

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 8 (1935-1936)

**Artikel:** Der Oktaeder-Oktant oder ein Heptaeder.  
**Autor:** Merz, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9302>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

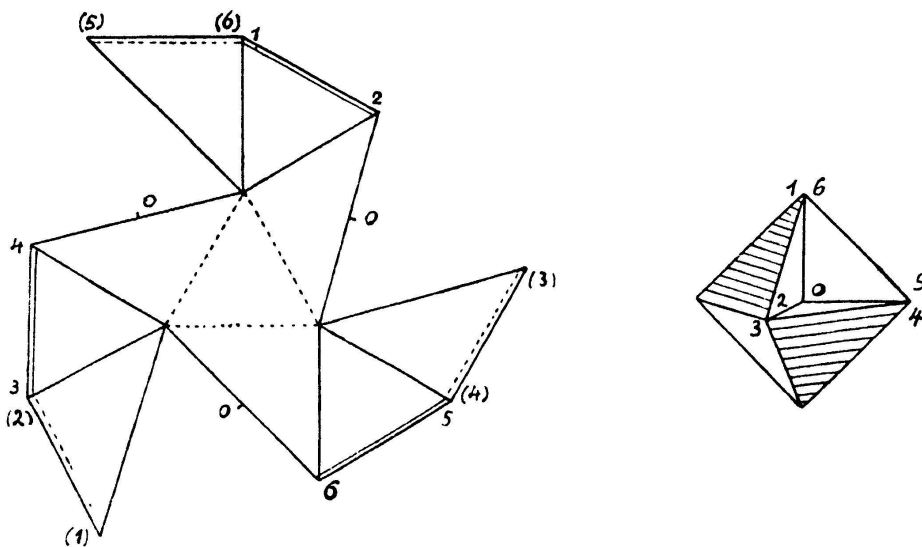
**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Der Oktaeder-Oktant oder ein Heptaeder

Von K. MERZ, Chur

In meiner Promotionsarbeit<sup>1)</sup>, ausgehend von einer Aufgabe von Prof. Geiser, kam ich durch eine quadratische Transformation auf die Abbildung der Steinerschen Fläche auf die Ebenen eines Oktaeders, aus denen als Veranschaulichung des Verlaufes jener Fläche vierter Ordnung sich ein Oktaeder Oktant ergab. Ein solches Polyeder besteht aus sieben Ebenengebieten und ist in Hilberts Buch: „Anschauliche Geometrie“ 1932, Seite 266, als Heptaeder beschrieben, wobei noch seine Einseitigkeit erklärt wird. Dadurch, sowie durch freundliche Anregung von Herrn Prof. Finsler wurde ich veranlaßt, meine frühere Arbeit zu vervollständigen und auch ein Netz des endlich begrenzten Heptaeders zu suchen, während ich 1914 erst die Entstehung des ins Unendliche sich erstrecken-



den Oktaeders-Oktanten aus der unbegrenzten Ebene durch drei gerade Einschnitte und durch Aufklappungen gefunden hatte. Die Kollineation von dem gewohnten rechtwinkligen Koordinatensystem zu einem Koordinatentetraeder gibt dabei die Wegleitung. Das Ergebnis ist hier durch die beigegebenen Zeichnungen von Netz und Heptaeder dargestellt.

Dieses Netz besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken und aus drei

<sup>1)</sup> K. Merz. Parallelfächen und Zentrafläche eines besondern Ellipsoides und die Steinersche Fläche. E. T. H. Zürich. Beispiel einer quadratischen Transformation, erschienen als Beilage zum Programm der Bündnerischen Kantonschule 1914 und im Verlag von Fr. Schuler, Chur (54 Seiten mit Bild und Figuren). Kurze Mitteilungen in den Verhandlungen der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft 1914 II. Teil S. 102, mit Figuren, und 1916 II. Teil S. 93, Historisches.

Quadraten, die je durch eine Diagonale halbiert sind. Um das Heptaeder zu erhalten, ist das Netz längs den punktierten Linien des mittleren Dreiecks nach oben aufzuklappen, so daß die drei Punkte  $O$  in einen Punkt zusammenfallen, welcher dem dreifachen Punkte der Steinerschen Fläche entspricht und die Mitte des Heptaeders wird. Um die übrigen sechs inneren Kanten sind die Flächen des Netzes entgegengesetzt, also nach der untern Seite zu klappen, und es sind die Durchdringungen herzustellen, so daß die halbierten Quadrate sich wieder zusammenfügen und ihre sie teilenden Diagonalen zu den drei Doppelgeraden des Heptaeders werden, als Abbildung der drei Doppelgeraden der Steinerschen Fläche. Dabei schließen sich zugleich die sechs Randkanten zusammen zu einem Dreieck, an welchem der Übergang von der einen Seite des Netzes zu der andern ausgeführt werden kann, so daß die Einseitigkeit am Heptaeder eintritt. Diese Randkanten sind in der Zeichnung des Netzes durch Doppelstriche hervorgehoben; die ausgezogenen liegen auf der obern Seite, die punktierten auf der untern Seite des Netzes. Die eingeklammerten Zahlen gehören zu den Ecken auf der untern Seite, die übrigen Zahlen zu den Ecken auf der obern Seite des Netzes. Der Rand 1—2 vereinigt sich nach Überschlagung der Netzflächen mit (1) — (2) und ebenso 3 — 4 mit (3) — (4) und 5 — 6 mit (5) — (6). Jede Ecke ist dabei mit zwei Nummern bezeichnet, je nach dem Rand, zu dem sie gezählt wird und ob oben oder unten am Netz. Bei der Aufklappung aus dem Netz zum Heptaeder kommt also das Möbius'sche Band dreimal zur Bildung, wobei diese drei Bänder einander in den Doppelgeraden durchdringen.

Das Heptaeder hat die nämlichen Kanten und Achsen wie das gewöhnliche Oktaeder, von welchem es aber nur vier Dreiecksflächen besitzt und dazu die Achsenvierecke als Quadrate oder Rauten. Von den Rändern der vier fehlenden Dreiecksflächen besitzt das Heptaeder einspringende Ecken nach seiner Mitte. An jedem dieser vier Randdreiecke kann also das Heptaeder aufgeschnitten werden, um das gezeichnete Netz zu erhalten.

Diesen vier Randdreiecken entsprechen an der Steinerschen Fläche die Berührungskegelschnitte der vier singulären Tangentialebenen, welche das erwähnte Koordinatentetraeder bilden. Rückt eines dieser Randdreiecke ins Unendliche, so hat das Heptaeder drei Paar paralleler Flächen, und bei der eingangs angegebenen Bildung aus einer Ebene wird dann die Einseitigkeit vermittelt auf deren drei unendlich fernen Schnittgeraden. Auch die übrigen drei Randdreiecke haben je eine Ecke im Unendlichen.

Von historischem Interesse<sup>2)</sup> ist es, wie Steiner 1843 seine Römerfläche projektiv ersann, wie diese später synthetische und analytische Darstellungen erfuhr und wie schließlich das Heptaeder daraus als Ergebnis erschien, ein einfaches Polyeder, zu dem das Netz überraschend und nett sich schließt. Damit dürfte das Heptaeder auch dazu beitragen, die Erinnerung an die so interessante Steinersche Fläche rege zu erhalten.

---

<sup>2)</sup> Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens, LVII. Band 1917, aus Historischem der Steinerschen Fläche. Seite 65. In Kommission der F. Schuler'schen Buchhandlung, Chur.

(Eingegangen den 25. Februar 1936.)