Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1935-1936)

Artikel: Zur Theorie der Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung.
Autor: Grötzsch, Herbert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9303

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Theorie der Verschiebung bei schlichter konformer Abbildung

Von Herbert Grötzsch, Leipzig

Über die älteren, sozusagen klassisch gewordenen Existenzsätze hinausgehend, beschäftigen sich neuere Untersuchungen mit dem genauen Mechanismus der *Geometrie der konformen Abbildung*, im besonderen mit Wertannahmeproblemen bei speziellen Klassen von schlichten konformen Abbildungen eines vorgegebenen schlichten Bereiches. In dieser Arbeit handelt es sich im wesentlichen um die sog. sternigen Abbildungen des schlichten Bereiches $|z| > 1$ der z-Ebene, der kurz mit B bezeichnet wird.

Durch $w = f(z)$ mit der Entwicklung $w = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots z + ((0))$ werde B eineindeutig konform auf einen schlichten Bildbereich $\tilde{B}$ der w-Ebene abgebildet. Wenn im besonderen die Berandung $\tilde{R}$ von $\tilde{B}$ sternig in bezug auf $w = 0$ ist, d. h. wenn mit zwei beliebigen, im Endlichen gelegenen, der Bedingung $\arg w_1 \equiv \arg w_2 \bmod 2\pi$ genügenden inneren Punkten w_1 und w_2 von B auch die ganze gerade Strecke mit w_1 und w_2 als Endpunkten zum Innern von $\tilde{B}$ gehört, heißt eine solche normierte schlichte konforme Abbildung von B sternig normiert konform, kurz *sternig*; $w = 0$ liegt dann notwendig auf $\tilde{R}$ oder wird von $\tilde{R}$ umschlossen. Bekanntlich ist dann auf jedem Kreise $|z| = 1 + p (p > 0)$ $\arg w$ monoton veränderlich. Über die Geometrie der sternigen Abbildungen von $|z| > 1$ werden im folgenden die nachstehenden Sätze von elementarer anschaulich-geometrischer Natur bewiesen:

Satz 1 (Hilfssatz): Wird $|z| > 1$ durch $w = f(z)$ sternig abgebildet, dann hat bei beliebigem a mit $|a| = 1$ und beliebigem komplexem b die Gleichung $f(z) : \left(z + \frac{a}{z}\right) = b$ höchstens zwei Wurzeln z mit absolutem Betrage > 1, ausgenommen den Fall, daß $f(z) = z + \frac{a}{z}$ und zugleich $b = 1$ ist, wo die Gleichung zur Identität wird; d. h. die Bildfläche, auf die $f(z) : \left(z + \frac{a}{z}\right)$ B konform abbildet, ist höchstens zweiblättrig (im Ausnahmefalle reduziert sie sich auf den Punkt 1).

Satz 2 (Verschiebungssatz für sternige Abbildungen von $|z| > 1$): Sei z_1 ein beliebiger innerer, dann festzuhaltender Punkt $\neq \infty$ von B. Dann liegt bei jeder sternigen Abbildung von B der Bildpunkt $w_1 = f(z_1)$ von

z_1 auf der abgeschlossenen Kreisfläche $K(z_1) \equiv \left\{ |w_1 - z_1| \leqq \frac{1}{|z_1|} \right\}$. Ein Punkt $z_1 + \frac{a}{|z_1|}$ ($|a| = 1$) auf dem Rande von $K(z_1)$ ist nur bei $w = z + \frac{c}{z}$ mit $c = a z_1 : |z_1|$ Bildpunkt von z_1.

Durch die Transformationen $\xi = \frac{1}{z}$, $\eta = \frac{1}{w}$ entsprechen die sternigen Abbildungen von B umkehrbar eindeutig denjenigen speziellen schlichten, in bezug auf $\eta = 0$ sternigen Abbildungen von $|\xi| < 1$, die durch für $|\xi| < 1$ konvergente schlichte Potenzreihen der Form $\eta = \xi + b_3 \xi^3 + b_4 \xi^4 + \ldots$ mit verschwindendem Koeffizienten von ξ^2 vermittelt werden. So folgt aus Satz 2 sofort der

Satz 3 (Verschiebungssatz für spezielle sternige Abbildungen von $|\xi| < 1$): Bei spezieller sterniger Abbildung von $|\xi| < 1$ durch $\eta = \xi + b_3 \xi^3 + b_4 \xi^4 + \ldots$ liegt der Bildpunkt $\eta(\xi_1)$ eines beliebigen inneren Punktes $\xi_1 \neq 0$ von $|\xi| < 1$ auf der abgeschlossenen Kreisfläche mit dem Mittelpunkt $\xi_1 : (1 - |\xi_1|^4)$ und dem Halbmesser $|\xi_1|^3 : (1 - |\xi_1|^4)$. Ein beliebiger Punkt auf dem Rande dieser Kreisfläche ist nur bei der Funktion $\eta = \xi : (1 + a\xi^2)$ Bildpunkt von ξ_1, bei durch ξ_1 eindeutig bestimmtem a mit $|a| = 1$.

Jetzt werde B durch $w = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$ eineindeutig konform auf einen schlichten Bildbereich $\tilde{B}$ der w-Ebene abgebildet, dessen Berandung $\tilde{R}$ eine geschlossene *konvexe* Kurve sei, die auch zu einem geradlinigen Schlitze ausarten kann. Eine solche Abbildung von B heiße konvex normiert konform, kurz *konvex;* dann gilt der

Satz 4: Bei konvexer Abbildung $w = f(z)$ von B enthält der Bildbereich $\tilde{B}$ von B den Punkt $w = 0$ nicht als inneren Punkt; nur bei $w = f(z) = z + \frac{a}{z}$ mit $|a| = 1$ liegt $w = 0$ auf dem Rande von $\tilde{B}$, der dann ein gerader Schlitz ist[1]). Die konvexen Abbildungen von B sind also sternig (in bezug auf $w = 0$).

In Verbindung mit Satz 2 folgt aus Satz 4 sofort der *Satz 5 (Verschiebungssatz für konvexe Abbildungen von $|z| > 1$)*: Bei beliebiger konvexer Abbildung von $|z| > 1$ ist der genaue Wertebereich des Bildpunktes $w_1 = f(z_1)$ eines beliebigen inneren Punktes $z_1 \neq \infty$ von $|z| > 1$ die abgeschlossene Kreisfläche $|w_1 - z_1| \leqq \frac{1}{|z_1|}$. Betreffs ihres Randes gilt dasselbe wie bei Satz 2.

[1]) Dieser Satz 4 ist, zum mindesten implizite, wohl schon bekannt.

Man bemerke, daß in den Sätzen 2, 3 und 5 die Extremalfunktionen, bei denen der Bildpunkt des festgehaltenen Originalpunktes am Rande seines genauen Wertebereiches liegt, für alle Originalpunkte gleichzeitig Extremalfunktionen sind, was bei Wertannahmeproblemen im allgemeinen keineswegs der Fall ist.

Literatur: Von Satz 5 ist meines Wissens bisher nur das Teilergebnis explizite bekannt, daß $|z_1| - \frac{1}{|z_1|} \leqq |f(z_1)| \leqq |z_1| + \frac{1}{|z_1|}$ ist (K. Löwner, Math. Zeitschr. 3, 1919, S. 65–77). — Für schlichte konvexe Abbildungen von $|z| < 1$ durch $w = z + a_2 z^2 + \ldots$ ist das Verschiebungsproblem für $w(z_1)$ gelöst (E. Strohhäcker, Math. Zeitschr. 37, 1933, S. 356–380, insbes. S. 363, § 2, II. Satz); desgleichen für allgemeine sternige Abbildungen von $|z| < 1$ durch $w = z + a_2 z^2 + \ldots$ (E. Strohhäcker, a. a. O., S. 369, VI. Satz). Der Sonderfall $a_2 = 0$ von Satz 3 der vorliegenden Mitteilung kann aus dem Ergebnis von Herrn E. Strohhäcker nicht ohne weiteres entnommen werden. — Weiterhin sehe man betreffs anderer spezieller sterniger Abbildungen: Kiyoshi Noshiro, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University (Sapporo, Japan), Series I, Vol. II (1934), S. 129–155. — Das Verschiebungsproblem für beliebige schlichte normierte konforme Abbildungen eines beliebigen schlichten Bereiches mit ∞ als innerem Punkte behandelt meine Mitteilung Leipz. Ber. math.-phys. Klasse 83, 1931, S. 254–279.

Die Beweise der genannten Sätze erfordern keine Flächeninhaltsbetrachtungen, sondern sie werden im wesentlichen mit Hilfe des Prinzips des Arguments = des Satzes von der Charakteristik des Randes geführt, — eine bekannte Methode bei der Untersuchung der Wurzeln von Gleichungen, die ich auch in Leipz. Ber. math.-phys. Klasse 87, 1935, S. 145—158 und S. 159—167 zur Führung von Unitätsbeweisen benutzt habe.

Beweis von Satz 1. Es genügt, den allgemeinen Fall anzunehmen, daß die B sternig abbildende Funktion $w = f(z)$ keine der Funktionen $z + \frac{e^{2ic}}{z}$ ist, bei reellem c, da sonst Satz 1 klar ist. — Sei $\xi = z + \frac{e^{2ic}}{z}$ (c reell, $0 \leqq c < \pi$); $w = f(z)$ werde als Funktion von ξ aufgefaßt und mit $w(\xi)$ bezeichnet. $w(\xi)$ bildet den genau von dem geraden Schlitze mit den Endpunkten $2e^{ic}$ und $-2e^{ic}$ begrenzten schlichten Bereich B' der ξ-Ebene sternig ab, wegen der Entwicklung $w = \xi + \frac{c_1}{\xi} + \ldots$ im Unendlichen. Sei $\eta(\xi) = w(\xi) : \xi$. Zu beweisen ist, daß die Bildfläche $\tilde{B}'$, die $\eta(\xi)$ über der η-Ebene als Bild von B' entwirft, höchstens zweiblättrig ist.

Sei ε eine sehr kleine positive Zahl. Da $w = f(z)$ B sternig abbildet, ist in der w-Ebene das Bild K_ε von $|z| = 1 + \varepsilon$ bekanntlich[2]) ebenfalls

[2]) Vermöge $\xi = 1 : z$, $\eta = 1 : w$ ist dies in der Tatsache enthalten, daß die $|\xi| < 1$ sternig abbildende, für $|\xi| < 1$ konvergente Potenzreihe $\eta = \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \ldots$ von $|\xi| = 1 : (1 + \varepsilon)$ eine Bildlinie entwirft, die sternig in bezug auf $\eta = 0$ ist. Hierzu ist bekanntlich die Bedingung $R(\xi \eta'(\xi) : \eta(\xi)) > 0$ für $|\xi| < 1$ notwendig und hinreichend, und diese Bedingung ist wegen der Sternigkeit von $\eta(\xi)$ erfüllt.

sternig in bezug auf $w = 0$, d. h. jeder Halbstrahl $\arg w =$ konst. schneidet K_ε in genau einem Punkte. Die Funktion $w_\varepsilon(z) = w\big((1+\varepsilon)z\big) : (1+\varepsilon)$ bildet also B sternig ab, mit der richtigen Normierung im Unendlichen, und ebenso B', wenn $w_\varepsilon(z)$ als Funktion von ξ aufgefaßt und mit $w_\varepsilon(\xi)$ bezeichnet wird. K_ε umschließt den Nullpunkt.

Sei $\eta_\varepsilon(\xi) = w_\varepsilon(\xi) : \xi$. Die Bildfläche, die $\eta_\varepsilon(\xi)$ von B' über der η_ε-Ebene entwirft, sei $\tilde{B}'_\varepsilon$. Wäre $\tilde{B}'$ über irgendeiner Stelle der η-Ebene mehr als zweiblättrig, so müßte dasselbe von $\tilde{B}'_\varepsilon$ gelten, bei genügend kleinem ε, da ja $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tilde{B}'_\varepsilon = \tilde{B}'$ ist — dieser Grenzübergang ist so zu verstehen, daß dabei Windungspunkte einer Grenzlage zustreben oder auch mehrere Windungspunkte zu einem Windungspunkte höherer Ordnung in der Grenze zusammenrücken können. — Aus der ξ-Ebene werde die Kreisfläche $|\xi| = r$ herausgestanzt, bei sehr kleinem positivem r. So entsteht aus B' ein schlichter Bereich B'_r, dessen vollständige Begrenzung gebildet wird von der geraden Verbindungsstrecke der Punkte re^{ic} und $2e^{ic}$ — ihre beiden Ufer bilden zusammen den Randbogen b'_1 der Berandung von B'_r —, von dem Halbkreise $|\xi| = r$, $c \leqq \arg \xi \leqq c + \pi$ — dieser Halbkreis ist der Randbogen b'_2 von B'_r —, von dem geraden Verbindungsschlitze der Punkte $-re^{ic}$ und $-2e^{ic}$ — seine beiden Ufer bilden den Randbogen b'_3 von B'_r —, und dem Halbkreise $|\xi| = r$, $c + \pi \leqq \arg \xi \leqq c + 2\pi$ — dieser Halbkreis ist der Randbogen b'_4 von B'_r. Vermöge $w_\varepsilon(\xi)$ entsprechen den beiden Uferpunkten Null der geraden Verbindungsstrecke der Punkte $\xi = 2e^{ic}$ und $\xi = -2e^{ic}$ zwei verschiedene Punkte P_1 und P_2 auf K_ε, mit einer Argumentdifferenz δ, die man als > 0 und $\leqq \pi$ annehmen kann. Vermöge $w_\varepsilon(\xi)$ entsprechen b'_2 und b'_4 zwei kleine Bögen in der Nähe von P_1 und P_2, die von $w_\varepsilon = 0$ aus gesehen unter sehr kleinem Winkel erscheinen.

$\tilde{B}'_{\varepsilon,r}$ sei das Bild, das $\eta_\varepsilon(\xi)$ von B'_r über der η_ε-Ebene entwirft. Der Rand von $\tilde{B}'_{\varepsilon,r}$ setzt sich aus den Bildern der b'_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ zusammen. Das Bild von b'_k sei $\tilde{b}'_k$. Die Berandung von B'_r werde in positivem Sinne monoton durchlaufen; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ bedeuten im folgenden absolut genommen sehr kleine reelle Zahlen, die mit $r \to 0$ ebenfalls gegen Null gehen. Auf b'_1 ist $\arg \xi$ konstant; $\arg w_\varepsilon(\xi)$ variiert monoton wachsend, da K_ε in bezug auf $w = 0$ sternig ist; also nimmt auf $\tilde{b}'_1$ $\arg \eta_\varepsilon(\xi)$ um $(\delta + \varepsilon_1)$ oder $(2\pi - \delta + \varepsilon_1)$ zu. Auf b'_2 nimmt $\arg \xi$ monoton um π zu, und $\arg w_\varepsilon(\xi)$ um ε_2; also nimmt auf $\tilde{b}'_2$ $\arg \eta_\varepsilon$ um $(\pi - \varepsilon_2)$ ab. Auf $\tilde{b}'_3$ nimmt entsprechend $\arg \eta_\varepsilon$ monoton zu, und zwar um $(2\pi - \delta + \varepsilon_3)$ oder um $(\delta + \varepsilon_3)$, je nachdem auf $\tilde{b}'_1$ die Argumentänderung von $\eta_\varepsilon(\xi)$

$(\delta + \varepsilon_1)$ oder $(2\pi - \delta + \varepsilon_1)$ ist. Auf $\tilde{b}_4'$ nimmt entsprechend $\arg \eta_\varepsilon$ um $(\pi - \varepsilon_4)$ ab.

Bei $r \to 0$ streben $\tilde{b}_2'$ und $\tilde{b}_4'$ gegen $\eta_\varepsilon = \infty$, und auf ihnen konvergiert $|\int d \arg \eta_\varepsilon|$ gegen π; $\tilde{b}_1'$ und $\tilde{b}_3'$ schneiden oder berühren sich selbst nicht, da auf ihnen $\arg \eta_\varepsilon$ sich monoton ändert, und zwar um einen Gesamtwinkel $< 2\pi$; bei $\lim r = 0$ mündet jede der Linien $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{b}_1'$ und $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{b}_3'$ unter bestimmtem Winkel in den Punkt $\eta_\varepsilon = \infty$ ein.

Sei a ein beliebig gewählter, dann festzuhaltender endlicher Punkt der η_ε-Ebene, der auf keiner der Linien $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{b}_1'$ oder $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{b}_3'$ liegt. Die Größe $J = |\int d \arg (\eta_\varepsilon - a)|$, erstreckt über den Rand von B_r' bzw. $\tilde{B}_{\varepsilon,r}'$, bei genügend kleinem r, ist $\leqq$ der Summe der vier Größen $|\int d \arg (\eta_\varepsilon - a)|$, die über $\tilde{b}_k'$ erstreckt werden $(k = 1, 2, 3, 4)$. Die zweite und vierte dieser Größen sind jede — da jede der Linien $\tilde{b}_2'$ und $\tilde{b}_4'$ bei $r \to 0$ sich in ihrer Gestalt verhältnismäßig immer mehr einem sehr großen, gegen ∞ strebenden Halbkreise mit einem festen, von r unabhängigen Punkte, etwa dem Nullpunkte, als Mittelpunkt nähert, wie man leicht sieht — kleiner als $(\pi + \varepsilon_5)$. Da jede der Linien $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{b}_1'$ und $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{b}_3'$ in zwei bestimmten, und zwar voneinander verschiedenen Richtungen sich nach $\eta_\varepsilon = \infty$ hin erstreckt, und wegen der monotonen Änderung von $\arg \eta_\varepsilon$ auf ihnen um einen Gesamtwinkel $< 2\pi$, ist auf $\tilde{b}_1'$ und $\tilde{b}_3'$ bei genügend kleinem r $|\int d \arg (\eta_\varepsilon - a)| < 2\pi - p$, wobei $0 < p < 2\pi$ ist, und p von dem genügend kleinen r unabhängig ist. Bei $\lim r = 0$ ist daher von einem gewissen r ab stets $J < (2\pi - p) + (\pi + \varepsilon_5) + (2\pi - p) + (\pi + \varepsilon_5)$, d. h. es ist $J < 6\pi - 2p + 2\varepsilon_5$ und auch $J < 6\pi - p$; d. h. die Berandung von $\tilde{B}_{\varepsilon,r}'$ hat dann um den Punkt $\eta_\varepsilon = a$ höchstens die Umlaufzahl 2, also enthält das ganz im Endlichen gelegene $B_{\varepsilon,r}'$ den Punkt $\eta_\varepsilon = a$ höchstens zweimal als inneren Punkt. Aus $\lim r = 0$ folgt dies auch für $\tilde{B}_\varepsilon' = \lim\limits_{r \to 0} \tilde{B}_{\varepsilon,r}'$. Da dies für alle nicht auf $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{b}_1'$ und $\lim\limits_{r \to 0} \tilde{b}_3'$ gelegenen Punkte a gilt, folgt dies auch für alle endlichen Punkte a überhaupt, d. h. $\tilde{B}_\varepsilon'$ und $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \tilde{B}_\varepsilon' = \tilde{B}'$ sind höchstens zweiblättrig.

Beweis von Satz 2. Sei bei $|z_1| > 1$ P ein Punkt auf dem Rande von $K(z_1) \equiv \left\{ |w - z_1| \leqq \frac{1}{|z_1|} \right\}$. Für genau eine der B sternig abbildenden Funktionen $z + \frac{a}{z}$ mit $|a| = 1$ ist $z_1 + \frac{a}{z_1} = P \neq 0$. Sei $w = f(z)$ noch

eine andere, von dieser Funktion $z + \frac{a}{z}$ verschiedene, B sternig abbildende Funktion, für die ebenfalls $f(z_1) = P$ ist. Nach Satz 1 bildet die nichtkonstante Funktion $\eta(z) = f(z) : \left(z + \frac{a}{z}\right)$ B auf ein höchstens zweiblättriges Flächenstück F über der η-Ebene konform ab. Nach Annahme ist $\eta(z_1) = 1$. Im Unendlichen hat, wie man sofort nachrechnet, $\eta(z)$ die Entwicklung: $\eta(z) = 1 + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots$, d. h. $\eta(z)$ nimmt im Unendlichen den Wert 1 mindestens, und wegen der Zweiblättrigkeit von F also auch genau zweimal an (die vorher betrachteten Flächen $\tilde{B}'_\varepsilon$ und $\tilde{B}'$ sind also wirklich stets zweiblättrig). Wegen $\eta(z_1) = 1$ bei $z_1 \neq \infty$ müßte F aber mindestens dreiblättrig sein; also gilt nur bei $w = z + \frac{a}{z}$ die Gleichung $w(z_1) = P$.

Sei bei der sternigen Abbildung $w = f(z)$ von B der Bildpunkt $f(z_1)$ von z_1 außerhalb $K(z_1)$ gelegen. Die Funktionen $w_r = f_r(z) = \frac{1}{r} f(rz)$ für positiv reelles $r \geqq 1$ bilden B ebenfalls sternig ab, mit der richtigen Normierung im Unendlichen. Es ist $\lim\limits_{r \to \infty} f_r(z) \equiv z$. Bei festgehaltenem z_1 erfüllen bei von 1 nach ∞ monoton variierendem r die Punkte $f_r(z_1) = \frac{1}{r} f(rz_1)$ eine stetige, sich eventuell selbst treffende Linie, die, nach Annahme, für $r = 1$ von einem Punkte außerhalb $K(z_1)$ ausgeht und für $r \to \infty$ in den Mittelpunkt z_1 von $K(z_1)$ einmündet. Für wenigstens ein $r > 1$ liegt also $P = \frac{1}{r} f(rz_1)$ auf dem Rande von $K(z_1)$. Nach dem soeben Bewiesenen müßte diese Funktion $\frac{1}{r} f(rz)$ eine der Funktionen $z + \frac{a}{z}$ bei $|a| = 1$ sein, während sie doch $|z| = 1$ keinen geradlinigen Schlitz entsprechen läßt, wie es jedes $w = z + \frac{a}{z}$ mit $|a| = 1$ tut. — Es ist leicht zu sehen, daß bei mehr als einer einzigen sternigen Abbildung von B das Bild von z_1 ein beliebig vorgegebener innerer Punkt von $K(z_1)$ sein kann.

Satz 3 ist schon oben aus Satz 2 hergeleitet worden.

Beweis von Satz 4. $w = f(z)$ bilde B konvex normiert konform ab. Angenommen, $w = 0$ sei innerer Punkt des Bildbereiches $\tilde{B}$ von B, oder $w = 0$ liege auf dem Rande $\tilde{R}$ von $\tilde{B}$, und in diesem Falle sei zugleich

$w = f(z)$ keine der Funktionen $z + \frac{a}{z}$ mit $|a| = 1$. $\tilde{R}$ ist dann kein gerader Schlitz. Bei $z + \frac{a}{z}$ mit $|a| = 1$ entspricht $|z| = 1$ ein gerader Schlitz, der mit s_a bezeichnet wird, und auf der Geraden g_a liegt. Es gibt ein a mit $|a| = 1$, so daß die nicht auf g_a liegenden Punkte von $\tilde{R}$ nur in einer einzigen der beiden Halbebenen liegen, in die g_a die Ebene zerlegt. Es gibt Zahlen α von beliebig kleinem absoluten Betrage, so, daß $f(z) + \alpha$ B auf einen Bereich abbildet, dessen Berandung $\tilde{R}_\alpha$ mit s_a gar keinen Punkt gemeinsam hat, und daß sicher s_a außerhalb $\tilde{R}_\alpha$ liegt. Durch $\eta_\alpha(z) = f(z) + \alpha - \left(z + \frac{a}{z}\right)$, wobei a die gegebene Bedeutung hat, wird B auf ein beschränktes Riemannsches Flächenstück F_α über der η_α-Ebene konform abgebildet. Da s_a ganz außerhalb $\tilde{R}_\alpha$ liegt, hat nach der Betrachtung auf S. 149-150 in meiner Mitteilung: „Zur Theorie der konformen Abbildung schlichter Bereiche" (Leipz. Ber. math.-phys. Klasse 87, 1935, S. 145—158) — wobei es nichts ausmacht, daß an Stelle des einen dort betrachteten Schlitzes hier eine geschlossene Kurve tritt — der Rand von F_α in bezug auf den Punkt $\eta_\alpha = 0$ die Umlaufzahl Null. Also enthält F_α nach dem Prinzip des Arguments den Nullpunkt nicht als inneren Punkt, und vermöge $\lim \alpha = 0$ gilt dies auch für die Fläche $F = \lim\limits_{\alpha \to 0} F_\alpha$, auf die $\eta(z) = f(z) - \left(z + \frac{a}{z}\right)$ B konform abbildet; wegen $\eta(\infty) = 0$ müßte aber F den Nullpunkt als inneren Punkt enthalten, womit Satz 4 bewiesen ist.

Die konvexen normierten konformen Abbildungen von B sind also sternig, und daher wird der *Beweis von Satz 5* durch den Beweis von Satz 2 mitgeliefert; man hat nur zu bemerken, daß $z + \frac{a}{z}$ bei $|a| = 1$ B auch konvex normiert konform abbildet. Daß bei mehr als einer konvexen normierten konformen Abbildung von B das Bild von $z_1 \neq \infty$ ($|z_1| > 1$) ein beliebig vorgegebener innerer Punkt von $K(z_1)$ sein kann, ist nicht schwer zu überlegen.

Verhalten der sternigen Abbildungen am Rande von $|z| > 1$. $w = f(z)$ bilde B sternig ab. Sei z_1 ein beliebiger, dann festzuhaltender Punkt auf $|z| = 1$. Sei $\lim\limits_{n \to \infty} z_{1,n} = z_1$ bei $|z_{1,n}| > 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Jeden Häufungspunkt der Punkte $f(z_{1,n})$ nennen wir einen Randbildpunkt $f(z_1)$ des Randpunktes z_1 von B; über dieses $f(z_1)$ gilt der folgende *Verschiebungssatz:*

Satz 6: Bei sterniger Abbildung von $|z| > 1$ ist der genaue Wertebereich jedes Randbildpunktes $w_1 = f(z_1)$ von $z_1(|z_1| = 1)$ die abgeschlossene Kreisfläche $K(z_1) \equiv \{|w_1 - z_1| \leqq 1\}$. Ein von null verschiedener Randpunkt $z_1 + e^{i\varphi}$ (φ reell) von $K(z_1)$ ist nur bei der Funktion $z + \frac{e^{i\varphi} z_1}{z}$ Randbildpunkt $f(z_1)$; der Randpunkt $w_1 = 0$ von $K(z_1)$ ist bei $z - \frac{z_1^2}{z}$ Randbildpunkt $f(z_1)$, aber dies gilt auch noch bei anderen, von jedem $z + \frac{a}{z}$ bei $|a| = 1$ verschiedenen, B sternig abbildenden Funktionen $w = f(z)$.

Beweis: Nach Satz 2 gehört $f(z_{1,n})$ der abgeschlossenen Kreisfläche $K(z_{1,n}) \equiv \left\{ |w - z_{1,n}| \leqq \frac{1}{|z_{1,n}|} \right\}$ an; da aus $\lim\limits_{n\to\infty} z_{1,n} = z_1$ $\lim\limits_{n\to\infty} K(z_{1,n}) = K(z_1)$ folgt, gehört $f(z_1)$ der abgeschlossenen Kreisfläche $K(z_1)$ an. $P \not\equiv 0$ liege auf dem Rande von $K(z_1)$. Für genau ein a mit $|a| = 1$ gilt für die Funktion $z + \frac{a}{z}$ die Gleichung $z_1 + \frac{a}{z_1} = P$. Angenommen, für eine B sternig abbildende, von dieser Funktion $z + \frac{a}{z}$ verschiedene Funktion $w = f(z)$ gelte für eine geeignete Folge von Punkten $z_{1,n}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_{1,n} = z_1$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ die Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_{1,n}) = P$. Die Funktion $\eta(z) = f(z) : \left(z + \frac{a}{z}\right)$ bildet nach Satz 1 B auf ein zweiblättriges Flächenstück F über der η-Ebene konform ab. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_{1,n}) = P$ und $P \not\equiv 0$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \eta(z_{1,n}) = 1$; d. h. die Punkte $\eta(z_{1,n})$ liegen bei genügend großem n in beliebiger Nähe von $\eta = 1$. Da $z = \infty$ dem zweiblättrigen Windungspunkte $\eta = 1$ von F entspricht, würden diese Punkte $\eta(z_{1,n})$ also mindestens dreimal von F bedeckt, während F doch nicht mehr als zweiblättrig ist. Diese Schlußweise versagt, wenn P der Nullpunkt ist. In der Tat gilt für $z_1(|z_1| = 1)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_{1,n} = z_1$ bei geeignetem sternigen $w = f(z)$ die Gleichung $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_{1,n}) = 0$, wenn das Bild $\tilde{R}$ von $|z| = 1$ aus mehr als zwei von $w = 0$ ausgehenden geraden Strecken besteht, wenn nur diese Strecken geeignet gewählt werden. Daß bei innerhalb $K(z_1)$ liegendem P die Gleichung $f(z_1) = P$ $(|z_1| = 1)$ für mehr als ein einziges, B sternig abbildendes $w = f(z)$ erfüllbar ist, ist nicht schwer zu überlegen. — Diese Betrachtung überträgt sich sinngemäß auf die Abbildungen von Satz 3.

Derselbe Zusatz wie für Satz 2 ist hinsichtlich der konvexen normierten konformen Abbildungen auch für Satz 4 zu machen, nur daß hier die

Sonderstellung des Randbildpunktes $w = 0$ von $K(z_1)$ wegfällt, indem, wenn $w=0$ Randbildpunkt ist, stets notwendig $w=z+\frac{a}{z}$ mit $|a|=1$ ist.

Es werde noch auf das hier nicht zur Behandlung kommende Verschiebungsproblem für $f(z_1)$ ($|z_1| > 1$) hingewiesen, wenn $w = f(z)$ mit der Entwicklung $w = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$ B sternig in bezug auf den Punkt $w = a \neq 0$ konform abbildet, wobei dann bekanntlich notwendig $|a| \leqq 2$ sein muß, damit solche Funktionen existieren.

Zusatz. Unter einer *allgemeinen* sternigen Abbildung von $B \equiv \{|z| > 1\}$ verstehen wir eine eineindeutige schlichte konforme Abbildung von B durch eine Funktion $w=f(z)$ mit der Entwicklung $w=z+a_0+\frac{a_1}{z}+\ldots$, wobei a_0 nicht wie in Satz 2 null zu sein braucht, und der Bildbereich $\tilde{B}$ von B stets in bezug auf $w = 0$ sternig ist ($w = 0$ ist also kein innerer Punkt von $\tilde{B}$). Bekanntlich ist dann $|a_0| \leqq 2$, und $|a_0| = 2$ gilt nur bei den Funktionen $z + 2a + \frac{a^2}{z} = z\left(1 + \frac{a}{z}\right)^2$ mit $|a| = 1$, bei denen B von einer geraden, vom Nullpunkt ausgehenden Strecke der Länge 4 begrenzt wird. Bildet $w = f(z)$ B allgemein sternig ab, so zeigt das Beweisverfahren von Satz 1 in sinngemäßer Übertragung, daß $\eta(z) = f(z) : \left(z + 2a + \frac{a^2}{z}\right)$ bei $|a| = 1$ B auf ein nur *ein*blättriges Flächenstück F der η-Ebene konform abbildet, wobei $\eta(\infty) = 1$ ist, und F nur bei $f(z) = z + 2a + \frac{a^2}{z}$ ($|a| = 1$) sich auf den Punkt 1 reduziert. Ist $|z_1| > 1$, so zeigt der Beweis von Satz 2 in sinnentsprechender Übertragung, unter Benutzung der *Ein*blättrigkeit von F, daß bei allgemeiner sterniger Abbildung $w = f(z)$ von B die Punkte $w_1 = f(z_1)$ dem abgeschlossenen Innern der Linie $w_1 = z_1\left(1 + \frac{a}{z_1}\right)^2$ bei veränderlichem $|a| = 1$ angehören, wobei der Rand dieses Gebietes nur bei den Funktionen $w = z + 2a + \frac{a^2}{z}$ mit $|a| = 1$ erreicht wird *(Verschiebungssatz für allgemeine sternige Abbildungen von $|z| > 1$)*. Durch die Transformationen $z^* = 1 : z$, $w^* = 1 : w$ ergibt sich der Satz VI von Herrn *E. Strohhäcker* a. a. O., S. 369. — Betreffs der Verschiebung des Randbildpunktes $f(z_1)$ von z_1 ($|z_1| = 1$) gilt Analoges wie bei Satz 6.

(Eingegangen den 15. Februar 1936.)