\max |f_{12}(x)| = 2b_1$  ist, folgt aus Hilfssatz 1 und Zusatz 1 weiterhin, daß die Fläche des von  $C_1$  umschlossenen Bereichs um mehr als  $4b_1^2$  größer sein muß als die des von  $C$  begrenzten Bereiches. Es kann demnach unter den  $C_\nu$  nur endlich viele geben, welche Bögen  $\widehat{P_i P_k}$  besitzen, auf denen Punkte mit einem Abstand  $D \geq 2b_1$ ; ( $b_1 > 0$  fest) von der zugehörigen Geraden  $\overline{P_i P_k}$  der konvexen Hülle  $c$  besitzen. Sonst gäbe es ein  $N$ , so daß für alle  $\nu > N$  die  $C_\nu$  Fläche einschließen, welche größer wäre als  $r_m^2 \pi$ . Wegen  $\gamma$  ist ferner  $l_{12} < 2a \sqrt{1 + m^2(b_1)}$ , und diese Größe geht mit  $b_1 \rightarrow 0$  gegen  $2a$ . Damit ist auch Punkt  $d$  S. 24 bewiesen.

Jetzt kann man auch die Frage nach den längsten in  $K_m$  ( $r_m \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ ) eingeschlossenen Kurven  $C$  entscheiden. Es gilt

**Satz 5a.** *Jede von  $K_m$  verschiedene in  $K_m$  eingeschlossene Kurve  $C$  ist kürzer als  $2r_m \pi$ .*

Die den successiven Spiegelungen entsprechende Folge der konvexen Hüllen  $c_1 c_2 c_3 \dots$  konvergiert gegen eine konvexe Kurve  $c_0$ . Die Länge von  $C$  ist gleich der Länge dieser Grenzkurve. Hat  $c_0$  Punkte im Innern von  $K_m$ , ist ihre Länge kleiner als  $2r_m \pi$ . Das heißt aber: daß jeder Punkt von  $C$  im Innern von  $K_m$  nach einer endlichen Anzahl  $\mu$ , von Spiegelungen im Innern von  $c_\mu$  liegen muß, falls die Länge von  $C$  gleich  $2r_m \pi$  sein soll.

Sei  $\widehat{P_1 P_2}$  ein Bogen auf  $C$ , der im Innern der konvexen Hülle  $c$  verläuft. Fällt er nicht mit dem S. 25 definierten Bogen  $\psi_{12}$  zusammen, so kann er durch diesen nach Hilfssatz 12 längeren Bogen ersetzt werden, und man erhält wieder eine vergleichsfähige Kurve. Diese wäre aber länger als  $2 r_m \pi$ , falls  $C$  selbst diese Länge besitzt, was nicht möglich ist.

Sei  $\widehat{P_k P_l}$  irgendein Bogen auf  $c$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden Strecken. Den nachfolgenden konvexen Hüllen  $c_1, c_2, c_3 \dots$  können bestenfalls Teilbögen  $\widehat{P_k^{(\nu)} P_l^{(\nu)}}$ ;  $\nu = 1, 2, 3 \dots$  von  $\widehat{P_k P_l}$  angehören, und es gibt nach Voraussetzung ein letztes  $\nu = \mu - 1$  derart, daß  $\widehat{P_k^{(\mu-1)} P_l^{(\mu-1)}}$  noch Bogen der konvexen Hülle  $c_{\mu-1}$  ist, und so, daß er nur Punkte im Innern von  $c_\mu$  hat. Damit sind wir auf den eben behandelten Fall zurückgekommen, d. h. man könnte aus  $C_\mu$  eine längere vergleichsfähige Kurve  $C'_\mu$  gewinnen.  $C_\mu$  und damit  $C$  kann also nicht die Länge  $2 r_m \pi$  haben.

Eine vorläufige, wenn auch ungenaue Antwort auf die Frage nach der genauen oberen Schranke (eventuell dem Maximum) der Länge aller Kurven  $C$  vom festen Durchmesser  $d \leq 4$  enthält bereits das im vorigen Abschnitt abgeleitete Resultat über das Maximum der Länge aller  $C$  mit festem Umkreisradius  $r_m \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Der Umkreis, welcher zu irgend einer Kurve vom Durchmesser gehört, hat ja nach Hilfssatz 8 einen Radius  $r_m \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Es handelt sich nun zuerst darum, festzustellen, in welchem Intervall die Radien der Umkreise aller  $C$  mit festem Durchmesser  $d$  liegen können. Berührt  $C$  den Umkreis  $K_m$  in den Endpunkten eines Durchmessers, so ist  $r_m = \frac{d}{2}$ . Sind dagegen drei Berührungspunkte  $Q_1, Q_2, Q_3$  vorhanden, welche ein spitzwinkliges Dreieck bilden, so müssen die Mittelpunkte  $M_i$  der dort von innen berührenden Einheitskreise  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks sein und auf dem zu  $K_m$  konzentrischen Kreise  $K^*$  vom Radius  $r_m - 1$  liegen. Die Längen der Seiten  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) dieses Dreiecks sind gegeben durch die Gleichung

$$l_i = 2 (r_m - 1) \sin \alpha_i$$

wobei  $2 \alpha_i$  der zur Sehne  $l_i$  gehörige Zentriwinkel in  $K^*$  ist. Für einen unter ihnen — es sei  $\alpha_1$  — gilt sicher  $\alpha_1 \geq \frac{\pi}{3}$ , woraus folgt:

$$l_1 \geq (r_m - 1) \sqrt{3}.$$

Nach Hilfssatz 1 S. 11 trifft die Gerade, auf der  $l_1$  liegt,  $C$  außerhalb oder auf den Einheitskreisen, deren Mittelpunkte sie verbindet und auch außerhalb von  $K^*$ , so daß es auf  $C$  mindestens zwei Punkte mit der Entfernung

$$d_1 \geq (r_m - 1) \sqrt{3} + 2$$

geben muß.

Aus  $d_1 \leq d$  folgt dann

$$r_m \leq \frac{d-2}{\sqrt{3}} + 1 \left( \text{für } d = 4 \text{ ist } r_m \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

insgesamt also

$$\text{III} \quad \frac{d}{2} \leq r_m \leq \frac{d-2}{\sqrt{3}} + 1.$$

Die genaue obere Schranke  $S_2(d)$  der Länge aller Kurven vom Durchmesser  $d$  ist darum der Ungleichung

$$\pi d \leq S_2(d) \leq 2 \left( 1 + \frac{d-2}{\sqrt{3}} \right) \pi$$

unterworfen. Wird diese obere Schranke von einer der Kurven angenommen, so ist sicher, daß sie kleiner ist als  $2\pi \left( 1 + \frac{d-2}{\sqrt{3}} \right)$ ; denn der Kreis mit diesem Umfang, in dessen Inneres jede der betrachteten Kurven eingebettet werden kann, gehört selbst nicht zu den Vergleichskurven.

Zur genauen Bestimmung von  $S_2(d)$  kann man wiederum versuchen, sich des Spiegelungsverfahrens zu bedienen, d. h. also: an Stelle einer beliebigen Kurve  $C$  eine Folge von konvexen Kurven zu betrachten, deren Längen monoton wachsend gegen diejenige von  $C$  streben. Die eben festgestellten Resultate über den Radius des kleinsten Umkreises geben Gewähr dafür, daß die durch die Spiegelungen entstehenden Kurven im Umkreis  $K_m$  von  $C$  bleiben. Achtet man auf die Durchmesser der successiven konvexen Kurven, so bemerkt man, daß sie eine monoton nicht abnehmende, beschränkte Folge bilden. Diese hat einen Limes. Gelingt es diesen zu bestimmen und zu zeigen, daß er für festes  $d$  unabhängig von der speziell gewählten Kurve  $C$  ist, so kann man erwarten, auf Grund von bekannten Sätzen über konvexe Kurven, die Funktion  $S_2(d)$  genau bestimmen zu können.

Das im vorigen Abschnitt verwandte Spiegelungsverfahren erweist sich

indes in jener Form als unzweckmäßig. Es wäre nämlich unter anderem festzustellen, welchen maximalen Abstand die Punkte zweier Bögen haben können, die aus zwei Bögen von  $C$  durch Spiegelung hervorgehen, was weitläufige Betrachtungen erfordert. Eine leichte Modifikation führt jedoch sofort zum Ziel. *Anstatt an allen Strecken der konvexen Hülle auf einmal zu spiegeln, kann man sich mit der Spiegelung an einer einzigen begnügen.* Die Kurve  $C_1$ , welche mit ihr längengleich und ebenfalls vergleichsfähig ist, geht also aus  $C$  durch diese einzige Spiegelung hervor. Zu ihr konstruiert man die konvexe Hülle  $c_1$  und nimmt wiederum *eine* Spiegelung um *eine* ihrer Strecken vor usf. Bezüglich des Anschmiegens der  $C_v$  an die konvexen Hüllen  $c_v$  gilt das auf S. 29 Festgestellte, da sich an den dortigen Überlegungen gar nichts ändert. Dasselbe ist für die Konvergenz der Längen der  $c_v$  gegen die Länge von  $C$  der Fall.

Man hat also nur festzustellen, wie groß der Abstand irgendeines Punktes eines Bogens,  $\widehat{P_i P'_k}$ , der aus einem Bogen  $\widehat{P_i P_k}$  von  $C$  durch Spiegelung hervorgeht, von irgend einem Punkte auf  $C$  höchstens sein kann.

Statt diese Feststellungen für  $C$  selbst zu machen, betrachte ich die konvexe Hülle  $c$  mit Ausschluß der Strecke, um die umgeklappt wird.  $O$  sei irgendein Punkt auf ihr. Er falle in den Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, die  $x$ -Achse sei Tangente an  $c$  in  $O$  und  $c$  liege in der oberen Halbebene.  $k$  sei der in der oberen Halbebene liegende Einheitskreis, der die  $x$ -Achse im Ursprung berührt, und  $K$  der zu  $k$  konzentrische Kreis vom Radius  $d - 1$ . Aus  $d \leq 4$  folgt  $d - 1 \leq 3$ . Ferner folgt aus den Hilfssätzen 2a und 3 S. 11; 14, daß *kein Punkt von  $c$  außerhalb des Kreises  $K$  liegen kann.* Da man nämlich von  $O$  aus in positivem und in negativem Sinn laufend auf  $C$  die Gerade  $y = 2$  erreichen muß, indem man außerhalb oder auf  $k$  bleibt, liegt einerseits sicher kein Punkt von  $c$  in  $k$ , andererseits schneidet jede Gerade durch den Mittelpunkt von  $k$   $c$  genau in zwei Punkten. Läge der eine der beiden außerhalb von  $K$ , so müßte er vom anderen einen Abstand haben, der größer wäre als  $d$ . Aber der Durchmesser von  $c$  ist gleich dem von  $C$ . Wenn aber  $c$  in  $K$  liegt, dann muß nach dem Hilfssatz 12 das Spiegelbild  $\widehat{P_i P'_k}$  eines Bogens  $\widehat{P_i P_k}$  bezüglich der Strecke  $\overline{P_i P_k}$  der konvexen Hülle  $c$  auch noch innerhalb von  $K$  liegen. Darum ist kein Punkt des Bogens  $\widehat{P_i P'_k}$  von  $O$  um mehr als  $d$  entfernt. Was für die Punkte der konvexen Hülle gilt, gilt natürlich um so mehr für die in ihrem Inneren gelegenen Punkte auf  $C$ , die in Betracht fallen. Man hat also

Hilfssatz 13: *Der Durchmesser der Kurve  $C_1$ , die aus  $C$  dadurch entsteht, daß ein Bogen  $\widehat{P_i P_k}$  der letzteren an der ihm im Sinne von Hilfssatz 10 zugeordneten Strecke  $\overline{P_i P_k}$  der konvexen Hülle  $c$  gespiegelt wird, hat den selben Durchmesser wie  $C$  selbst.*

Man erhält also durch die successiven Spiegelungen eine Folge von gleichlangen Kurven  $C_\nu$  und damit eine Folge von konvexen Hüllen  $c_\nu$ , die alle den Durchmesser  $d$  besitzen und so, daß die Längen der konvexen Hüllen die Länge von  $C$  als Grenzwert besitzen. Nun ist aber nach bekannten Sätzen<sup>8)</sup> die Länge einer konvexen Kurve vom Durchmesser  $d$  höchstens gleich  $d\pi$ . Daraus folgt mit Hilfe der Ungleichung III:

$$S_2(d) = S_1\left(\frac{d}{2}\right) = d \cdot \pi.$$

Es gilt also Satz 6. *Jede Kurve  $C$ , deren Durchmesser  $d \leq 4$  ist, ist höchstens gleich lang wie der Kreis mit dem Durchmesser  $\frac{d}{2}$ .* Es ist aber in diesem Fall nicht mehr so, daß nur der Kreis allein unter allen Vergleichskurven diese Länge wirklich hat. Sie wird von allen konvexen Vergleichskurven vom konstanten Durchmesser  $d$  angenommen. Die Bezeichnung „konstanter Durchmesser“ bedeutet dabei, daß es zu jedem Punkt auf  $C$  mindestens einen weiteren gibt, der von ihm den Abstand  $d$  hat.

#### § 4.

Auf S. 19 stellten wir fest, daß jede Kurve  $C$  mindestens einen Einheitskreis ganz enthalten muß und, wenn ihr Durchmesser mindestens 4 ist, deren zwei sich nicht schneidende. Durch diese Feststellungen sind untere Schranken für die Größe der von einer Kurve  $C$  eingeschlossenen Fläche gegeben. Daß eine solche Fläche immer quadrierbar ist, folgt übrigens leicht aus den Stetigkeitsvoraussetzungen bezüglich  $x(s)$ ,  $y(s)$  S. 16 und deren Derivierten. Das Ziel dieses Paragraphen ist, die genaue untere Schranke für die von einer Kurve  $C$  eingeschlossene Fläche als Funktion des Radius  $r_m$  des Umkreises bzw. des Durchmessers  $d$  zu bestimmen, also zwei Funktionen  $F_1(r_m)$  und  $F_2(d)$  zu ermitteln, so daß für die Fläche  $F(C)$  des Bereiches, welcher von irgendeiner Kurve  $C$  vom Umkreisradius  $r_m$  berandet wird, gilt

$$F(C) \geq F_1(r_m)$$

<sup>8)</sup> Vergl.: A. Rosenthal u. O. Szász, Jahresbericht d. deutschen Math. Ver. Bd. 25 (1917), S. 278 — 282.

und analog für den Inhalt  $F(C)$  irgendeines Bereiches, der von einer beliebigen Kurve  $C$  mit festem Durchmesser  $d$  begrenzt wird:

$$F(C) \geq F_2(d).$$

Zunächst sei  $r_m \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  bzw.  $d \leq 4$ . Die Funktion  $F_2(d)$  wird sich unmittelbar aus der Funktion  $F_1(r_m)$  ableiten. Nach Seite 31 des vorigen Abschnittes genügt ja der Radius  $r_m$  des Umkreises einer Kurve  $C$  vom Durchmesser  $d$  der Ungleichung  $\frac{d}{2} \leq r_m \leq \frac{d-2}{\sqrt{3}} + 1$ , und es ist außerdem zu erwarten, daß  $F_1(r_m)$  mit wachsendem  $r_m$  nicht abnimmt. Bestätigt sich diese Vermutung, so ist

$$F_2(d) = F_1\left(\frac{d}{2}\right).$$

Ich beweise zuerst drei Hilfssätze. Über die Kurven  $C$  und ihre Lage werden genau dieselben Voraussetzungen gemacht wie bei Hilfssatz 10 S. 25.  $P_1P_2, k_1, k_2, k_3$  und  $\psi_{12}$  haben dieselbe Bedeutung wie dort (Fig. 2, S. 35). Der Mittelpunkt des Umkreises  $K_m$  liege in der oberen Halbebene, und er berühre mindestens den einen der beiden Kreise  $k_1$  oder  $k_2$  nicht. Nun werden  $k_1$  und  $k_2$  oder nur  $k_1$ , wenn  $k_2$  berührt wird, bzw.  $k_2$ , wenn  $k_1$  berührt wird, längs der  $x$ -Achse nach außen verschoben, bis es zur Berührung mit  $K_m$  kommt. In dieser neuen Lage sollen sie mit  $k_1^*$  bzw.  $k_2^*$  bezeichnet werden.  $P_1^*$  bzw.  $Q_1^*$  seien die Berührungspunkte von  $k_1^*$  mit der  $x$ -Achse bzw. mit dem Kreise  $K_m$ , und  $P_2^*$  bzw.  $Q_1^*$  haben die analoge Bedeutung für  $k_2^*$ . Ferner seien  $k_3^*$  und  $\psi_{12}^*$  die Analoga zu  $k_3$  und  $\psi_{12}$  oben. Nun betrachte ich folgende zwei Kurven  $C$ :

1.  $C_1$ , die von  $P_1$  aus im positiven Sinn durchlaufen sukzessive aus den folgenden Bögen besteht:  $\psi_{12}, \xrightarrow{P_2P_2^*}, \widehat{P_2^*Q_2^*}$  auf  $k_2^*(p), \widehat{Q_2^*Q_1^*}$  auf  $K_m(p), \widehat{Q_1^*P_1^*}$  auf  $k_1^*(p)$  und  $\xrightarrow{P_1^*P_1}$ .

2.  $C_1^*$  von  $P_1^*$  aus in positivem Sinn durchlaufen aus  $\psi_{12}^*$  und von  $P_2^*$  aus wie  $C_1$ . Nach Hilfssatz 10 hat  $\widehat{P_1P_2}$  auf  $C$  keinen Punkt in  $C_1$  und  $C_1$  nach dem gleichen Hilfssatz keinen Punkt in  $C_1^*$ . Darum gilt

Hilfssatz 14: *Der Bogen  $\widehat{P_1P_2}$  auf  $C$  schneidet den Bogen  $\widehat{Q_1^*Q_2^*}$  auf  $C_1^*$  (von  $Q_1^*$  aus auf  $C_1^*$  in positivem Sinn durchlaufen) nirgends und liegt teilweise außerhalb von  $C_1^*$ .*

Jetzt gehe man von  $Q_2^*$  aus im positiven Sinn auf  $K_m$  zu einem Punkt  $Q_2^{**}$  über, der so liege, daß der Bogen  $Q_1^* Q_2^* Q_2^{**}$  nicht länger als  $r_m \pi$  sei. Sei  $k_2^{**}$  der  $K_m$  in  $Q_2^{**}$  von innen berührende Einheitskreis, und  $k_3^{**}$  derjenige Einheitskreis, welcher  $k_1^*$  und  $k_2^{**}$  in analoger Weise berührt, wie  $k_3^* k_1^*$  und  $k_2^*$ . Hierauf werde aus Bogen von  $k_1^*$ ,  $k_3^{**}$ ,  $k_2^{**}$  und  $K$  die  $C_1^*$  entsprechende Kurve  $C_1^{**}$  konstruiert. Es gilt

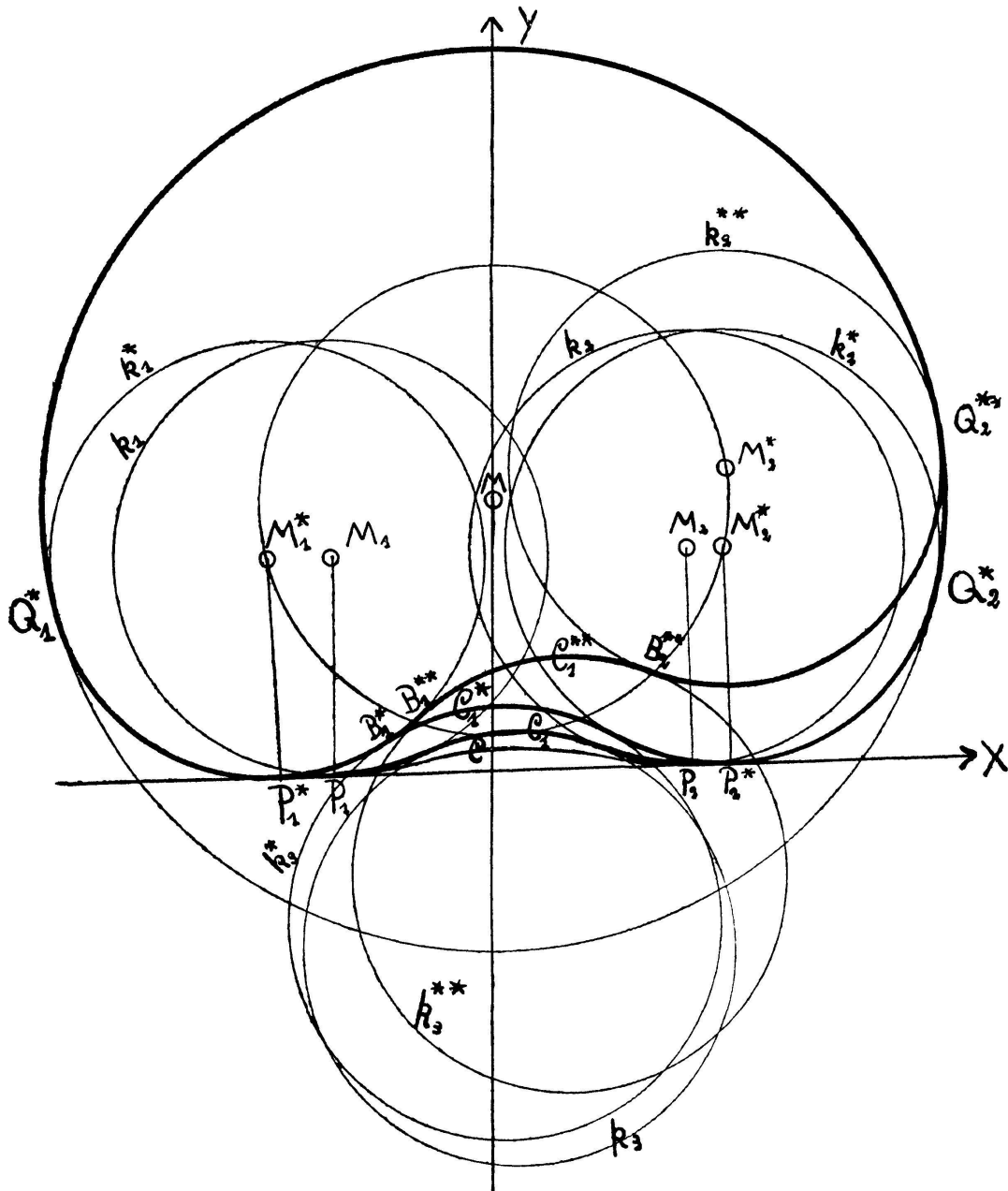
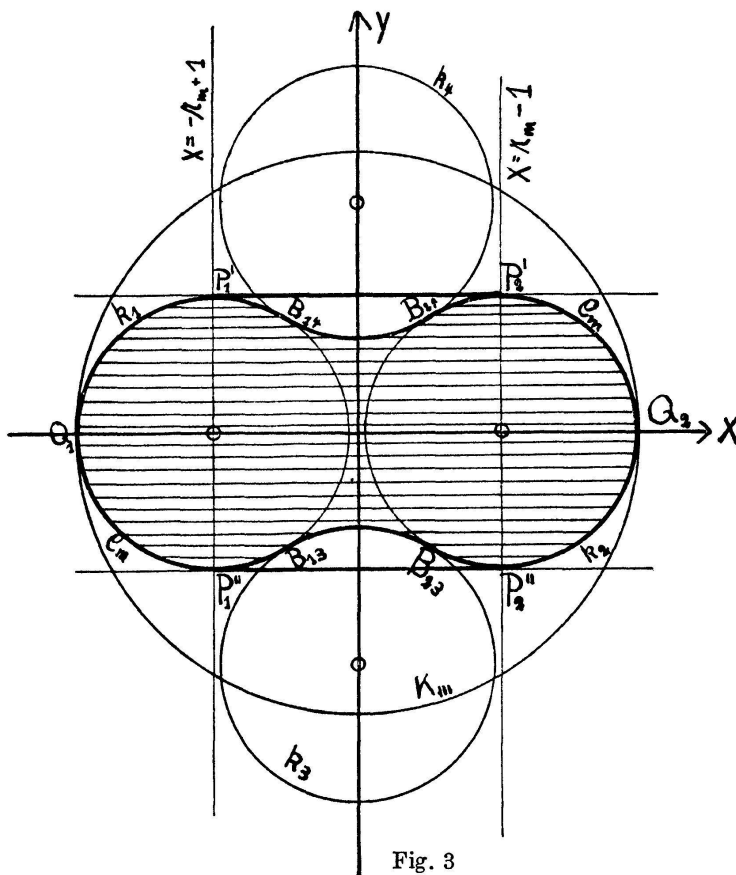


Fig. 2

Hilfssatz 15: Kein Punkt von  $C_1^*$  liegt im Innern von  $C_1^{**}$ . Dann liegt auch kein Punkt von  $C_1$  und keiner von  $P_1 P_2$  (Hilfssatz 14) in  $C_1^{**}$ .

Seien  $B_1^*$  bzw.  $B_2^*$  die Berührungspunkte von  $k_1^*$  und  $k_3^*$  bzw. von  $k_2^*$  und  $k_3^*$ ,  $B_1^{**}$  bzw.  $B_2^{**}$  diejenigen von  $k_1^{**}$  und  $k_3^{**}$  bzw. von  $k_2^{**}$  und  $k_3^{**}$ .  $C_1^*$  fällt

mit Ausnahme des in positivem Sinn durchlaufenden Bogens  $\widehat{B_1^* Q_2^{**}}$  mit  $C_1^*$  zusammen.  $\widehat{B_1^* B_1^{**}}$  liegt im Innern von  $C_1^*$ . Der Kreis  $k_2^{**}$  schneidet sowohl  $k_1^*$  als  $k_2^*$ , wenn schon, dann innerhalb von  $C_1^*$  und  $k_3^*$  überhaupt nicht; also müßte der Bogen  $\widehat{B_1^{**} B_2^{**}}$  auf  $k_3^*$   $C_1^*$  zweimal schneiden, wenn Hilfssatz 15 nicht wahr wäre. Aber der erste Schnittpunkt von  $k_3^{**}$  mit  $k_3^*$  wird bei Durchlaufung des Kreises  $k_3^{**}$  von  $B_1^{**}$  aus in negativem Sinn erst nach  $B_2^{**}$  getroffen. Würde andererseits  $\widehat{B_1^{**} B_2^{**}}$  auf  $k_3^*$  ( $\varphi$ )  $k_2^*$  zweimal schneiden und zwischen den Schnittpunkten im Äußern von  $k_2^*$  verlaufen, so müßte der Bogen länger sein als  $\pi$ , was nicht möglich ist.



Ist der Bogen  $\widehat{Q_1^* Q_2^* Q_2^{**}}$  nicht gleich  $r_m \pi$ , so kann man weiterhin von  $Q_1^*$  auf  $K_m$  im negativen Sinn zu Punkten  $Q_1^{**}$  gelangen, so daß  $\widehat{Q_1^{**} Q_1^* Q_2^* Q_2^{**}}$  immer noch höchstens gleich  $r_m \pi$  ist. Man konstruiere dann analog zum Vorhergehenden den Kreis  $k_1^{**}$  und zu  $k_1^*$  und  $k_2^*$   $k_3^{**}$ , ferner aus ihnen und  $K_m$  die Kurve  $C_1^{***}$ . Es folgt wie eben

Hilfssatz 16: Kein Punkt von  $C_1^{**}$ ,  $C_1^*$ ,  $C_1$  und somit von  $\widehat{P_1^* P_2^*}$  des Hilfssatzes 14 kann im Innern von  $C_1^{***}$  liegen.

Auf Grund dieser Hilfssätze wird jetzt in zwei Schritten die genaue untere Schranke  $F_1(r_m)$  bestimmt, und diejenige Kurve  $C_m$  ermittelt, welche genau die Fläche mit dieser Schranke als Inhalt begrenzt.

Um die Punkte  $-r_m + 1$  und  $r_m - 1$  der  $x$ -Achse werden die Einheitskreise  $k_1$  und  $k_2$  geschlagen (Fig. 3).  $K_m$  hat dann seinen Mittelpunkt im Ursprung und geht durch die Punkte  $Q_1 = (-r_m, 0)$  und  $Q_2 = (r_m, 0)$ .  $k_3$  und  $k_4$  seien die Einheitskreise, welche  $k_1$  und  $k_2$  gleichzeitig berühren, und der Mittelpunkt von  $k_3$  liege auf der negativen, derjenige von  $k_4$  auf der positiven  $y$ -Achse.  $B_{13}$  und  $B_{23}$  seien die Berührungspunkte von  $k_3$  mit  $k_1$  und  $k_2$ ;  $B_{14}$  und  $B_{24}$  die entsprechenden Berührungspunkte zwischen  $k_4$  und  $k_1$  bzw.  $k_2$ . Die geschlossene Kurve  $C_m$  setze sich von  $B_{13}$  aus in positivem Sinn durchlaufen successive aus den folgenden Bögen zusammen:  $\widehat{B_{13}B_{23}}$  auf  $k_3$  ( $n$ )  $\widehat{B_{23}B_{24}}$  auf  $k_2$  ( $p$ )  $\widehat{B_{24}B_{14}}$  auf  $k_4$  ( $n$ ) und schließlich  $\widehat{B_{14}B_{13}}$  auf  $k_1$  ( $p$ ).

Sei  $C$  eine beliebige Vergleichskurve, die durch  $Q_1$  und  $Q_2$  geht. Da sie von  $Q_1$  und von  $Q_2$  aus in beiderlei Sinn durchlaufen nach Hilfssatz 1  $C_m$  nicht schneiden kann, ehe sie die Geraden  $x = -r_m + 1$  erreicht, liegt  $C_m$  im Innern der konvexen Hülle  $c$  von  $C$ .  $\overline{P_i P_k}$  sei eine beliebige Strecke von  $c$ , und  $\widehat{P_i P_k}$  der ihr im Sinne von Hilfssatz 10 entsprechende Bogen auf  $C$ . Dann kann man in den Hilfssätzen 14, 15 und 16  $Q_1^{**}$  bzw.  $Q_2^{**}$  durch  $Q_1$  bzw.  $Q_2$  ersetzen, und die vier Kurven  $C_1$   $C_1^*$   $C_1^{**}$  und  $C_1^{***}$  konstruieren, die alle  $C_m$  enthalten, so daß also der Bogen  $\widehat{P_i P_k}$  keinen Punkt in  $C_m$  haben kann. Da die konvexe Hülle  $c$  keine Punkte in  $C_m$  hat, ist es auch nicht möglich, daß ein Bogen von  $C$ , der der konvexen Hülle  $c$  angehört, ganz oder teilweise in  $C_m$  liegt. Damit ist

**Satz 7a:** *Kein Punkt auf irgendeiner durch  $Q_1$  und  $Q_2$  gehenden Vergleichskurve  $C$  liegt im Innern von  $C_m$  bewiesen.*

$Q_1, Q_2, Q_3$  (Fig. 4) seien drei Punkte auf  $K_m$ , die in dieser Reihenfolge in positivem Sinn aufeinander folgen, und Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks sind.  $k_1, k_2$  und  $k_3$  seien die dort  $K_m$  von innen berührenden Einheitskreise,  $t_1, t_2, t_3$  die gemeinsamen Tangenten an  $k_1, k_2$  und  $k_3$ , welche ein Dreieck  $D_3$  bestimmen, das die drei Kreise im Innern enthält. Dabei ist  $t_1$  die Tangente an  $k_1$  und  $k_2$  usf.  $k'_1, k'_2, k'_3$  seien die Einheitskreise, welche gleichzeitig  $k_1$  und  $k_2, k_2$  und  $k_3, k_3$  und  $k_1$  in den Punkten  $B_1^*, B_2^*; B_2^*, B_3^*; B_3^*, B_1^*$  berühren, und deren Mittelpunkte außerhalb des Dreiecks  $D_3$  liegen. Die geschlossene Kurve  $C'$  setze sich

von  $B_1^*$  aus im positiven Sinn durchlaufen aus den Bögen  $\widehat{B_1^* B_2}$  auf  $k'_1(n)$ ,  $\widehat{B_2 B_2^*}$  auf  $k_2(p)$ ,  $\widehat{B_2^* B_3}$  auf  $k'_2(n)$ ,  $\widehat{B_3 B_3^*}$  auf  $k_3(p)$ ,  $\widehat{B_3^* B_1}$  auf  $k'_3(n)$  und  $\widehat{B_1 B_1^*}$  auf  $k_1(p)$  zusammen.

$C$  sei eine beliebige durch  $Q_1, Q_2$  und  $Q_3$  gehende Vergleichskurve und  $c$  ihre konvexe Hülle.  $c$  enthält  $C'$ ; denn nach Hilfssatz 1 muß  $C$  bis zu den

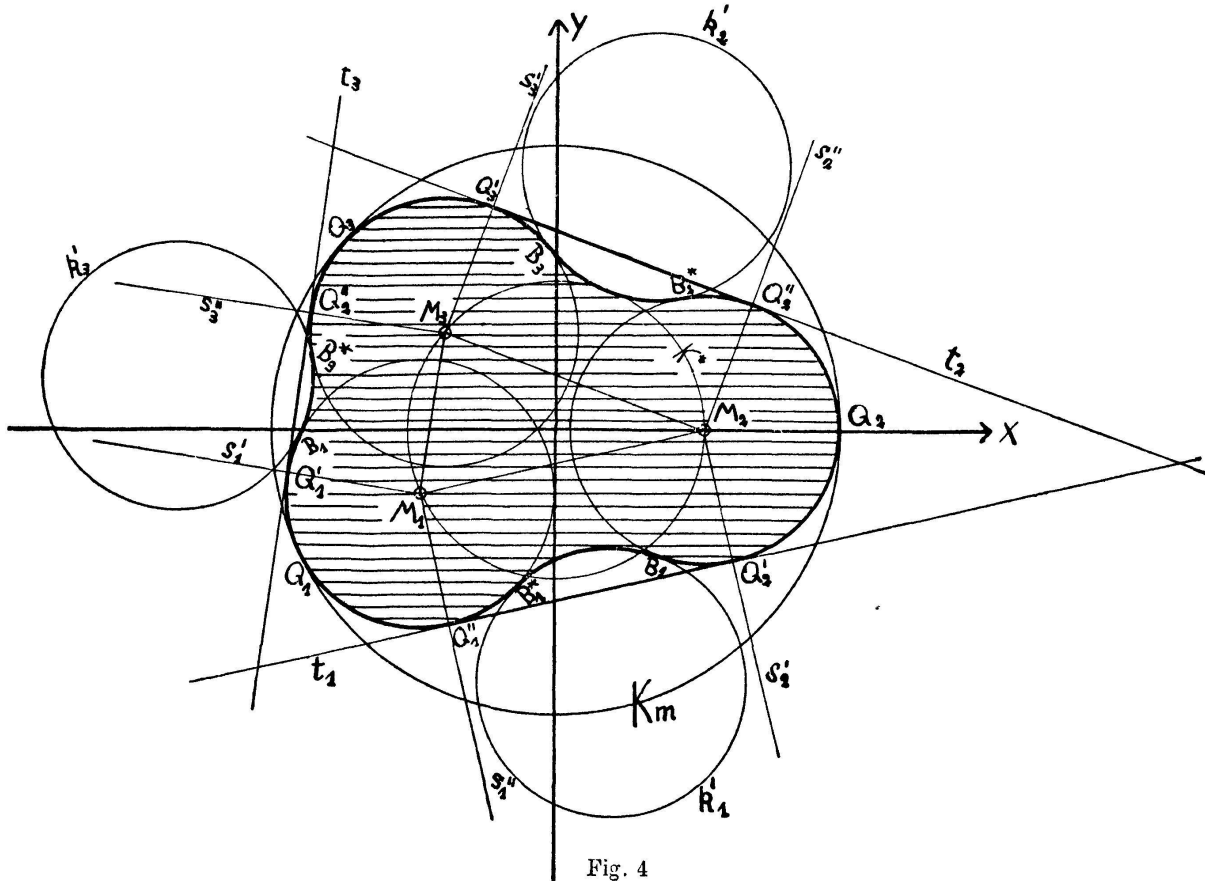


Fig. 4

ersten Schnittpunkten mit den von den Mittelpunkten der  $k_i (i = 1, 2, 3)$  nach den Berührungspunkten  $B_i, B_i^*$ , gezogenen Strahlen auf den Kreisen oder außerhalb verlaufen. Daher kann kein Bogen von  $C$ , welcher der konvexen Hülle  $c$  angehört, Punkte innerhalb von  $C'$  haben.

Sei  $\widehat{Q_1 Q_2}$  der in positivem Sinn auf  $c$  durchlaufene Bogen,  $\overline{P_i P_k}$  irgend eine seiner Strecken und  $\widehat{P_i P_k}$  der ihr in üblichem Sinn zugeordnete Bogen auf  $C$ . Wieder kann man, indem man in den Hilfssätzen 14, 15 und 16  $P_1$  und  $P_2$  durch  $P_i$  und  $P_k$  ersetzt, die Folge  $C_1, C_1^* C_1^{**}, C_1^{***}$  konstruieren, so daß  $C_1^{***} C'$  enthält (es ist dabei  $Q_1^{**} = Q_1$  und  $Q_2^{**} = Q_2^*$ ). Damit kann aber nach den Hilfssätzen 14, 15 und 16 kein Punkt von  $\widehat{P_1 P_2}$  auf  $C$  in  $C'$  liegen. Daraus folgt

**Satz 7b:** *Jeder Punkt, der durch die Punkte  $Q_1, Q_2$  und  $Q_3$  gehenden Vergleichskurve  $C$  liegt auf oder außerhalb von  $C'$ .*

Wir müssen also, um die Schranke  $F_1(r_m)$  zu bestimmen, nur den Inhalt von  $C'$  für beliebige Lage der Punkte  $Q_1, Q_2, Q_3$  ermitteln und die untere Schranke dieses Inhaltes aufsuchen. Seien  $M_1, M_2, M_3$  die Mittelpunkte von  $k_1, k_2, k_3$  und  $\overline{M_1 M_2} = l_1, \overline{M_2 M_3} = l_2, \overline{M_3 M_1} = l_3$ .

Dann ergibt eine kurze Rechnung den Inhalt  $F(C')$  des von  $C'$  begrenzten Bereiches als

$$F(C') = \pi + \frac{1}{2} \sum_1^3 l_i \sqrt{4 - \frac{l_i^2}{4}} + \Delta M_1 M_2 M_3.$$

Es ist aber für

$$l_i < 2(r_m - 1) \quad \text{für } i = 1, 2, 3$$

und

$$\sum_1^3 l_i > 4(r_m - 1)$$

denn Dreieck  $M_1 M_2 M_3$  ist spitzwinklig und dem Kreis vom Radius  $r_m - 1$  einbeschrieben. Daraus folgt:

$$\text{IV} \quad F(C') > \pi + 2(r_m - 1) \sqrt{4 - (r_m - 1)^2}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist aber gerade der Inhalt des von der Kurve  $C_m$  begrenzten Bereiches, wie man durch eine kurze Rechnung feststellt. Damit gilt

*Satz 7: Alle Kurven  $C$  vom festen Umkreisradius  $r_m \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  mit Ausnahme der im Vorangehenden als  $C_m$  bezeichneten begrenzen einen Bereich, dessen Inhalt größer ist als  $\pi + 2(r_m - 1) \sqrt{4 - (r_m - 1)^2}$ ; der von  $C_m$  begrenzte Bereich hat genau diesen Inhalt.*

Die genaue untere Schranke  $F_1(r_m) = \pi + (r_m - 1) \cdot 2 \sqrt{4 - (r_m - 1)^2}$  ist nach  $r_m$  differenzierbar, und der Differentialquotient ist

$$\frac{d F_1(r_m)}{d r_m} = \frac{4(2 - (r_m - 1)^2)}{\sqrt{4 - (r_m - 1)^2}} > 0 \quad \text{für } r_m \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Die untere Schranke wächst mit wachsendem  $r_m$ . Nach den Bemerkungen S. 34 ist also die untere Schranke

$$F_2(d) = \pi + (d - 2) \sqrt{4 - \left(\frac{d - 2}{2}\right)^2} \quad \text{für } d \leq 4$$

insbesondere  $F_2(4) = \pi + 2\sqrt{3}$ . Damit ist

*Satz 8 bewiesen. Alle Kurven  $C$  vom festen Durchmesser  $d \leq 4$  mit einer einzigen Ausnahme begrenzen einen Bereich, dessen Inhalt größer ist als*

$\pi + (d - 2) \sqrt{4 - \left(\frac{d-2}{2}\right)^2}$ . Diese Ausnahme ist die im vorigen Satz als  $C_m$  bezeichnete Kurve.

• Jetzt bleibt noch die untere Schranke  $F_2(d)$  für alle diejenigen Bereiche zu ermitteln, die von Kurven  $C$  mit festem Durchmesser  $d > 4$  begrenzt werden. Da jede Kurve  $C$ , deren Umkreisradius  $r_m > 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  ist, einen Durchmesser  $d > 4$  hat, ist zu erwarten, daß sich  $F_1(r_m)$  für  $r_m > 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  aus  $F_2(d)$  bestimmen läßt.

Zu jedem  $d > 2(1 + \sqrt{3})$  ist es leicht, Kurven  $C$  derart anzugeben, daß der von ihnen begrenzte Bereich einen Flächeninhalt hat, der  $F_2(4) = \pi + 2\sqrt{3}$  beliebig wenig übertrifft\*). Ich werde jetzt beweisen, daß  $F_2(d) \equiv \pi + 2\sqrt{3}$  ist für alle  $d \geq 4$ .

Nach Satz 3, S. 19 enthält jede Kurve  $C$  mit  $d > 4$  mindestens zwei Einheitskreise, die sich nicht schneiden. Sei  $k_1$  der eine von ihnen. Er berühre  $C$  im Punkte  $O$ , der mit dem Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems zusammenfalle. Die  $x$ -Achse sei Tangente an  $C$  in  $O$ , und der Mittelpunkt von  $k_1$  liege auf der positiven  $y$ -Achse.  $K^*$  sei der zu  $k_1$  konzentrische Kreis vom Radius  $\sqrt{3}$ .

Ein beweglicher Punkt  $P$  durchlaufe  $C$  von  $O$  aus in positivem Sinne und treffe  $K^*$  zum erstenmal in  $Q_1$ . Bezüglich des Bogens  $\widehat{OQ_1}$  gilt

Hilfssatz 17: *Kein vom Mittelpunkt  $M_1 = (0, 1)$  von  $K^*$  ausgehender Strahl ist Tangente in einem innern Punkte von  $\widehat{OQ_1}$ .*

Angenommen, dies wäre für einen Punkt  $P'$  der Fall. Dieser läge im Innern des Kreisringes zwischen  $K^*$  und  $k_1$ . Aber die zwei Einheitskreise, welche einen Radius von  $K^*$  in einem inneren Punkt dieses Kreises beiderseits berühren, schneiden beide  $k_1$ . Mit Hilfe von Hilfssatz 1 schließt man sofort, daß dies dann auch der Bogen  $\widehat{OQ_1}$  tun müßte, was der Voraussetzung widerspricht.

*Denkt man sich also einen immer durch  $M_1$  gehenden Strahl vom beweglichen Punkt mitgeführt, so muß er sich ständig gegen den Uhrzeigersinn um  $M_1$  drehen, während  $P$  den Bogen  $\widehat{OQ_1}$  durchläuft.*

\*) Vergl. Beisp. 1.

Unter  $s_1$  verstehe ich den Strahl von  $M_1$  aus durch  $Q_1$  und der Vektor  $\overrightarrow{M_1 Q_1}$  lege auf ihm die positive Richtung fest. Die  $s_1$  in  $Q_1$  von rechts und links berührenden Einheitskreise werden  $k'_1$  und  $k''_1$  genannt, und ihre Berührungspunkte mit  $k_1$   $Q'_1$  und  $Q''_1$ . Es werde nun die geschlossene Kurve  $\Phi_1$  ins Auge gefaßt, die von  $Q'_1$  aus in positivem Sinn durchlaufen successive aus den folgenden Bögen besteht:

$\widehat{Q'_1 Q_1}$  auf  $k'_1$  ( $n$ )  $\widehat{Q_1 Q''_1}$  auf  $k''_1$  ( $n$ )  $\widehat{Q''_1 Q'_1}$  auf  $k_1$  ( $p$ ). Es gilt:

Hilfssatz 18: Die Kurve  $C$  hat keinen Punkt im Innern von  $\Phi_1$ . Wäre das Gegenteil wahr, so müßte  $C$  entweder längs  $\widehat{Q'_1 Q_1}$  oder längs  $\widehat{Q_1 Q''_1}$  ins Innere von  $\Phi_1$  eindringen. Ich beweise zunächst, daß dies längs  $\widehat{Q'_1 Q_1}$  nicht möglich ist. Fällt die Tangente an  $C$  in  $Q_1$  mit  $s_1$  zusammen, so muß nach Hilfssatz 1 und Zusatz 1  $\widehat{Q'_1 Q_1}$  auf  $\widehat{OQ_1}$  liegen. Liegt die Tangente anders, so schließt die positive Richtung auf  $s_1$  mit dem positiven Tangentenvektor an  $C$  in  $Q_1$  einen Winkel ein, der vom ersten zum zweiten entgegen dem Uhrzeigersinn gemessen höchstens  $\frac{\pi}{2}$  ist. Jetzt werde  $\widehat{OQ_1}$  von  $Q_1$  aus im negativen Sinn durchlaufen. Trifft man den Strahl  $s'_1$  von  $M_1$  durch  $Q'_1$ , ehe man den Bogen  $\widehat{Q'_1 Q_1}$  auf  $k'_1$  getroffen hat, so kann  $\widehat{OQ_1}$  diesen Bogen überhaupt nicht schneiden und die Behauptung des Hilfssatzes ist richtig. Andernfalls gibt es einen ersten Punkt  $R'$  auf dem Bogen,  $\widehat{Q'_1 Q_1}$ , den man erreicht.  $\widehat{OQ_1}$  muß nach Hilfssatz 1  $\widehat{Q'_1 Q_1}$  dort schneiden. Die Tangente an  $C$  in  $R'$  liegt nach Hilfssatz 17 im spitzen Winkel zwischen dem Strahl von  $M_1$  durch  $R'$  und der Tangente an  $k'_1$  in  $R'$ . Daher schneiden die beiden  $C$  in  $R'$  berührenden Einheitskreise den Kreis  $k_1$ , und  $\widehat{OQ_1}$  muß ins Innere von  $k_1$  eintreten, was gegen die Voraussetzung ist. Der Bogen  $\widehat{OQ_1}$  hat also keine Punkte innerhalb von  $\Phi_1$ .

Nun laufe  $P$  in positiver Richtung über  $Q_1$  hinaus weiter. Würde er später ins Innere von  $\Phi_1$  eintreten, so könnte das nur längs  $\widehat{Q_1 Q''_1}$  (exklusive  $Q_1$ ) der Fall sein.  $R'' \neq Q''_1$  sei der erste gemeinsame Punkt von  $C$  und  $\widehat{Q_1 Q''_1}$ , den man auf diesem Wege erreicht,  $s''$  der Strahl von  $M_1$  durch  $R''$ ,  $t''$  die Tangente an  $k''_1$  in  $R''$ .  $C$  muß wegen Hilfssatz 1  $\widehat{Q_1 Q''_1}$  in  $R''$  schneiden. Daher liegt die Tangente an  $C$  in  $R''$  entweder im spitzen Winkelraum zwischen  $t''$  und  $s''$  — dann schneiden aber die

rechts und links berührenden Einheitskreise beiden den Kreis  $k_1$ , und  $C$  hätte nach Hilfssatz 1 Punkte im Innern von  $k_1$  — oder sie liegt im stumpfen Winkelraum. Wenn auch in diesem Fall beide Berührungskreise den Kreis  $k_1$  schneiden, dann muß es auch  $C$  tun. Andernfalls könnte es  $s_1$  außerhalb von  $k_1$  schneiden. Dann müßte die Kurve aber den Überlegungen für Hilfssatz 17 zufolge  $OQ_1$  schneiden oder zum zweitenmal durch  $O$  gehen, was gegen die Voraussetzung geht. Ginge  $C$  durch  $Q_1''$  so müßte die Kurve entweder auf  $k_1$  weiterlaufend durch  $Q_1'$  gehen oder längs  $\widehat{Q_1 Q_1'}$  ins Innere der geschlossenen Kurve  $\varphi^*$  eintreten, die der Reihe nach aus den Bögen  $\widehat{OQ_1}$  auf  $C$  ( $p$ ),  $\widehat{Q_1 Q_1'}$  auf  $k_1'$  ( $p$ ),  $\widehat{Q_1' O}$  auf  $k_1$  ( $n$ ) besteht (Hilfssatz 1). In beiden Fällen müßte sie dann aber nach den Überlegungen S. 41 entweder ein zweites Mal durch  $O$  gehen oder  $\widehat{OQ_1}$  oder  $\widehat{Q_1' O}$  schneiden, was gegen die Voraussetzungen ist.

Damit ist der Hilfssatz 18 bewiesen.

Analog entspricht einem von  $O$  aus im negativen Sinn laufenden beweglichen Punkt eine geschlossene Kurve  $\Phi_1'$ .  $\Phi_1$  und  $\Phi_1'$  haben  $k_1$  gemeinsam. Die aufgesetzten Spitzen können entweder getrennt liegen oder sich in einem Punkte schneiden.

Geht man bezüglich des zweiten in  $C$  liegenden Einheitskreises,  $k_2$ , welcher  $C$  ebenfalls berühren soll, genau so vor wie bezüglich  $k_1$ , so erhält man zwei weitere  $\Phi_1$  und  $\Phi_1'$  entsprechende zu ihnen kongruente geschlossene Kurven  $\Phi_2$  und  $\Phi_2'$ . Schneiden sich die Kreise  $K_1^*$  und  $K_2^*$  nicht ( $K_2^*$  ist konzentrisch zum Einheitskreis  $k_2$  und vom Radius  $\sqrt{3}$ ), so liegen  $\Phi_1$  und  $\Phi_1'$  von  $\Phi_2$  und  $\Phi_2'$  getrennt. Schneiden sie sich jedoch, so fassen wir  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  ins Auge. Die Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  von  $k_1$  und  $k_2$  sollen alsdann symmetrisch zum Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems auf der  $x$ -Achse liegen, und zwar  $M_1$  links. Es darf weder die Spitze  $Q_1$  von  $\Phi_1$  in  $\Phi_2$ , noch die Spitze  $Q_2$  von  $\Phi_2$  in  $\Phi_1$  liegen (Hilfssatz 18). Sollen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  innere Punkte gemeinsam haben, so müssen sich die Bogen  $\widehat{Q_1' Q_1 Q_1''}$  und  $\widehat{Q_2' Q_2 Q_2''}$  gegenseitig durchdringen. Daraus folgt, daß die Strecken  $\overline{M_1 Q_1}$  und  $\overline{M_2 Q_2}$  sich schneiden müssen,  $Q_1$  kann alsdann nicht auf der  $x$ -Achse liegen.  $P_1$  bzw.  $P_2$  seien diejenigen Punkte auf  $C$ , von welchen man bei der Konstruktion von  $\Phi_1$  und  $\Phi_1'$  bzw.  $\Phi_2$  und  $\Phi_2'$  ausging;  $R$  sei derjenige Teil des Kreisringes zwischen  $k_1$  und  $K^*$ , der von den Radien durch  $P_1$  und  $Q_1$  abgeschlossen wird und auf dessen Rand oder in dessen Inneren  $\widehat{P_1 Q_1}$  von  $P_1$  aus zunächst ver-

läuft<sup>9)</sup>.  $\widehat{P_1Q_1}$  kann nach Hilfssatz 18 außer  $Q_1$  keinen Punkt haben, der den geradlinigen Begrenzungsstücken oder dem Bogen auf  $K^*$  angehört.

Nun liege  $Q_1$  in der oberen Halbebene und  $\overline{M_1Q_1}$  schneide  $\overline{M_2Q_2}$ . Dann müßte auch der Bogen  $\widehat{P_1Q_1}$   $\overline{M_2Q_2}$  schneiden, d. h. er dränge ins Innere von  $\Phi_2$  ein. Das ist nach Hilfssatz 18 nicht erlaubt.

Läge  $Q_1$  in unterer Halbebene und schnitten sich  $\overline{M_1Q_1}$  und  $\overline{M_2Q_2}$ , so würde man analog schließen, daß  $\widehat{P_2Q_2}$  Punkte im Innern von  $\Phi_1$  haben müßte.  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  können also keine inneren Punkte gemeinsam haben. Genau so folgt, daß  $\Phi'_1$  und  $\Phi'_2$  keine inneren Punkte gemeinsam haben. Alle inneren Punkte von  $\Phi_1$ ,  $\Phi'_1$ ,  $\Phi_2$  und  $\Phi'_2$  sind auch innere Punkte von  $C$ . Es gilt aber für die Flächen  $F_1$  und  $F_2$  der von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  begrenzten Bereiche

$$F_1 = F_2 = \frac{\pi}{2} + \sqrt{3}.$$

Da auch  $\Phi'_1$  und  $\Phi'_2$  aus den gleichen Gründen getrennt liegen, und weder  $\Phi_1$  mit  $\Phi'_1$  noch  $\Phi_2$  mit  $\Phi'_2$  zusammenfallen kann, da sonst Doppelpunkte vorhanden wären, gilt für die Fläche  $F(C)$  des von  $C$  begrenzten Bereiches

$$F(C) > \pi + 2\sqrt{3}.$$

Im übrigen ist es einfach, zu jedem Durchmesser  $d > 4$  oder zu jedem Umkreis, vom Radius  $r_m > 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  Kurven  $C$  anzugeben, so daß der Inhalt des von ihnen begrenzten Bereiches dieser Schranke beliebig nahe kommt.

Beispiel 1: Es sei  $d > 2 + 2\sqrt{3}$  oder  $r_m > 1 + \sqrt{3}$ . Dann schlägt man um die Punkte  $-d + 1$  und  $d - 1$  auf der  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Einheitskreise  $k_1$  und  $k_2$  und zieht die Geraden  $y = \varepsilon$  und  $y = -\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ). Die Einheitskreise  $k'_1$  und  $k''_1$  sollen gleichzeitig  $k_1$  auf der rechten Hälfte in  $P'_1$  bzw.  $P''_1$  und  $y = -\varepsilon$  bzw.  $y = +\varepsilon$  in den Punkten  $Q'_1$  bzw.  $Q''_1$  berühren. Entsprechende Berührungen sollen die Einheitskreise  $k'_2$  und  $k''_2$  mit  $k_2$  und denselben Geraden

<sup>9)</sup> Ein durch  $M_1$  gehender Strahl, der bei der positiven Durchlaufung von  $P_1Q_1$  von einem beweglichen Punkt  $P$  mitgeführt wird, überstreicht einen Winkelraum, dessen Öffnung  $\alpha$  kleiner ist als  $\frac{11\pi}{6}$ . Die gegenteilige Annahme hat die Existenz von Doppelpunkten zur Folge, was man nach S. 41 einsieht, wenn man  $C$  von  $P_1$  aus in negativem Sinn durchläuft.

haben, nur mit dem Unterschied, daß  $k_2$  auf der linken Hälfte berührt wird. Die Kurve  $C$ , welche die behaupteten Eigenschaften besitzt, setzt sich von  $Q'_1$  aus in positivem Sinne durchlaufen sukzessive aus den folgenden Teilbögen zusammen:

$\overrightarrow{Q'_1 Q'_2}$ ;  $\widehat{Q'_1 P'_2}$  auf  $k'_2(n)$ ;  $\widehat{P'_2 P''_2}$  auf  $k_2(p)$ ;  $\widehat{P''_2 Q''_2}$  auf  $k''_2(n)$ ;  $\overrightarrow{Q''_2 Q''_1}$ ;  $\widehat{Q''_1 P''_1}$  auf  $k''_1(n)$ ;  $\widehat{P''_1 P'_1}$  auf  $k_1(p)$ ;  $\widehat{P'_1 Q'_1}$  auf  $k'_1(n)$ . Der Inhalt der Fläche, welche von einer derartigen Kurve begrenzt wird, geht mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $\pi + 2\sqrt{3}$ .

Beispiel 2. Der Umkreis  $K_m$  habe einen Radius  $r_m < 1 + \sqrt{3}$ . Um die Punkte  $M_1, M_2, M_6, M_7$  seien Einheitskreise geschlagen, um  $M_3, M_4, M_5$

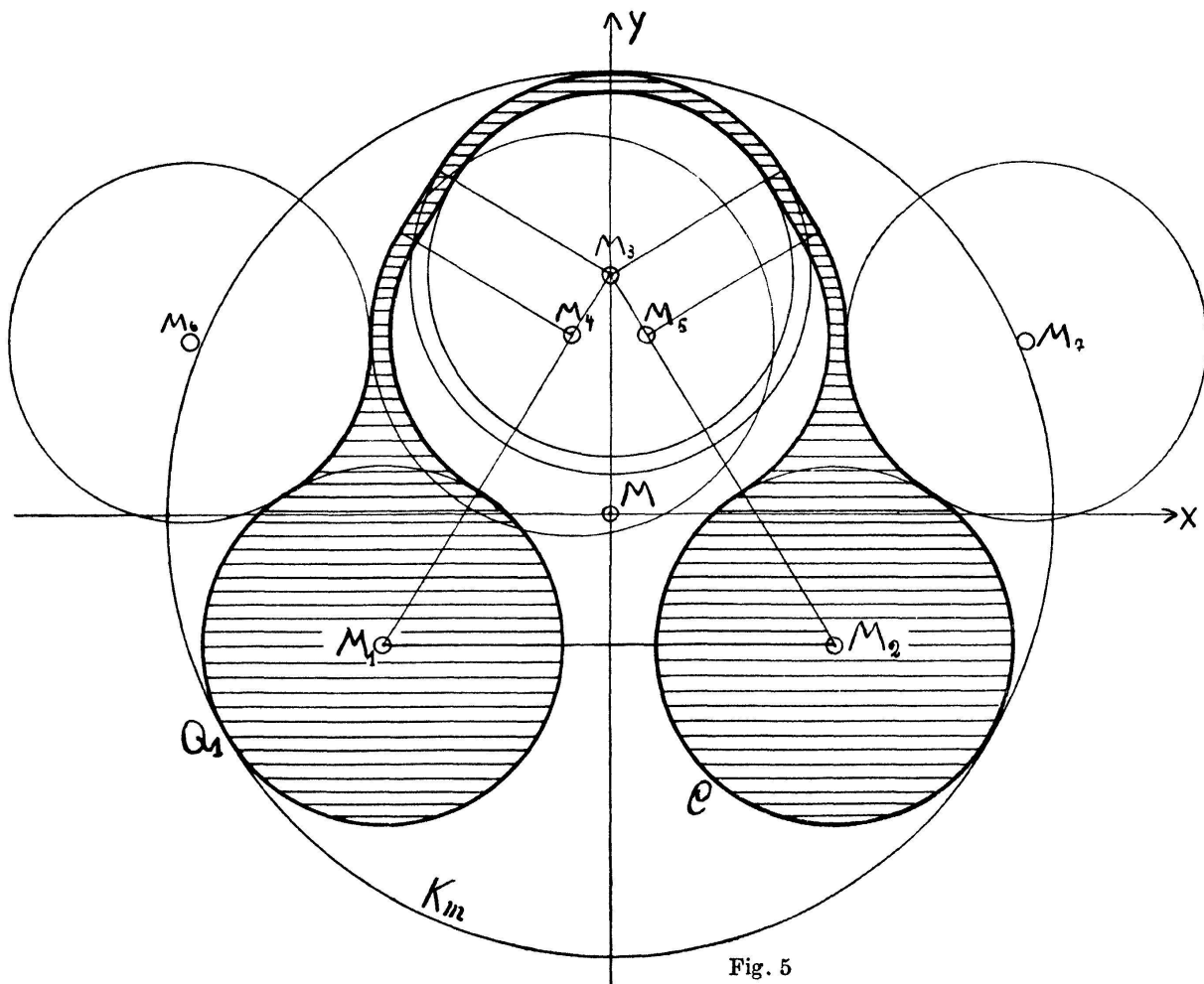


Fig. 5

ebenfalls und dazu solche vom Radius  $1 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ , klein), Fig. 5. Die Entstehung von  $C$  aus Bögen dieser Kreise und gemeinsamen Tangenten ist leicht zu überblicken. Auch sieht man unmittelbar, daß der Inhalt, des von  $C$  begrenzten Bereiches mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $\pi + 2\sqrt{3}$  geht.

Es gilt also Satz 9: *Unter allen Kurven  $C$  vom festen Durchmesser  $r_m > 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$  oder vom kleinsten Umkreisradius  $d > 4$  gibt es keine mit der Eigenschaft, daß der Inhalt des von ihr begrenzten Bereiches ein Minimum ist. Für diesen Inhalt existiert aber eine genaue untere Schranke, und diese ist für alle  $d$  und alle  $r_m$   $\pi + 2\sqrt{3}$ .*

### § 5.

Die Frage nach der kürzesten unter allen Kurven  $C$  mit festem Umkreis vom Radius  $r_m$  oder mit festem Durchmesser  $d$  ist leicht zu beantworten. Es gilt nämlich:

Satz 10: *Es gibt unter allen Kurven  $C$  mit festem Umkreis vom Radius  $r_m$  eine kürzeste, und diese hat die Länge  $2\pi + 4(r_m - 1)$ .*

*Ebenso existiert unter allen Kurven  $C$  vom festen Durchmesser  $d$  genau eine kürzeste. Ihre Länge ist  $2\pi + 2d - 4$ .*

Es genügt, wiederum den Beweis für festes  $r_m$  zu führen. Der Umkreisradius für Kurven mit festem Durchmesser durch die Ungleichungen III S. 31 festgelegt. Ferner ist, falls die obige Behauptung richtig ist, das Längenminimum für Kurven mit festem Umkreis eine mit  $r_m$  wachsende Funktion von  $r_m$ . Also hat man für ein festes  $d$  nur das Minimum für die Kurvenlänge im kleinstmöglichen Umkreis in Betracht zu ziehen, woraus sich dann sofort die Behauptung des Satzes 10 bezüglich des Durchmessers ergibt.

Der Beweis für die erste Behauptung des Satzes 10 vollzieht sich in zwei Schritten.

1. Ich setze voraus,  $C$  berühre den Umkreis  $K_m$  in den Endpunkten eines Durchmessers. Dieser liege mit dem Mittelpunkt im Ursprung auf der  $x$ -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Um die Punkte  $-r_m + 1$  und  $r_m - 1$  werden die Einheitskreise  $k_1$  und  $k_2$  geschlagen, und hierauf die Geraden  $y = +1$  und  $y = -1$  als gemeinsame Tangenten gezogen (Fig. 3, S. 36). Diese berühren  $k_1$  und  $k_2$  in den Punkten  $P'_1$  und  $P''_1$ ,  $k_2$  in den Punkten  $P'_2$  und  $P''_2$ . Die gesuchte kürzeste Kurve  $C_m^*$  setzt sich von  $P'_1$  aus in positivem Sinn durchlaufen successive aus den folgenden Bögen zusammen:  $\widehat{P'_1 P''_1}$  auf  $k_1$  ( $p$ ),  $\overrightarrow{P''_1 P''_2}$ ;  $\widehat{P''_2 P'_2}$  auf  $k_2$  ( $p$ ),  $\overrightarrow{P'_2 P'_1}$ .  $C_m^*$  hat die Länge  $2\pi + 4(r_m - 1)$ . Jede durch  $(-r_m, 0)$  und  $(r_m, 0)$  laufende Kurve  $C$  verläuft von diesen Punkten aus im positiven und im negativen Sinn bis zu ihren ersten Schnittpunkten  $Q''_1$  und  $Q'_1$  bzw.  $Q'_2$  und  $Q''_2$  mit den Geraden  $x = -r_m + 1$  bzw.  $x = r_m - 1$  auf oder außerhalb

von  $k_1$  bzw.  $k_2$  (Zusatz 1). Das Linienelement jedes der Bögen  $\widehat{Q'_i Q''_i}$  ( $i = 1, 2$ ) lautet in Polarkoordinaten von den Punkten  $(-r_m + 1, 0)$  bzw.  $(r_m - 1, 0)$  aus dargestellt:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 \quad (\rho \geq 1);$$

dasjenige auf den entsprechenden Kreisbögen  $d\sigma = d\omega$ .

Also ist

$$\int_0^\pi ds \geq \int_0^\pi d\omega = \pi;$$

gleich nur, wenn die Bögen von  $C$  auf den Kreisen liegen. Die Länge der Bögen  $\widehat{Q''_1 Q''_2}$  und  $\widehat{Q'_2 Q'_1}$  auf  $C$  ist einzeln genommen, sicher nicht kleiner als  $2(r_m - 1)$  und gleich nur, wenn sie zur  $x$ -Achse parallele Strecken sind, also ist die Länge jeder Kurve  $C$  durch  $(-r_m, 0)$  und  $(r_m, 0)$  sicher größer als  $2\pi + 4(r_m - 1)$ , wenn sie nicht mit der Kurve  $C_m^*$  zusammenfällt.

2. Die drei Punkte  $Q_1, Q_2, Q_3$  sollen bei positivem Umlauf auf  $K_m$  von  $Q_1$  aus in dieser Reihenfolge aufeinander folgen und Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks sein (Fig. 4, S. 38).  $k_1, k_2, k_3$  mit den Mittelpunkten  $M_1, M_2, M_3$  seien die drei Einheitskreise, die  $K_m$  in  $Q_1, Q_2, Q_3$  berühren und gleichzeitig in  $K_m$  liegen.  $M_1, M_2, M_3$  sind dann ebenfalls Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks; und dieses ist dem zu  $K_m$  konzentrischen Kreise  $K^*$  vom Radius  $r_m - 1$  einbeschrieben. Die drei gemeinsamen Tangenten  $t_1, t_2, t_3$  an je zwei der Kreise  $k_1, k_2, k_3$  sollen der Reihe nach den Strecken  $\overline{M_1 M_2}, \overline{M_2 M_3}, \overline{M_3 M_1}$  parallel laufen und ein Dreieck bestimmen, das die drei Kreise enthält. Ihre Berührungspunkte mit  $k_i$  sollen mit  $Q'_i$  und  $Q''_i$  in dem Sinn bezeichnet werden, daß der Umlauf um jeden der Kreise von  $Q'_i$  aus über  $Q_i$  nach  $Q''_i$  positiv ist. Man betrachtet alsdann die geschlossene Kurve  $C_m''$ , deren Teilbögen bei positivem Umlauf von  $Q_1$  aus der Reihe nach die folgenden sind:  $\widehat{Q_1 Q''_1}$  auf  $k_1$  ( $p$ ),  $\widehat{Q''_1 Q'_2}$  auf  $t_1$ ,  $\widehat{Q'_2 Q''_2}$  auf  $k_2$  ( $p$ ),  $\widehat{Q''_2 Q'_3}$  auf  $t_2$ ,  $\widehat{Q'_3 Q''_3}$  auf  $k_3$  ( $p$ ),  $\widehat{Q''_3 Q'_1}$  auf  $t_3$  und  $\widehat{Q'_1 Q_1}$  auf  $k_1$  ( $p$ ). Diese Kurve  $C_m''$  ist kürzer als irgendeine andere Vergleichskurve  $C$  durch  $Q_1, Q_2, Q_3$ . Das erkennt man analog wie unter 1., indem man von  $M_i$  aus die Strahlen  $s'_i$  und  $s''_i$  nach den  $Q'_i$  und  $Q''_i$  zieht ( $i = 1, 2, 3$ ). Die Bögen von  $Q_i$  aus nach den beiden Richtungen bis zu den ersten Schnittpunkten mit  $s'_i$  und  $s''_i$  sind für jedes  $i$  zusammen nicht kleiner als  $\pi - \alpha_i$ , wobei  $\alpha_i$  der Winkel des Dreiecks  $M_1 M_2 M_3$  in der Ecke  $M_i$  ist, und sicher größer, wenn die Bögen nicht auf den Kreisen

$k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) liegen. Die übrigen Bögen auf  $C$  sind zusammen nicht kleiner als der Umfang des Dreiecks  $M_1 M_2 M_3$ , also ist die Länge einer jeden von  $C'_m$  verschiedenen Kurve  $C$ , die durch  $Q_1, Q_2$  und  $Q_3$  geht, größer als  $2\pi +$  Umfang von Dreieck  $M_1 M_2 M_3$ . Letzterer aber ist größer als der doppelte Durchmesser von  $K^*$ . Somit ist die Länge einer jeden Vergleichskurve  $C$  auch diejenige von  $C'_m$  größer als  $2\pi + 4(r_m - 1)$ , was zu beweisen war.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß man etliche von den für die geschlossenen Kurven  $C$  abgeleiteten Resultate ohne Mühe auf einfache geschlossene Flächen übertragen kann. Man hat dabei bezüglich der Stetigkeit und Glattheit dieselben Voraussetzungen zu machen und entweder die beiden Hauptkrümmungen als stückweise stetig und gleichartig beschränkt vorauszusetzen, oder der Gauß'schen Krümmung entsprechende Voraussetzungen aufzuerlegen.

(Eingegangen den 6. März 1935.)