

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 8 (1935-1936)

**Artikel:** Les rotations de l'espace euclidien à quatre dimensions, leur expression au moyen des nombres de Clifford et leurs relations avec la théorie des spineurs.

**Autor:** Juvet, Gustave

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-9297>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Les rotations de l'espace euclidien à quatre dimensions, leur expression au moyen des nombres de Clifford et leurs relations avec la théorie des spineurs

Par GUSTAVE JUVET, Lausanne

## Introduction

1. Il est bien connu que les nombres hypercomplexes de Clifford permettent de trouver les expressions des substitutions linéaires orthogonales à  $n$  variables au moyen de paramètres, en général, surabondants. En considérant ces substitutions comme les expressions algébriques des rotations de l'espace euclidien à  $n$  dimensions autour d'un point fixe, il est possible de donner une interprétation géométrique de ces paramètres; d'autre part, l'algorithme cliffordien permet de faire des simplifications appréciables dans le maniement des notions géométriques relatives à ces rotations, de sorte que, le calcul algébrique et l'intuition géométrique se soutenant, on peut, avec la plus grande rapidité, établir la théorie des rotations de l'espace à  $n$  dimensions autour d'un point fixe.

Nous essayerons de montrer, dans ce mémoire, ce que donnent ces méthodes pour le cas, très intéressant dans les applications, où  $n$  vaut quatre. En supposant connues simplement les propriétés des variétés linéaires orthogonales entre elles, nous démontrerons rapidement, et par voie géométrique, un théorème sur les déplacements dans l'espace euclidien à quatre dimensions; nous suivrons pour cela la Thèse de M. van Oss<sup>1</sup>). Puis appliquant la théorie des nombres de Clifford, brièvement rappelée, nous montrerons que toute rotation revient au produit de deux rotations autour de deux plans absolument perpendiculaires. Cette décomposition est, en général, unique; les cas exceptionnels seront étudiés et l'on montrera qu'ils permettent de démontrer que le groupe  $G_6$  des rotations autour d'un point est le produit direct de deux sous-groupes invariants  $G_3$  et  $G'_3$ ; ce résultat est bien classique, mais on verra que la méthode utilisée permet d'obtenir, sans recourir à la théorie générale des groupes, les invariants de chacun des sous-groupes en question et les

---

<sup>1</sup>) *S. L. van Oss*, Die Bewegungsgruppen der Regelmäßigen Gebilde von vier Dimensionen, Inaugural-Dissertation, Gießen, 1894.

propriétés des grandeurs, nommées par les physiciens *semi-vecteurs de première et de seconde espèces*, et *spineurs*<sup>2)</sup>). Grâce à ces dernières, nous retrouverons les isomorphies entre le groupe de la forme réelle  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$  et le groupe linéaire formé du groupe linéaire de la forme d'Hermité  $\xi_1 \bar{\xi}_1 + \xi_2 \bar{\xi}_2$  et du groupe linéaire de la forme d'Hermité  $\xi_3 \bar{\xi}_3 + \xi_4 \bar{\xi}_4$ ; en passant, grâce à une transformation facile, nous constaterons encore l'isomorphie entre le groupe linéaire spécial à deux variables complexes  $\xi_1$  et  $\xi_2$  et le groupe linéaire de la forme quadratique réelle  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ . Ces résultats, obtenus par M. Cartan comme cas particuliers d'une théorie générale des groupes continus, finis, réels<sup>3)</sup> sont importants dans la théorie de Dirac. Nous les utiliserons dans un autre mémoire pour résoudre un problème que M. A. Proca<sup>4)</sup> avait posé en 1930 sur la forme des solutions de l'équation de Dirac<sup>5)</sup>.

## Chapitre premier

### Le théorème de van Oss

*2. Deux figures congruentes de l'espace euclidien à quatre dimensions  $E_4$  peuvent être amenées en coïncidence par deux rotations successives autour de deux plans ayant un point commun.*

La démonstration qui, nous le répétons, est empruntée à la Thèse de M. van Oss, précisera la notion de rotation autour d'un plan.

Soient  $F$  et  $F'$  deux figures congruentes de  $E_4$ . On peut imaginer qu'elles appartiennent à deux espaces  $R_4$  et  $R'_4$  plongés dans  $E_4$  (et confondus avec lui). Soient  $H_3$  et  $H'_3$  deux hyperplans homologues de  $R_4$  et  $R'_4$  respectivement; ils se coupent suivant un plan de  $E_4$  qu'on peut appeler  $\tilde{\omega}_2$  si on le considère dans  $R_4$  et  $\sigma'_2$  si on le considère dans  $R'_4$ . Désignons les homologues de  $\tilde{\omega}_2$  dans  $R'_4$  par  $\tilde{\omega}'_2$  et de  $\sigma'_2$  dans  $R_4$  par  $\sigma_2$ .  $\tilde{\omega}_2$  et  $\sigma_2$  se coupent — ce sont deux plans de  $H_3$  — suivant une droite

<sup>2)</sup> *Einstein* et *Mayer*, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. 1932 (XXXII); et *J. Ullmo*, J. de Phys. (VII) tome V, p. 230; cf. aussi le mémoire où *M. W. Scherrer* utilise la théorie des quaternions pour la représentation des transformations de Lorentz, Comm. Math. Helv. vol. VII, p. 141.

<sup>3)</sup> *E. Cartan*, Ann. Ec. Norm. Sup. (3ème série), vol. XXXI, p. 263.

<sup>4)</sup> C. R. Acad. Sc. Paris, vol. 190, p. 1377, vol. 191, p. 26, J. de Phys. (VII) vol. I, p. 235.

<sup>5)</sup> D'autres auteurs se sont occupés des spineurs du point de vue analytique et géométrique: cf. le livre de *M. van der Waerden*, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, et les mémoires de *M. Schouten*, Proc. Akad. Wet. Amsterdam, vol. XXXIII, p. 189; Zs. f. Phys. vol. LXXXIV, p. 92.

$\delta_1$ ,  $\tilde{\omega}_2$  et  $\sigma'_2$  se coupent suivant la droite  $\delta'_1$  homologue de  $\delta_1$ . Comme  $\delta_1$  et  $\delta'_1$  sont dans un même plan, il existe une rotation dans ce plan qui amènera  $\delta_1$  sur  $\delta'_1$ , tous les points homologues de  $\delta_1$  et  $\delta'_1$  coïncidant; soit  $O$  le centre de cette rotation.

Considérons alors le déplacement de l'espace  $R_4$  obtenu ainsi: on décompose tout vecteur de  $R_4$ , issu de  $O$ , en deux parties  $V^{(1)} + V^{(2)}$ ,  $V^{(1)}$  étant dans  $\tilde{\omega}_2$ , et  $V^{(2)}$  étant situé dans un plan  $\pi_2$  absolument perpendiculaire à  $\tilde{\omega}_2$ ; cette décomposition, toujours possible, est évidemment unique. Dans la rotation de  $\tilde{\omega}_2$ ,  $V^{(1)}$  arrive en  $\bar{V}^{(1)}$ ; dès lors, considérons la correspondance entre les extrémités de  $V$  et  $\bar{V}$ , où

$$\bar{V} = \bar{V}^{(1)} + V^{(2)};$$

c'est évidemment un déplacement, car les longueurs des vecteurs  $V$  et  $\bar{V}$  sont égales et, si  $W$  est un second vecteur auquel correspond  $\bar{W}$ , on aura pour les produits scalaires

$$\begin{aligned} V \cdot W &= (V^{(1)} + V^{(2)}) \cdot (W^{(1)} + W^{(2)}) = V^{(1)} \cdot W^{(1)} + V^{(2)} \cdot W^{(2)} = \\ &= \bar{V}^{(1)} \cdot \bar{W}^{(1)} + V^{(2)} \cdot W^{(2)} = (\bar{V}^{(1)} + V^{(2)}) \cdot (\bar{W}^{(1)} + W^{(2)}) = \bar{V} \cdot \bar{W}. \end{aligned}$$

Ce déplacement est appelé *une rotation de  $R_4$  autour de  $\pi_2$* ; tous les plans parallèles à  $\tilde{\omega}_2$  sont invariants, ils tournent du même angle et tous les plans qui leur sont absolument perpendiculaires, donc parallèles à  $\pi_2$  s'échangent sauf  $\pi_2$  qui reste non-seulement invariant, mais invariable. Cette rotation amène  $R_4$  en  $\bar{R}_4$ ,  $F$  en  $\bar{F}$ . Les deux figures  $F$  et  $\bar{F}$  ont une droite homologue commune,  $\delta'_1$  précisément.

On mène l'hyperplan  $K_3$  perpendiculairement à  $\delta'_1$  en un de ses points. Cet hyperplan coupe l'ensemble  $\bar{\mathcal{G}}$  des plans de  $R_4$  passant par  $\delta'_1$  suivant une gerbe de droites  $\bar{g}$ , il coupe de même l'ensemble  $\mathcal{G}$  des plans de  $R'_4$  passant par  $\delta'_1$  suivant une gerbe de droites  $g'$ .  $\bar{g}$  et  $g'$  sont deux gerbes de droites, ayant même sommet  $S$ , homologues deux à deux, et situées dans un même espace tridimensionnel.

Il est dès lors facile de terminer le déplacement qui amènera  $F$  sur  $F'$ , il suffit de passer de  $\bar{F}$  à  $F'$ , soit de  $\bar{R}_4$  à  $R'_4$ . Dans ce dernier déplacement,  $\delta'_1$  reste invariable et  $K_3$  reste invariant,  $g$  vient en  $g'$ ; or le passage de  $g$  en  $g'$  est une rotation de  $K_3$  autour du sommet commun des deux gerbes. Il y a donc une droite  $\Delta$  commune à  $\bar{g}$  et à  $g'$  qui se correspond à elle-même dans cette rotation, c'est l'axe de la rotation. Un vecteur de  $\bar{R}_4$ , issu de  $S$ , peut se décomposer univoquement en une somme de deux vecteurs dont l'un est dans le plan déterminé par  $\delta'_1$  et  $\Delta$ , l'autre dans le

plan absolument perpendiculaire, qui est d'ailleurs situé dans  $K_3$ ; soit  $\bar{V} = {}^{(1)}\bar{V} + {}^{(2)}\bar{V}$ ; la rotation de  $K_3$  amène  ${}^{(2)}\bar{V}$  en  ${}^{(2)}V'$  et laisse  ${}^{(1)}\bar{V}$  invariant, c'est donc une rotation de  $R_4$  autour du plan  $\pi_2^* = (\delta'_1, \Delta)$ . Le plan  $\pi_2$  a au moins un point commun avec  $\pi_2^*$ . Le théorème de van Oss est donc complètement démontré.

Une rotation autour d'un plan  $\pi_2$  sera désignée autrement dans la suite; on dira qu'elle est *parallèle au plan*  $\tilde{\omega}_2$ , absolument perpendiculaire à  $\pi_2$ , et sa grandeur sera mesurée par l'angle dont les plans parallèles à  $\tilde{\omega}_2$  tournent sur eux-mêmes.

On voit, par la démonstration, que la décomposition d'un déplacement de  $E_4$  en deux rotations n'est pas unique; elle dépend du choix du couple des hyperplans correspondants  $H_3$  et  $H'_3$  de  $F$  et  $F'$  <sup>6)</sup>.

D'autre part, il y aurait à examiner si l'on voulait être complet, le cas où le point commun à  $\pi_2$  et à  $\pi_2^*$  serait à l'infini; on aurait affaire alors à une translation; mais pour notre but, cette étude n'est pas nécessaire.

Les nombres de Clifford vont permettre de préciser grandement les correspondances entre les plans de rotation lorsque l'on sait déjà que  $F$  et  $F'$  ont un point homologue commun. Il est manifeste que, dans ce cas, les plans  $\pi_2$  et  $\pi_2^*$  passent par ce point.

## Chapitre II

### Les rotations de $E_4$ et les nombres de Clifford

**3.** Un nombre de Clifford, pour  $n=4$ , est un nombre hypercomplexe de la forme <sup>7)</sup>:

$$C = a + a_1 \Gamma_1 + a_2 \Gamma_2 + a_3 \Gamma_3 + a_4 \Gamma_4 + a_{12} \Gamma_{12} + a_{13} \Gamma_{13} + a_{14} \Gamma_{14} + a_{23} \Gamma_{23} + a_{34} \Gamma_{34} + a_{42} \Gamma_{42} + a_{123} \Gamma_{123} + a_{234} \Gamma_{234} + a_{341} \Gamma_{341} + a_{412} \Gamma_{412} + b \Gamma_{1234},$$

où l'on a posé

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_i \Gamma_j, \Gamma_{ijk} = \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k, \Gamma_{1234} = \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \text{ (qu'on écrira souvent } \Gamma_5),$$

les unités  $\Gamma_i$  étant „définies“ par les relations

$$\Gamma_i^2 = 1, \Gamma_i \Gamma_j = -\Gamma_j \Gamma_i; \quad (i \neq j) \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

on voit qu'on a aussi

$$\Gamma_5^2 = 1, \Gamma_5 \Gamma_i = -\Gamma_i \Gamma_5 \quad (i \neq 5).$$

<sup>6)</sup> Mais  $\pi_2$  et  $\pi_2^*$  sont réels si  $F$  et  $F'$  sont réelles et si  $H_3$  est réel.

<sup>7)</sup> Cf. ce journal, vol. II, p. 225.

On sait que les diverses parties d'un nombre de Clifford sont susceptibles d'admettre une interprétation géométrique. On peut écrire :

$$C = I + V + T + \Gamma_5(W + J),$$

où  $I$  et  $J$  sont des grandeurs scalaires,  $V$  et  $W$  des vecteurs et  $T$  un tenseur antisymétrique.

4. Pour commencer, nous ne nous occuperons que des nombres qui représentent des vecteurs ou des produits de vecteurs. Soient deux vecteurs<sup>8)</sup>

$$V = v_i \Gamma_i, \quad W = w_i \Gamma_i;$$

on a

$$VW = v_i w_i + (v_i w_k - v_k w_i) \Gamma_{ik};$$

$v_i w_i = V \cdot W$  est le produit scalaire des deux vecteurs et  $(v_i w_k - v_k w_i) \Gamma_{ik}$  en est le produit vectoriel  $V \times W$ , c'est un bivecteur de la forme  $b_{ik} \Gamma_{ik}$ , et l'on a, comme un calcul simple le montre :

$$b_{12} b_{34} + b_{13} b_{42} + b_{14} b_{23} = 0; \quad 9)$$

de plus, si  $\varphi$  est l'angle de  $V$  et  $W$ , on a

$$\begin{aligned} v_i w_i &= |V| |W| \cos \varphi \\ \sum b_{ik}^2 &= |V|^2 |W|^2 \sin^2 \varphi; \end{aligned}$$

cette dernière expression est le carré de la mesure du bivecteur.

Soit  $A$  un vecteur  $a_i \Gamma_i$  de longueur unité,  $\sum a_i^2 = 1$ . L'inverse  $A^{-1}$  du nombre de Clifford  $A$ , est le même vecteur  $A$ , car

$$A^2 = \sum a_i^2 = 1.$$

Le nombre

$$V' = AVA^{-1}$$

représente un vecteur, comme le calcul le montre immédiatement. Puisque

$$AV' = V'A, \text{ c'est-à-dire } A \cdot V' + A \times V' = V \cdot A + V \times A,$$

ce vecteur  $V'$  a même longueur que  $V$  puisque son produit scalaire avec  $A$

<sup>8)</sup> On supprimera le signe  $\Sigma$  suivant la convention habituelle.

<sup>9)</sup> Cette relation est caractéristique des tenseurs qui sont des bivecteurs.

est égal à  $V \cdot A$ . Le bivecteur  $A \times V'$  définit le même plan que  $V \times A$ , il a, dans ce plan, la même mesure au signe près. Donc  $V'$  est le symétrique de  $V$  relativement à  $A$ .

Si on repère chaque point  $P$  de  $E_4$  par le vecteur  $V = OP$ , la correspondance  $P \rightarrow P'$ , (où on a posé  $OP' = V'$ ) définit la symétrie de  $E_4$  par rapport au support du vecteur  $A$ , ou comme nous dirons, par rapport à  $A$ .

Soit  $B$  un second vecteur unité,

$$B = b_i \Gamma_i, \quad \Sigma b_i^2 = 1 ;$$

le vecteur

$$V'' = B V' B^{-1}$$

est le symétrique de  $V'$  relativement à  $B$ . Soit  $\Pi_2$  le plan déterminé par les vecteurs  $A$  et  $B$ ; on peut décomposer tout vecteur  $V$  en  $\bar{V} + \bar{\bar{V}}$ , d'une seule manière:  $\bar{V}$  étant  $\Pi_2$  et  $\bar{\bar{V}}$  dans le plan  $\Pi_2^*$  absolument perpendiculaire à  $\Pi_2$ . On aura:

$$\begin{aligned} V'' &= B A V A^{-1} B^{-1} = (B A) V (B A)^{-1} = (B A) (\bar{V} + \bar{\bar{V}}) (B A)^{-1} = \\ &= (B A) \bar{V} (B A)^{-1} + (B A) \bar{\bar{V}} (B A)^{-1}, \end{aligned}$$

à cause de la distributivité de la multiplication cliffordienne relativement à l'addition.  $\bar{\bar{V}}$ , perpendiculaire à  $\Pi_2$ , subit deux symétries relativement à deux vecteurs situés dans  $\Pi_2$ , dès lors

$$(B A) \bar{\bar{V}} (B A)^{-1} = \bar{\bar{V}}$$

ce que le calcul montre aussi. De plus  $\bar{V}$ , qui est dans  $\Pi_2$ , subit deux symétries relativement à deux vecteurs de ce plan,

$$\bar{V}'' = (B A) \bar{V} (B A)^{-1}$$

est donc obtenu par une rotation de  $\bar{V}$  dans  $\Pi_2$  d'un angle  $2\Phi$ ,  $\Phi$  étant l'angle que  $A$  fait avec  $B$ .

$$V'' = \bar{V}'' + \bar{\bar{V}}$$

définit une correspondance  $P \rightarrow P''$ , qui est donc une rotation de  $E_4$  autour de  $\Pi_2^*$ , ou parallèle à  $\Pi_2$ , d'angle  $2\Phi$ , l'origine  $O$  étant fixe.

Comme toute rotation autour de l'origine est le produit de deux

rotations parallèles à deux plans passant par  $O$ , le déplacement le plus général qui laisse fixe l'origine sera donc exprimé analytiquement par l'égalité :

$$V^* = DCABVABCD = (DCAB)V(DCBA)^{-1}$$

où  $C$  et  $D$  sont deux vecteurs unités du plan auquel est parallèle la seconde rotation et le déplacement des points de  $E_4$  est défini par la correspondance

$$P \rightarrow P^*, \text{ avec } V^* = OP^*.$$

On peut écrire

$$BA = \cos \Phi - \lambda \sin \Phi$$

où  $\lambda$  est le bivecteur unité du plan  $(A, B)$  orienté de façon que la mesure de l'angle dont il faut tourner  $A$  pour l'amener en  $B$  soit précisément  $\Phi$  (à un multiple de  $2\pi$  près). Il est manifeste que si l'on choisit, au lieu de  $A$  et  $B$ , deux vecteurs  $A'$  et  $B'$  du même plan, formant le même angle  $\Phi$ , on aura :

$$BA = B'A'$$

de sorte que la représentation de la rotation  $P \rightarrow P''$  n'est pas unique si l'on a égard aux symétries en lesquelles elle peut se décomposer.

On sait, d'autre part, que le plan de la première rotation ayant été fixé, celui de la seconde s'en déduit univoquement ; donc, en posant :

$$DC = \cos \Psi - \mu \sin \Psi,$$

$\Psi$  et  $\mu$  sont déterminés lorsque  $\lambda$  est fixé. Les deux plans  $\lambda$  et  $\mu$  peuvent être dits *conjugués* dans la rotation considérée de  $E_4$ . Nous allons voir qu'on peut choisir les plans conjugués de façon qu'ils soient absolument perpendiculaires. On a le théorème :

**5.** *Toute rotation de  $E_4$  est le produit de deux rotations parallèles à deux plans absolument perpendiculaires.*

Ce théorème, bien classique, se démontre habituellement par l'analyse des valeurs propres de la matrice orthogonale qui représente la rotation de  $E_4$  autour de l'origine. L'algorithme cliffordien permet d'en donner une démonstration rapide, qui, d'ailleurs, conduit aux conséquences les plus intéressantes.

Cette démonstration fait état des propriétés des *bivecteurs supplémentaires*. Soit un bivecteur unité,  $\beta = \beta_{ik}\Gamma_{ik}$ , le bivecteur unité  $\beta^* = \beta_{ik}^*\Gamma_{ik}$

en est le *supplémentaire*, si les deux plans qu'ils définissent sont absolument perpendiculaires et si les quatre vecteurs unités  $V, W, X, Y$ , et deux à deux perpendiculaires, tels que :

$$\beta = V \times W, \quad \beta^* = X \times Y,$$

forment un tétraèdre dont l'orientation est celle du tétraèdre des coordonnées. On voit aisément que

$$\beta\beta^* = \Gamma_5,$$

car on peut toujours faire une rotation de  $E_4$  qui amène  $\beta$  à être  $\Gamma_{12}$  et  $\beta^*$  à être  $\Gamma_{34}$ , donc, en faisant la rotation inverse, on aura

$$\beta\beta^* = O\Gamma_{12}\Gamma_{34}O^{-1} = \Gamma_5OO^{-1} = \Gamma_5. \quad (O = \text{produit de 4 vecteurs})$$

On a

$$\begin{aligned} \beta^2 &= (\beta_{ik}\Gamma_{ik})(\beta_{rs}\Gamma_{rs}) = -\sum\beta_{ik}^2 + (\beta_{12}\beta_{23} - \beta_{23}\beta_{12} + \\ &+ \beta_{14}\beta_{43} - \beta_{43}\beta_{14})\Gamma_{13} + \dots + 2(\beta_{12}\beta_{34} + \beta_{13}\beta_{42} + \beta_{14}\beta_{23})\Gamma_5 = -\sum\beta_{ik}^2 = -1, \end{aligned}$$

donc, l'inverse du bivecteur unité  $\beta$  est  $-\beta$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} \beta\beta^* &= -\sum\beta_{ik}\beta_{ik}^* + (\beta_{12}\beta_{23}^* - \beta_{23}\beta_{12}^* + \beta_{14}\beta_{43}^* - \beta_{43}\beta_{14}^*)\Gamma_{13} + \dots + \\ &+ (\beta_{12}\beta_{34}^* + \beta_{34}\beta_{12}^* + \beta_{13}\beta_{42}^* + \beta_{42}\beta_{13}^* + \beta_{14}\beta_{23}^* + \beta_{23}\beta_{14}^*)\Gamma_5, \end{aligned}$$

on doit donc avoir

$$\begin{aligned} \sum\beta_{ik}\beta_{ik}^* &= 0, \quad \beta_{12}\beta_{23}^* - \beta_{23}\beta_{12}^* + \beta_{14}\beta_{43}^* - \beta_{43}\beta_{14}^* = 0, \dots \\ \beta_{12}\beta_{34}^* + \beta_{34}\beta_{12}^* + \beta_{13}\beta_{42}^* + \beta_{42}\beta_{13}^* + \beta_{14}\beta_{23}^* + \beta_{23}\beta_{14}^* &= 1 \end{aligned}$$

et l'on satisfera à ces équations en posant

$$\beta_{12}^* = \beta_{34}, \quad \beta_{13}^* = \beta_{42}, \quad \beta_{14}^* = \beta_{23}, \quad \beta_{34}^* = \beta_{12}, \quad \beta_{42}^* = \beta_{13}, \quad \beta_{23}^* = \beta_{42};$$

ce qu'on voit aussi immédiatement en remarquant que

$$\beta\beta^* = \Gamma_5,$$

d'où

$$\beta^* = -\beta\Gamma_5 \text{ car } \beta^{-1} = -\beta.$$

6. Cherchons dès lors à mettre la rotation<sup>10)</sup>

$$DCBA \ V \ ABCD$$

sous la forme

$$dcba \ V \ abcd$$

où le bivecteur  $b \times a$  est absolument perpendiculaire à  $d \times c$ . Nous écrivons

$$\begin{aligned} ba &= \cos \varphi - \alpha \sin \varphi, \\ dc &= \cos \psi - \beta \sin \psi, \end{aligned}$$

et nous chercherons à déterminer  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  de façon que

$$(\cos \varphi - \alpha \sin \varphi) (\cos \psi - \beta \sin \psi) = (\cos \Phi - \lambda \sin \Phi) (\cos \Psi - \mu \sin \Psi)$$

et que

$$\beta = -\Gamma_5 \alpha.$$

Si

$$\lambda = \lambda_{ik} \Gamma_{ik}, \quad \mu = \mu_{ik} \Gamma_{ik},$$

on aura

$$\begin{aligned} &(\cos \Phi - \lambda \sin \Phi) (\cos \Psi - \mu \sin \Psi) = \cos \Phi \cos \Psi + \\ &+ \sin \Phi \sin \Psi [-\sum \lambda_{ik} \mu_{ik} + (\lambda_{12} \mu_{34} + \lambda_{34} \mu_{12} + \lambda_{13} \mu_{42} + \lambda_{42} \mu_{13} + \lambda_{14} \mu_{23} + \lambda_{23} \mu_{14}) \Gamma_5 + \\ &+ (\lambda_{12} \mu_{23} - \lambda_{23} \mu_{12} + \lambda_{14} \mu_{43} - \lambda_{43} \mu_{14}) \Gamma_{13} + \dots + (\dots) \Gamma_{34}] - \lambda \sin \Phi \cos \Psi - \mu \cos \Phi \sin \Psi, \end{aligned}$$

qu'on écrira

$$= I + J \Gamma_5 - C_{ik} \Gamma_{ik},$$

et l'on aura à résoudre le système

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cos \psi &= I, \\ \sin \varphi \sin \psi &= J, \\ -\alpha_{ik} \sin \varphi \cos \psi - \beta_{ik} \cos \varphi \sin \psi &= -C_{ik}. \end{aligned}$$

Or

$$\beta_{12} = \alpha_{34}, \dots, \beta_{ij} = \alpha_{rs}, \quad (ijrs) = \text{permutation paire de } 1, 2, 3, 4,$$

donc

$$(1) \quad \begin{aligned} \cos \varphi \cos \psi &= I, \\ \sin \varphi \sin \psi &= J, \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \alpha_{12} \sin \varphi \cos \psi + \alpha_{34} \cos \varphi \sin \psi &= C_{12}, \\ \alpha_{12} \cos \varphi \sin \psi + \alpha_{34} \sin \varphi \cos \psi &= C_{34}, \end{aligned}$$

<sup>10)</sup> Le calcul est fait pour des  $A, B, C, D$  réels, et l'on recherche des plans absolument perpendiculaires réels. Mais la démonstration est valable pour une rotation quelconque, quitte à laisser tomber les conditions exigées pour la réalité.

et deux systèmes analogues à (2) pour déterminer respectivement  $a_{13}$ ,  $a_{42}$  et  $a_{14}$ ,  $a_{23}$ .

Le système (1) donne  $\varphi$  et  $\psi$  pourvu que

$$|I| \leq 1, \quad |J| \leq 1.$$

Les systèmes du type (2) donnent les  $a_{ik}$  pourvu que

$$D = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi \end{vmatrix} = \sin^2 \varphi - \sin^2 \psi \neq 0.$$

Enfin le problème sera résolu si l'on est assuré que

$$(2') \quad \sum a_{ik}^2 = 1, \quad a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0.$$

On vérifiera qu'il en est bien ainsi après avoir démontré le lemme suivant.

7. Soient deux bivecteurs unités  $\lambda$  et  $\mu$ ; on peut toujours orienter les axes de coordonnées de manière que

$$\lambda = \Gamma_{12}, \quad \mu = \mu_{12}\Gamma_{12} + \mu_{34}\Gamma_{34} + \mu_{13}\Gamma_{13} + \mu_{42}\Gamma_{42},$$

où bien entendu

$$(3) \quad \mu_{12}^2 + \mu_{34}^2 + \mu_{13}^2 + \mu_{42}^2 = 1, \quad \mu_{12}\mu_{34} + \mu_{13}\mu_{42} = 0.$$

En effet, il suffit de mettre les axes des  $x_1, x_2$  dans le plan de  $\lambda$  pour assurer la première condition. On a encore à sa disposition l'orientation de l'axe  $x_1$  dans le plan de  $\lambda$  et l'orientation de l'axe  $x_3$  dans le plan absolument perpendiculaire. En changeant cette orientation, l'expression de  $\lambda$  ne change pas, celle de  $\mu$  change et devient :

$$\begin{aligned} & (\cos \sigma - \sin \sigma \Gamma_{12}) (\cos \tau - \sin \tau \Gamma_{34}) \mu (\cos \tau + \sin \tau \Gamma_{34}) (\cos \sigma + \sin \sigma \Gamma_{12}) \\ & = \mu_{12}\Gamma_{12} + \mu_{34}\Gamma_{34} + \mu'_{13}\Gamma_{13} + \mu'_{14}\Gamma_{14} + \mu'_{23}\Gamma_{23} + \mu'_{42}\Gamma_{42}, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mu'_{13} &= \mu_{13} \cos \sigma \cos \tau - \mu_{14} \cos \sigma \sin \tau + \mu_{23} \sin \sigma \cos \tau - \mu_{42} \sin \sigma \sin \tau, \\ \mu'_{14} &= \mu_{13} \cos \sigma \sin \tau + \mu_{14} \cos \sigma \cos \tau - \mu_{23} \sin \sigma \sin \tau + \mu_{42} \sin \sigma \cos \tau, \\ \mu'_{23} &= \mu_{13} \sin \sigma \cos \tau - \mu_{14} \sin \sigma \sin \tau + \mu_{23} \cos \sigma \cos \tau + \mu_{42} \cos \sigma \sin \tau, \\ \mu'_{42} &= \mu_{13} \sin \sigma \sin \tau + \mu_{14} \sin \sigma \cos \tau + \mu_{23} \cos \sigma \sin \tau - \mu_{42} \cos \sigma \cos \tau, \end{aligned}$$

et il est manifeste qu'on peut déterminer les angles  $\sigma$  et  $\tau$  de manière que

$$\mu'_{14} = \mu'_{23} = 0 ;$$

il suffit que

$$\frac{\mu_{14} \cot \sigma - \mu_{24}}{\mu_{23} \cot \sigma + \mu_{13}} = \frac{\mu_{23} - \mu_{13} \cot \sigma}{\mu_{14} + \mu_{24} \cot \sigma} ,$$

puis

$$\cot \psi = \frac{\mu_{23} - \mu_{13} \cot \varphi}{\mu_{14} \cot \varphi - \mu_{24}} ;$$

c'est-à-dire que  $\cot \sigma$  est racine de l'équation du second degré :

$$(\mu_{14}\mu_{24} + \mu_{14}\mu_{23}) x^2 + (\mu_{14}^2 - \mu_{24}^2 + \mu_{13}^2 - \mu_{23}^2) x - (\mu_{14}\mu_{24} + \mu_{13}\mu_{23}) = 0$$

qui admet deux racines réelles. Le lemme est démontré.

8. Nous pouvons reprendre alors la démonstration de notre théorème. On fera désormais

$$\lambda = \Gamma_{12}, \quad \mu = \mu_{12}\Gamma_{12} + \mu_{34}\Gamma_{34} + \mu_{13}\Gamma_{13} + \mu_{42}\Gamma_{42} ,$$

et les équations (1) s'écrivent

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cos \psi &= \cos \Phi \cos \Psi - \mu_{12} \sin \Phi \sin \Psi , \\ \sin \varphi \sin \psi &= \mu_{34} \sin \Phi \sin \Psi . \end{aligned}$$

Puisque

$$|\mu_{12}| \leq 1, \quad |\mu_{34}| \leq 1,$$

les seconds membres sont inférieurs ou égaux à l'unité en valeur absolue et ce système est dès lors résoluble par rapport à  $\varphi$  et  $\psi$ . Sans nous préoccuper des diverses solutions possibles<sup>11)</sup>, supposons que  $D \neq 0$ , ce qui est le cas général. Il faut montrer que les conditions (2') sont vérifiées. Or les systèmes (2) et analogues donnent, en faisant la somme des carrés et la somme des produits membre à membre des équations de chaque système :

$$\begin{aligned} AS_1 + 4BS_2 &= \Sigma C_{ik}^2, \\ BS_1 + AS_2 &= C_{12}C_{34} + C_{13}C_{42} + C_{14}C_{23} , \end{aligned}$$

où l'on a

$$S_1 = \Sigma a_{ik}^2, \quad S_2 = a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} ,$$

et

<sup>11)</sup> Il est facile de voir que toutes les solutions possibles pour  $\varphi$  et  $\psi$  donnent effectivement les mêmes rotations dans les mêmes plans ; par exemple, en changeant  $\varphi$  en  $-\varphi$ ,  $\psi$  en  $-\psi$ , les  $a$  changent de signe, la rotation reste la même dans le même bivecteur, etc.

$$A = \sin^2 \varphi \cos^2 \psi + \cos^2 \varphi \sin^2 \psi = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi \cos^2 \psi - \sin^2 \varphi \sin^2 \psi \\ = 1 - I^2 - J^2,$$

$$B = \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi \cos \psi = IJ.$$

D'autre part, avec le choix particulier des axes :

$$\begin{aligned} C_{12} &= \sin \Phi \cos \Psi + \mu_{12} \cos \Phi \sin \Psi, \\ C_{34} &= \mu_{34} \cos \Phi \sin \Psi, \\ C_{13} &= \mu_{13} \cos \Phi \sin \Psi, \\ C_{42} &= \mu_{42} \cos \Phi \sin \Psi, \\ C_{23} &= \mu_{13} \sin \Phi \sin \Psi, \\ C_{14} &= \mu_{42} \sin \Phi \sin \Psi, \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de (1) et de la forme de  $\lambda$  et de  $\mu$  :

$$\begin{aligned} \Sigma C_{ik}^2 &= 1 - I^2 - J^2 = A, \\ C_{12} C_{34} + C_{13} C_{42} + C_{14} C_{23} &= IJ = B, \end{aligned}$$

et dès lors

$$(4) \quad \begin{aligned} AS_1 + 4BS_2 &= A \\ BS_1 + AS_2 &= B \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 0,$$

pour autant que l'on n'ait pas

$$A^2 - 4B^2 = 0,$$

ou

$$(\cos^2 \varphi \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi \cos^2 \psi)^2 - 4 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi \cos^2 \varphi \cos^2 \psi = 0,$$

ou encore

$$D^2 = 0,$$

ce qui s'écrit aussi

$$(1 - I^2 - J^2)^2 - 4I^2J^2 = 0.$$

Donc si

$$D \neq 0,$$

on est assuré que

$$\Sigma a_{ik}^2 = 1, \quad a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0.$$

**9.** Le théorème peut donc être en défaut si

$$D = 0;$$

dans ce cas, il y a éventuellement impossibilité ou indétermination. Nous allons voir qu'il y a indétermination, car  $D = 0$  signifie

$$\sin^2 \varphi = \sin^2 \psi$$

ou

$$(1 - I^2 - J^2 - 2 IJ) (1 - I^2 - J^2 + 2 IJ) = 0,$$

soit

$$(I + \varepsilon J)^2 = 1 \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

ce qui semble établir une relation entre  $\lambda$  et  $\mu$  où figurent les projections de  $\lambda$  sur  $\mu$  et sur le plan absolument perpendiculaire à  $\lambda$ , ainsi que les deux angles de rotation  $2\Phi$  et  $2\Psi$ . Or on peut montrer que  $D = 0$  entraîne

$$\frac{C_{12}}{C_{34}} = \frac{C_{13}}{C_{42}} = \frac{C_{14}}{C_{23}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \varphi} = \pm 1 \text{ (suivant que } \sin \varphi = \pm \sin \psi \text{),}$$

c'est-à-dire que les systèmes des équations (2) et analogues sont indéterminés. Pour le faire voir, prenons le cas

$$\sin \varphi = \sin \psi, \quad \cos \varphi = \cos \psi;$$

$$\sin^2 \varphi = I,$$

$$\cos^2 \varphi = J,$$

$$I + J = +1,$$

c'est-à-dire

$$\cos \Phi \cos \Psi - (\mu_{12} - \mu_{34}) \sin \Phi \sin \Psi = 0.$$

Comme on peut évidemment écrire, puisque  $\sum \mu_{ik}^2 = 1$ ,

$$\mu_{12} = \cos \alpha \sin \beta, \quad \mu_{34} = \sin \alpha \cos \gamma,$$

$$\mu_{13} = \cos \alpha \cos \beta, \quad \mu_{42} = \sin \alpha \sin \gamma,$$

et comme

$$\mu_{12}\mu_{34} + \mu_{13}\mu_{42} = 0,$$

on doit avoir

$$\cos \alpha \sin \alpha \sin (\beta + \gamma) = 0,$$

ce qui entraîne (en laissant les cas banals  $\cos \alpha = 0$  ou  $\sin \alpha = 0$ )

$$\gamma = -\beta,$$

car on peut toujours fixer le quadrant de  $\alpha$  pour qu'il en soit ainsi.

Dès lors

$$\cos \Phi \cos \Psi - (\cos a \sin \beta - \sin a \cos \beta) \sin \Phi \sin \Psi = 1$$

ou encore

$$\cos \Phi \cos \Psi + \cos \left( \frac{\pi}{2} + \beta - a \right) \sin \Phi \sin \Psi = 1$$

ce que la trigonométrie sphérique nous oblige d'interpréter par les égalités

$$\Phi = \Psi, \quad \cos \left( \frac{\pi}{2} + \beta - a \right) = 1, \quad \text{soit } \beta = a - \frac{\pi}{2},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= -\cos^2 a, & \mu_{34} &= \sin^2 a \\ \mu_{23} &= \cos a \sin a, & \mu_{42} &= \sin a \cos a, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{C_{12}}{C_{34}} = \frac{1 + \mu_{12}}{\mu_{34}} = 1, \quad \frac{C_{13}}{C_{42}} = 1, \quad \frac{C_{14}}{C_{23}} = 1,$$

ce qui entraîne bien l'indétermination des systèmes (2).

Il conviendrait de voir les autres cas :

$$\sin \varphi = \sin \psi, \quad \cos \varphi = -\cos \psi, \quad \text{ou} \quad \sin \varphi = -\sin \psi, \quad \cos \varphi = \cos \psi$$

ou encore

$$\sin \varphi = -\sin \psi, \quad \cos \varphi = -\cos \psi,$$

mais des calculs faciles redonnent les mêmes conclusions<sup>12)</sup>.

Ainsi donc le théorème énoncé est démontré. La décomposition en un produit de deux rotations autour de deux plans absolument perpendiculaires est possible d'une seule manière, ou bien elle est possible d'une infinité de manières ( $\infty^2$ ).

<sup>12)</sup> Remarquons cependant que si

$$\sin \varphi = \sin \psi, \quad \cos \varphi = -\cos \psi,$$

on devra interpréter l'égalité

$$\cos \Phi \cos \Psi + \cos \left( \frac{\pi}{2} + a + \beta \right) \sin \Phi \sin \Psi = -1;$$

elle implique évidemment

$$\Phi + \Psi = \pi, \quad a + \beta = \frac{\pi}{2}$$

et l'on trouve

$$\frac{C_{12}}{C_{34}} = \frac{C_{13}}{C_{42}} = \frac{C_{14}}{C_{23}} = -1.$$

**Plans conjugués dans un déplacement donné**

10. Le théorème précédent qui nous apprend que tout déplacement de  $E_4$  se décompose en un produit de deux rotations autour de deux plans absolument perpendiculaires, que nous appellerons les *plans fondamentaux* de la rotation, va nous permettre de trouver les relations entre les plans conjugués dont il est question dans le théorème de van Oss.

Soit un déplacement dont les plans fondamentaux sont, ce qui ne restreint pas la généralité, les plans des  $x_1, x_2$  et des  $x_3, x_4$ ,  $2\varphi$  et  $2\psi$  étant les angles de rotation. On écrira donc, pour le produit des quatre vecteurs qui représente le déplacement :

$$(\cos \varphi - \sin \varphi \Gamma_{12}) (\cos \psi - \sin \psi \Gamma_{34}).$$

Nous allons chercher les plans conjugués, définis par les bivecteurs unités  $\lambda$  et  $\mu$  et les angles  $2\Phi$  et  $2\Psi$  de rotation dans ces plans tels que

$$(\cos \varphi - \sin \varphi \Gamma_{12}) (\cos \psi - \sin \psi \Gamma_{34}) = (\cos \Phi - \lambda \sin \Phi) (\cos \Psi - \mu \sin \Psi),$$

d'où

$$(\cos \Phi + \lambda \sin \Phi) (\cos \varphi - \sin \varphi \Gamma_{12}) = (\cos \Psi - \lambda \sin \Psi) (\cos \psi + \sin \psi \Gamma_{34})$$

ce qui est la relation entre  $\lambda$  et  $\mu$ , relation qui doit définir en plus  $\Phi$  et  $\Psi$ . On tire de là huit équations en identifiant les différents termes des nombres de Clifford qui figurent aux deux membres. En posant

$$\lambda = \lambda_{ik} \Gamma_{ik}, \quad \mu = \mu_{ik} \Gamma_{ik},$$

il vient

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \cos \Phi \cos \varphi + \lambda_{12} \sin \Phi \sin \varphi = \cos \Psi \cos \psi + \mu_{34} \sin \Psi \sin \psi \\ \lambda_{34} \sin \Phi \sin \varphi = \mu_{12} \sin \Psi \sin \psi, \\ \cos \Phi \sin \varphi - \lambda_{12} \sin \Phi \cos \varphi = \mu_{12} \sin \Psi \cos \psi, \\ \lambda_{34} \sin \Phi \cos \varphi = \cos \Psi \sin \psi - \mu_{34} \sin \Psi \cos \psi, \\ \lambda_{13} \sin \Phi \cos \varphi + \lambda_{23} \sin \Phi \sin \varphi = -\mu_{13} \sin \Psi \cos \psi + \mu_{14} \sin \Psi \sin \psi, \\ -\lambda_{13} \sin \Phi \sin \varphi + \lambda_{23} \sin \Phi \cos \varphi = -\mu_{23} \sin \Psi \cos \psi - \mu_{42} \sin \Psi \sin \psi, \\ \lambda_{14} \sin \Phi \cos \varphi - \lambda_{42} \sin \Phi \sin \varphi = -\mu_{13} \sin \Psi \sin \psi - \mu_{14} \sin \Psi \cos \psi, \\ \lambda_{14} \sin \Phi \sin \varphi + \lambda_{42} \sin \Phi \cos \varphi = \mu_{23} \sin \Psi \sin \psi - \mu_{42} \sin \Psi \cos \psi. \end{array} \right.$$

A ces équations doivent s'ajouter les conditions

$$(5) \quad \Sigma \lambda_{ik}^2 = 1, \quad \Sigma \mu_{ik}^2 = 1,$$

$$(6) \quad \lambda_{12} \lambda_{34} + \lambda_{13} \lambda_{42} + \lambda_{14} \lambda_{23} = 0, \quad \mu_{12} \mu_{34} + \mu_{13} \mu_{42} + \mu_{14} \mu_{23} = 0,$$

qui ne sont d'ailleurs pas incompatibles avec le système précédent. En supposant connus  $\Phi$  et  $\Psi$ , on tire les valeurs des  $\lambda_{ik}$  en fonction des  $\mu_{ik}$ :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda_{34} &= \mu_{12} \frac{\sin \Psi \sin \psi}{\sin \Phi \sin \varphi} = \frac{1}{\sin \Phi \cos \varphi} \left[ \cos \Psi \sin \psi - \mu_{34} \sin \Psi \cos \psi \right], \\ \lambda_{12} &= \frac{1}{\sin \Phi \cos \varphi} \left[ \cos \Phi \sin \varphi - \mu_{12} \sin \Psi \cos \psi \right] = \\ &= \frac{1}{\sin \Phi \sin \varphi} \left[ \cos \Psi \cos \psi - \cos \Phi \cos \varphi + \mu_{34} \sin \Psi \sin \psi \right]. \end{aligned} \right.$$

$$\lambda_{13} = \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \left[ -\mu_{13} \cos \psi \cos \varphi + \mu_{14} \sin \psi \cos \varphi + \mu_{23} \cos \psi \sin \varphi + \mu_{42} \sin \psi \sin \varphi \right],$$

$$\lambda_{23} = \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \left[ -\mu_{13} \cos \psi \sin \varphi + \mu_{14} \sin \psi \sin \varphi - \mu_{23} \cos \psi \cos \varphi - \mu_{42} \sin \psi \cos \varphi \right],$$

$$\lambda_{14} = \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \left[ -\mu_{13} \sin \psi \cos \varphi - \mu_{14} \cos \psi \cos \varphi + \mu_{23} \sin \psi \sin \varphi - \mu_{42} \cos \psi \sin \varphi \right],$$

$$\lambda_{42} = \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \left[ \mu_{13} \sin \psi \sin \varphi + \mu_{14} \cos \psi \sin \varphi + \mu_{23} \sin \psi \cos \varphi - \mu_{42} \cos \psi \cos \varphi \right].$$

L'élimination de  $\lambda_{34}$  et  $\lambda_{12}$  donne deux relations entre  $\mu_{12}$ ,  $\mu_{34}$ ,  $\Phi$  et  $\Psi$  qu'on peut écrire:

$$\mu_{12} \sin \psi \cos \varphi + \mu_{34} \cos \psi \sin \varphi = \cot \Psi \sin \psi \sin \varphi$$

$$\mu_{12} \cos \psi \sin \varphi + \mu_{34} \sin \psi \cos \varphi = -\cot \Psi \cos \psi \cos \varphi + \frac{\cos \Phi}{\sin \Psi}.$$

Le déterminant de ce système est  $\sin^2 \psi - \sin^2 \varphi$ ; nous le supposons différent de zéro, ce qui est le cas lorsque les deux plans fondamentaux du déplacement sont univoquement déterminés. On voit donc que si l'on se donne arbitrairement les angles de rotation dans les plans, inconnus encore,  $\lambda$  et  $\mu$ , on pourra déterminer les projections des bivecteurs  $\mu$  et  $\lambda$  sur les plans fondamentaux, soient les nombres  $\mu_{12}$ ,  $\mu_{34}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{34}$ . Puis choisissant arbitrairement  $\mu_{13}$ ,  $\mu_{14}$ ,  $\mu_{23}$ ,  $\mu_{34}$ , à cela près qu'on tient compte de (4) et (5), on trouvera  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{23}$ ,  $\lambda_{14}$ ,  $\lambda_{42}$ . Il est aisé de voir que les valeurs ainsi trouvées vérifient (5) et (6). Dès lors la solution du problème comporte quatre arbitraires.

Mais on peut procéder d'une autre manière. On peut se donner le plan  $\mu$ . On trouve alors  $\cos \Psi$ , d'où  $\Psi$  (avec l'ambiguïté  $\Psi$  ou  $\Psi + \pi$ ) et ensuite  $\cos \Phi$  est déterminé; on a

$$\cos \Phi = (\mu_{12} \cos \psi \sin \varphi + \mu_{34} \cos \varphi \sin \psi) \frac{\sin \Psi}{\sin \varphi \sin \psi},$$

et, en élevant au carré, puis remplaçant  $\sin^2 \Psi$  par  $\frac{1}{1 + \cot^2 \Psi}$ , dans quoi l'on substitue la valeur trouvée pour  $\cot \Psi$ , il vient

$$\cos^2 \Phi = \frac{\left( \mu_{12} \frac{\cos \psi}{\sin \varphi} + \mu_{34} \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} \right)^2}{1 + (\mu_{12} \cot \varphi + \mu_{34} \cot \psi)^2}.$$

Le second membre est inférieur à un si  $\mu$  est réel<sup>13</sup>).

Dès lors, on peut se donner arbitrairement  $\mu$ , ce qui est faisable de  $\infty^4$  manières différentes car un plan passant par l'origine dépend de quatre paramètres;  $\Phi$  et  $\Psi$  sont déterminés et le plan  $\lambda$  aussi<sup>14</sup>).

**11.** Les relations entre  $\lambda$  et  $\mu$  peuvent s'interpréter du point de vue de la géométrie réglée. Un bivecteur coupe, en effet, l'hyperplan de l'infini de  $E_4$  suivant une droite dont les coordonnées plückériennes dans cet hyperplan sont les nombres  $\lambda_{ik}$  (ou leurs rapports); la relation entre les deux droites  $\lambda$  et  $\mu$  est évidemment une relation linéaire, comme on peut l'imaginer en évoquant la théorie des déplacements cayleyens, c'est-à-dire des transformations projectives de l'hyperplan de l'infini qui conservent la sphère de l'infini. En transformant les quatre équations du système (4), on trouve:

$$\lambda_{12} = \mu_{34} \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}; \quad \lambda_{34} = \mu_{12} \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \frac{\sin \psi}{\sin \varphi};$$

et par conséquent en supprimant le facteur  $\frac{\sin \Psi}{\sin \Phi}$  qui se trouve partout, la relation linéaire entre les deux droites „conjuguées“  $\lambda$  et  $\mu$  s'écrira:

$$\lambda_{12} = \mu_{34} \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$$

$$\lambda_{34} = \mu_{12} \frac{\sin \psi}{\sin \varphi}$$

<sup>13</sup>) En posant  $\mu_{12} = \cos \alpha \sin \beta$ ,  $\mu_{34} = \cos \alpha \cos \beta$ , ce qui est toujours possible avec  $\alpha$  et  $\beta$  réels, si  $\mu$  est réel, la démonstration de  $\cos^2 \Phi \leq 1$  est très facile.

<sup>14</sup>) De nouveau les ambiguïtés sur  $\Phi$  et  $\Psi$  redonnent les mêmes rotations dans les mêmes plans.

$$\begin{aligned}\lambda_{13} &= -\mu_{13} \cos \psi \cos \varphi + \mu_{14} \sin \psi \cos \varphi + \mu_{23} \cos \psi \sin \varphi + \mu_{42} \sin \psi \sin \varphi, \\ \lambda_{23} &= -\mu_{13} \cos \psi \sin \varphi + \mu_{14} \sin \psi \sin \varphi - \mu_{23} \cos \psi \cos \varphi - \mu_{42} \sin \psi \cos \varphi, \\ \lambda_{14} &= -\mu_{13} \sin \psi \cos \varphi - \mu_{14} \cos \psi \cos \varphi + \mu_{23} \sin \psi \sin \varphi - \mu_{42} \cos \psi \sin \varphi, \\ \lambda_{42} &= \mu_{13} \sin \psi \sin \varphi + \mu_{14} \cos \psi \sin \varphi + \mu_{23} \sin \psi \cos \varphi - \mu_{42} \cos \psi \cos \varphi,\end{aligned}$$

ce qui exprime, moyennant des notations convenables, la conjugaison dans un espace à trois dimensions de deux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  relativement à une sphère dont l'équation homogène peut se mettre sous la forme

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 0.$$

Un tel résultat était évident *a priori*.

## Chapitre IV

### Décomposition du groupe des rotations de $E_4$ autour d'un point en un produit direct de deux sous-groupes

12. Il convient d'étudier plus particulièrement les rotations pour lesquelles les plans fondamentaux  $\alpha$  et  $\beta$  absolument perpendiculaires sont indéterminés. On a vu que cela se produit si

$$(1 - I^2 - J^2)^2 - 4 I^2 J^2 = 0;$$

et alors

$$\sin^2 \psi = \sin^2 \varphi.$$

Voyons donc ce qui caractérise les transformations

$$\begin{aligned}V' &= (\cos \varphi - \sin \varphi \Gamma_{12}) (\cos \varphi - \sin \varphi \Gamma_{34}) V (\cos \varphi + \\ &\quad + \sin \varphi \Gamma_{34}) (\cos \varphi + \sin \varphi \Gamma_{12}),\end{aligned}$$

où l'on a posé  $\psi = \varphi$ . Décomposons  $V$  suivant les deux plans  $\Gamma_{12}$  et  $\Gamma_{34}$ ,

$$V = V_1 + V_2$$

alors

$$V' = V'_1 + V'_2$$

où  $V'_1$  est  $V_1$  tourné dans le plan  $\Gamma_{12}$  de  $2\varphi$ ,  $V'_2$  est  $V_2$  tourné de  $2\varphi$  dans le plan  $\Gamma_{34}$ . Or

$$VV' + V'V = V_1V'_1 + V_2V'_2 + V'_1V_1 + V'_2V_2,$$

c'est-à-dire :

$$V \cdot V' = V_1 \cdot V'_1 + V_2 \cdot V'_2,$$

et si  $V$  est un vecteur unité, on aura, en désignant par  $\sigma$  l'angle de  $V$  avec  $V'$

$$\cos \sigma = V_1^2 \cos 2\varphi + V_2^2 \cos 2\psi = (V_1^2 + V_2^2) \cos 2\varphi = \cos 2\varphi,$$

car

$$V_1^2 + V_2^2 = V^2 = 1.$$

Donc, dans un déplacement du type considéré, tous les vecteurs font un angle égal avec leur transformé. Cet angle est, en valeur absolue, — la seule qu'on puisse considérer ici —

$$\sigma = 2\varphi.$$

Les rotations pour lesquelles les plans fondamentaux sont indéterminés seront appelées *rotations singulières*.

Réciproquement, si, dans une rotation, l'angle que fait un vecteur  $V$  avec son transformé  $V'$  est constant, cette rotation est singulière, car si l'on considère les deux plans fondamentaux de la rotation (qui existent toujours, on en prend un couple quelconque s'ils sont indéterminés) et si  $2\varphi$  et  $2\psi$  sont les angles de rotation dans ces plans, on aura, en décomposant  $V$  et  $V'$  suivant ces plans :

$$V_1^2 \cos 2\varphi + V_2^2 \cos 2\psi = V^2 \cos \sigma = (V_1^2 + V_2^2) \cos \sigma,$$

d'où

$$V_1^2 (\cos 2\varphi - \cos \sigma) + V_2^2 (\cos 2\psi - \cos \sigma) = 0;$$

si

$$V = V_1, \quad \cos 2\psi = \cos \sigma, \quad \text{et si } V = V_2, \quad \cos 2\varphi = \cos \sigma;$$

si donc  $\sigma$  est constant

$$\cos 2\psi = \cos 2\varphi = \cos \sigma.$$

### 13. La condition

$$\sin^2 \psi = \sin^2 \varphi,$$

qui caractérise les rotations singulières, implique que les deux angles de rotation dans les deux plans fondamentaux ont le même cosinus; ces angles de rotation sont égaux en valeur absolue; de plus, bien que les paires de plans fondamentaux soient indéterminées, les angles de rotation ont le même cosinus quelle que soit la paire considérée.

On voit donc qu'on pourra définir deux espèces de rotations singulières. Supposons, en effet, que  $\Gamma_{12}$  et  $\Gamma_{34}$  soient les plans fondamentaux; leur représentation par  $\Gamma_{12}$  et  $\Gamma_{34}$  leur assigne à chacun un sens positif de rotation, celui qui, dans  $\Gamma_{12}$ , amène  $Ox_1$  sur  $Ox_2$  après rotation de  $\frac{\pi}{2}$  et celui qui, dans  $\Gamma_{34}$ , amène  $Ox_3$  sur  $Ox_4$  après rotation de  $\frac{\pi}{2}$ . La relation

$$\cos 2\varphi = \cos 2\psi,$$

veut dire que

$$2\varphi = 2\psi \quad \text{ou} \quad 2\varphi = -2\psi.$$

Donc, les angles de rotation, dans deux plans fondamentaux accouplés,  $\alpha$  et  $\beta$ , d'une rotation singulière, sont égaux ou opposés. La mesure algébrique de ces angles de rotation se fait en assignant à chacun des plans un sens positif de rotation tel que si un déplacement amène  $\alpha$  sur  $\Gamma_{12}$  et  $\beta$  sur  $\Gamma_{34}$ , les deux sens positifs se confondent avec ceux qu'on a définis par les bivecteurs  $\Gamma_{12}$  et  $\Gamma_{34}$ .

Une rotation singulière sera dite de *première espèce* si l'on a :

$$2\varphi = 2\psi ;$$

elle sera dite de *seconde espèce*, si l'on a :

$$2\varphi = -2\psi,$$

naturellement à un multiple de  $2\pi$  près.

14. Soit, dès lors,  $\alpha$  l'un des plans fondamentaux d'une rotation singulière de première espèce,  $\beta = -\Gamma_5\alpha$  sera le second. Désignons par  $2\varphi$  l'angle commun des rotations dans ces deux plans, l'opérateur  $O$  tel que le déplacement s'écrive<sup>15)</sup>

$$V' = OVO^{-1}$$

sera

$$O = \cos^2\varphi - (\alpha + \beta) \cos\varphi \sin\varphi + \sin^2\varphi \Gamma_5.$$

On peut le mettre d'une infinité de manières sous cette forme car

$$\alpha + \beta = (\alpha_{12} + \alpha_{34}) (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + (\alpha_{13} + \alpha_{42}) (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + (\alpha_{14} + \alpha_{23}) (\Gamma_{14} + \Gamma_{23}),$$

et si

<sup>15)</sup> Dorénavant nous donnerons le même nom à la rotation et à l'opérateur: nous dirons la rotation  $O$ .

$$\begin{aligned} \alpha'_{12} + \alpha'_{34} &= \alpha_{12} + \alpha_{34} \\ \alpha'_{13} + \alpha'_{42} &= \alpha_{13} + \alpha_{42} \quad \text{avec} \quad \alpha'_{12}\alpha'_{34} + \alpha'_{13}\alpha'_{42} + \alpha'_{14}\alpha'_{23} = 0, \\ \alpha'_{14} + \alpha'_{23} &= \alpha_{14} + \alpha_{23} \end{aligned}$$

on peut écrire  $O$  sous la forme

$$O = \cos^2 \varphi - (\alpha' + \beta') \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi \Gamma_5$$

où

$$\alpha' = \alpha'_{ik} \Gamma_{ik} \quad \text{et} \quad \beta' = -\Gamma_5 \alpha'.$$

Il y a donc  $\infty^2$  couples de plans fondamentaux pour une rotation singulière de première espèce. Il en est de même pour la seconde espèce, où :

$$O^* = \cos^2 \varphi^* - (\alpha - \beta) \cos \varphi^* \sin \varphi^* - \sin^2 \varphi^* \Gamma_5.$$

On peut poser

$$(7) \quad O = \cos^2 \varphi - \cos \varphi \sin \varphi [\gamma_{12}(\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + \gamma_{13}(\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + \gamma_{14}(\Gamma_{14} + \Gamma_{23})] + \sin^2 \varphi \Gamma_5,$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  étant trois nombres tels que  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ , qui sont déterminés par la donnée de  $\alpha$  et  $\beta$  et qui, à leur tour, permettent de choisir  $\alpha'$  et  $\beta'$ .

**15.** Considérons un second opérateur définissant une rotation singulière de première espèce :

$$O' = \cos^2 \varphi' - \cos \varphi' \sin \varphi' [\gamma'_{12}(\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + \gamma'_{13}(\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + \gamma'_{14}(\Gamma_{14} + \Gamma_{23})] + \sin^2 \varphi' \Gamma_5.$$

Formons le produit  $O'O$ , et démontrons que ce produit est du même type; remarquons qu'on peut choisir les axes de façon que

$$\gamma'_{12} = 1, \quad \gamma'_{13} = 0, \quad \gamma'_{14} = 0.$$

Il vient, dès lors :

$$\begin{aligned} O'O &= \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi' - 2 \gamma_{12} \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi' \cos \varphi' + \\ &+ (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi' + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi' + 2 \gamma_{12} \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi' \cos \varphi') \Gamma_5 + \\ &+ \frac{1}{2} (\cos 2 \varphi \sin 2 \varphi' + \gamma_{12} \cos 2 \varphi' \sin 2 \varphi) (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\gamma_{13} \sin 2 \varphi \cos 2 \varphi' + \gamma_{14} \sin 2 \varphi \sin 2 \varphi') (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\gamma_{14} \sin 2 \varphi \cos 2 \varphi' - \gamma_{13} \sin 2 \varphi \sin 2 \varphi') (\Gamma_{14} + \Gamma_{23}), \end{aligned}$$

et cela peut s'écrire

$$O'O = \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda \Gamma_5 - \cos \lambda \sin \lambda [\gamma''_{12} (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + \gamma''_{13} (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + \gamma''_{14} (\Gamma_{14} + \Gamma_{23})]$$

où

$$\begin{aligned} \cos^2 \lambda &= \cos^2 \varphi \cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi' - 2 \gamma_{12} \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi' \cos \varphi', \\ \sin^2 \lambda &= \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi' + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi' + 2 \gamma_{12} \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi' \cos \varphi', \end{aligned}$$

équations parfaitement compatibles, puis

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4} \left[ (\cos 2 \varphi \sin 2 \varphi' + \gamma_{12} \cos 2 \varphi' \sin 2 \varphi)^2 + (\gamma_{13} \cos 2 \varphi' + \right. \\ &\quad \left. + \gamma_{14} \sin 2 \varphi')^2 \sin^2 2 \varphi + (\gamma_{14} \cos 2 \varphi' - \gamma_{13} \sin 2 \varphi')^2 \sin^2 2 \varphi \right] \\ &= \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda = (\cos^2 \varphi \cos^2 \varphi' + \sin^2 \varphi \sin^2 \varphi' - 2 \gamma_{12} \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi' \cos \varphi') \\ &\quad (\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi' + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi' + 2 \gamma_{12} \sin \varphi \cos \varphi \sin \varphi' \cos \varphi'), \end{aligned}$$

ce qui est exact, car le premier membre est identique au troisième en tenant compte de

$$\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{14}^2 = 1.$$

Le produit  $OO'$  est donc un opérateur relatif à une rotation singulière de première espèce, et l'on peut énoncer le théorème:

*Les rotations singulières de première espèce forment un groupe. Il en est de même des rotations singulières de seconde espèce.*

Il est manifeste que, si  $O_1$  et  $O_2$  sont des rotations d'espèces différentes ayant un couple de plans fondamentaux communs,

$$O_1 O_2 = O_2 O_1$$

car ces déplacements sont évidemment permutables.

Il faut trouver le nombre de paramètres de chacun des groupes dont on vient de démontrer l'existence. Les  $\gamma$  ne sont pas indépendants, la somme de leurs carrés vaut un, il y a donc deux paramètres pour fixer les  $\gamma$ ,  $\varphi$  en est un troisième qui achève de déterminer la rotation de première espèce. Ces trois paramètres sont essentiels. Chaque rotation de seconde espèce dépend aussi de trois paramètres. Je dis que:

**16.** *Toute rotation de  $E_4$  autour d'un point est le produit de deux rotations singulières, l'une de première espèce, l'autre de seconde espèce, qui sont d'ailleurs permutables.*

Soient, en effet,  $\pi_2$  et  $\pi_2^*$  les deux plans fondamentaux de la rotation considérée, et  $2\varphi$ ,  $2\psi$  les angles de rotation dans ces plans. La rotation

singulière de première espèce ayant  $\pi_2$  et  $\pi_2^*$  comme plans fondamentaux et d'angle  $\varphi + \psi$  et la rotation singulière de seconde espèce, de mêmes plans fondamentaux, mais d'angle  $\varphi - \psi$ , sont évidemment permutable et leur produit est la rotation considérée, car ce produit revient à la suite de deux rotations, l'une parallèle à  $\pi_2$  d'angle

$$\varphi + \psi + \varphi - \psi = 2\varphi,$$

l'autre parallèle à  $\pi_2^*$  d'angle

$$\varphi + \psi - (\varphi - \psi) = 2\psi.$$

Si cette rotation donnée a pour symbole  $R$ ,

on aura 
$$V' = R V R^{-1},$$

$$R = [\cos^2(\varphi + \psi) - (\pi_2 + \pi_2^*) \cos(\varphi + \psi) \sin(\varphi + \psi) + \sin^2\varphi \Gamma_5] [\cos^2(\varphi - \psi) - (\pi_2 - \pi_2^*) \sin(\varphi - \psi) \cos(\varphi - \psi) - \sin^2(\varphi - \psi) \Gamma_5].$$

Réciproquement, le produit de deux rotations singulières d'espèces différentes est une rotation non-singulière.

En effet, on peut écrire les opérateurs des deux espèces différentes :

$$O_1 = \cos^2\varphi - \cos\varphi \sin\varphi [\gamma_1 (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + \gamma_2 (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + \gamma_3 (\Gamma_{14} + \Gamma_{23})] + \sin^2\varphi \Gamma_5,$$

$$O_2 = \cos^2\varphi' - \cos\varphi' \sin\varphi' [\gamma_1' (\Gamma_{12} - \Gamma_{34}) + \gamma_2' (\Gamma_{13} - \Gamma_{42}) + \gamma_3' (\Gamma_{14} - \Gamma_{23})] - \sin^2\varphi' \Gamma_5,$$

où l'on a

$$\Sigma \gamma_i^2 = 1, \quad \Sigma \gamma_i'^2 = 1.$$

Je dis qu'on peut trouver des paramètres  $a_{ik}$  tels que :

$$\begin{array}{ll} a_{12} + a_{34} = \gamma_1, & a_{12} - a_{34} = \gamma_1', \\ a_{13} + a_{42} = \gamma_2, & a_{13} - a_{42} = \gamma_2', \\ a_{14} + a_{23} = \gamma_3, & a_{14} - a_{23} = \gamma_3', \end{array}$$

et tels que  $a_{ik} \Gamma_{ik}$  soit un bivecteur unité, définissant, dès lors, un plan fondamental commun à  $O_1$  et à  $O_2$  ; il suffit de poser

$$\alpha_{12} = \frac{\gamma_1 + \gamma'_1}{2}, \dots$$

$$\alpha_{34} = \frac{\gamma_1 - \gamma'_1}{2}, \dots$$

et l'on a bien

$$\sum \alpha_{ik}^2 = 1, \quad \alpha_{12}\alpha_{34} + \alpha_{13}\alpha_{42} + \alpha_{14}\alpha_{23} = 0;$$

on aura, dès lors :

$$O_1 = \cos^2\varphi - \cos\varphi \sin\varphi [(\alpha_{12} + \alpha_{34})(\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + (\alpha_{13} + \alpha_{42})(\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + (\alpha_{14} + \alpha_{23})(\Gamma_{14} + \Gamma_{23})] + \sin^2\varphi \Gamma_5,$$

$$O_2 = \cos^2\varphi' - \cos\varphi' \sin\varphi' [(\alpha_{12} - \alpha_{34})(\Gamma_{12} - \Gamma_{34}) + (\alpha_{13} - \alpha_{42})(\Gamma_{13} - \Gamma_{42}) + (\alpha_{14} - \alpha_{23})(\Gamma_{14} - \Gamma_{23})] - \sin^2\varphi' \Gamma_5,$$

ces deux rotations d'espèces différentes sont ainsi rapportées à deux plans fondamentaux communs, qui sont les deux plans fondamentaux de la rotation résultante.

On eût pu prévoir que deux rotations singulières d'espèces différentes ont toujours un couple de plans fondamentaux commun, car la rotation résultante  $R$  est le produit de deux rotations singulières  $O'_1, O'_2$  permutables :

$$O_1 O_2 = R = O'_1 O'_2 = O'_2 O'_1,$$

d'où

$$O_1^{-1} O_2 = O'_2 O_2^{-1},$$

ce qui n'est possible que si le résultat commun de ces multiplications est l'unité, donc

$$O_1 = O'_1, \quad O_2 = O'_2,$$

et dès lors,  $O_1$  et  $O_2$  ont un couple de plans fondamentaux communs. On a donc encore

$$O_1 O_2 = O_2 O_1.$$

**17.** Voici deux théorèmes presque évidents.

*Le sous-groupe des rotations singulières de première espèce  $G_3$  (et celui des rotations de seconde espèce  $G'_3$ ) est un sous-groupe invariant du groupe des rotations  $G_6$  autour d'un point.*

\*

Car

$$O_1 G_3 O^{-1} = G_3 ,$$

puis, si  $O_1$  est dans  $G_3$  et  $O_2$  dans  $G'_3$  ,

$$O_2 O_1 O_2^{-1} = O_1 O_2 O_2^{-1} = O_1 ,$$

donc

$$O_2 G_3 O_2^{-1} = G_3 . \quad (C. Q. F. D.)$$

$G_6$  est le produit direct de  $G_3$  par  $G'_3$  :

$$G_6 = G_3 \times G'_3 .$$

C'est ce qui résulte de la définition même du produit direct et des théorèmes précédents.

Toute la théorie précédente peut se transporter *mutatis mutandis* dans la géométrie elliptique à trois dimensions et l'on peut retrouver avec aisance les propriétés des translations de première espèce et de seconde espèce ainsi que la décomposition d'un déplacement elliptique en un produit de deux translations d'espèces différentes.

**18. Transformations infinitésimales de  $G_3$  et de  $G'_3$ .** Il est manifeste que, si dans les opérateurs  $O_1$  et  $O_2$ , on donne à l'angle  $\varphi$  ou à l'angle  $\varphi'$  des valeurs infinitésimales  $\delta\varphi$  et  $\delta\varphi'$ , on aura, en négligeant  $\sin^2\varphi$  et  $\sin^2\varphi'$  et en remplaçant  $\sin\varphi$  par  $\delta\varphi$ ,  $\sin\varphi'$  par  $\delta\varphi'$ , les opérateurs infinitésimaux :

$$O_1 = 1 - [\gamma_1 \delta\varphi (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + \gamma_2 \delta\varphi (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + \gamma_3 \delta\varphi (\Gamma_{14} + \Gamma_{23})] ,$$

$$O_2 = 1 - [\gamma'_1 \delta\varphi' (\Gamma_{12} - \Gamma_{34}) + \gamma'_2 \delta\varphi' (\Gamma_{13} - \Gamma_{42}) + \gamma'_3 \delta\varphi' (\Gamma_{14} - \Gamma_{23})] ,$$

ou encore

$$O_1 = 1 - (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) \delta\varphi_1 - (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) \delta\varphi_2 - (\Gamma_{14} + \Gamma_{23}) \delta\varphi_3 ,$$

$$O_2 = 1 - (\Gamma_{12} - \Gamma_{34}) \delta\varphi'_1 - (\Gamma_{13} - \Gamma_{42}) \delta\varphi'_2 - (\Gamma_{14} - \Gamma_{23}) \delta\varphi'_3 .$$

Naturellement  $O_1^{-1}$  et  $O_2^{-1}$  s'obtiennent en changeant dans  $O_1$  et  $O_2$  respectivement  $\delta\varphi_i$  par  $-\delta\varphi_i$ ,  $\delta\varphi'_i$  par  $-\delta\varphi'_i$ . En considérant le vecteur

$$V = x_i \Gamma_i ,$$

on aura, pour  $O_1$  :

\*

$$\delta V = - [\delta\varphi_1 (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + \delta\varphi_2 (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + \delta\varphi_3 (\Gamma_{14} + \Gamma_{23})] V + \\ + V [\delta\varphi_1 (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + \delta\varphi_2 (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + \delta\varphi_3 (\Gamma_{14} + \Gamma_{23})],$$

et si

$$\delta V = \delta x_i \Gamma_i,$$

on trouvera sans peine

$$\delta V = \delta_1 V + \delta_2 V + \delta_3 V,$$

où  $\delta_i V$  est la contribution à  $\delta V$  due aux termes en  $\delta\varphi_i$ :

$$\delta_1 V = 2 (x_1 \Gamma_2 - x_2 \Gamma_1 + x_3 \Gamma_4 - x_4 \Gamma_3) \delta\varphi_1,$$

soit

$$\delta_1 x_1 = -2 x_2 \delta\varphi_1,$$

$$\delta_1 x_2 = 2 x_1 \delta\varphi_1,$$

$$\delta_1 x_3 = -2 x_4 \delta\varphi_1,$$

$$\delta_1 x_4 = 2 x_3 \delta\varphi_1,$$

ce qui définit une transformation infinitésimale de symbole:

$$X_1 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

On trouvera de même

$$X_2 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4},$$

$$X_3 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Le calcul analogue pour  $O_2$  donne:

$$X'_1 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \left( x_3 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right),$$

$$X'_2 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \left( x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_4} \right),$$

$$X'_3 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \left( x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right),$$

ce qui correspond exactement aux résultats que M. Ullmo a obtenus en appliquant la théorie de M. Cartan sur la structure des groupes.

**Recherche des invariants des sous-groupes  $G_3$  et  $G'_3$   
Semi-vecteurs et spineurs**

19. Il est manifeste qu'il n'y a pas de vecteurs invariants par  $G_3$  ni par  $G'_3$ . Il se peut qu'il y ait des tenseurs antisymétriques qui le soient. Pour cela, il faut et il suffit que

$$O_1 (a_{ik} \Gamma_{ik}) O_1^{-1} = a_{ik} \Gamma_{ik} ,$$

quels que soient  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  [cf. éq. (7)]. On peut écrire cette équation sous la forme du système suivant

$$(8) \quad \begin{aligned} (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) a_{ik} \Gamma_{ik} &= (a_{ik} \Gamma_{ik}) (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) , \\ (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) a_{ik} \Gamma_{ik} &= (a_{ik} \Gamma_{ik}) (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) , \\ (\Gamma_{14} + \Gamma_{23}) a_{ik} \Gamma_{ik} &= (a_{ik} \Gamma_{ik}) (\Gamma_{14} + \Gamma_{23}) ; \end{aligned}$$

or ces relations ne sont possibles, outre le cas banal  $a_{ik} = 0$ , comme on s'en rend compte aisément, que si  $a_{ik} \Gamma_{ik}$  est un diviseur de zéro<sup>16)</sup> et si chacun des membres en est nul. Or

$$\Gamma_{12} + \Gamma_{34} = \Gamma_{12} (1 - \Gamma_5) ,$$

donc

$$\Gamma_{12} (1 - \Gamma_5) a_{ik} \Gamma_{ik} = 0 = (a_{ik} \Gamma_{ik}) \Gamma_{12} (1 - \Gamma_5) ,$$

mais

$$(1 + \Gamma_5) (1 - \Gamma_5) = (1 - \Gamma_5) (1 + \Gamma_5) = 0 ;$$

si donc, on a

$$a_{ik} \Gamma_{ik} = (1 + \Gamma_5) a'_{ik} \Gamma_{ik} ,$$

où  $a'_{ik} \Gamma_{ik}$  est un tenseur quelconque, le tenseur  $a_{ik} \Gamma_{ik}$  sera un tenseur invariant pour  $G_3$  car les trois égalités (8) seront vérifiées en même temps.

D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned} (1 + \Gamma_5) a'_{ik} \Gamma_{ik} &= (a'_{12} - a'_{34}) (\Gamma_{12} - \Gamma_{34}) + (a'_{13} - a'_{42}) (\Gamma_{13} - \Gamma_{42}) + \\ &\quad + (a'_{14} - a'_{23}) (\Gamma_{14} - \Gamma_{23}) , \end{aligned}$$

et, par suite, la forme générale des tenseurs invariants par  $G_3$  est :

$$\lambda_1 (\Gamma_{12} - \Gamma_{34}) + \lambda_2 (\Gamma_{13} - \Gamma_{42}) + \lambda_3 (\Gamma_{14} - \Gamma_{23}) ,$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont trois nombres arbitraires.

<sup>16)</sup> On sait qu'un nombre hypercomplexe, différent de zéro, est dit *diviseur de zéro*, s'il existe un autre nombre hypercomplexe, non-nul aussi, dont le produit par le premier est nul; de tels nombres n'ont pas d'inverse.

De la même manière, les tenseurs invariants par  $G'_3$  se mettent sous la forme :

$$\lambda'_1 (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + \lambda'_2 (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + \lambda'_3 (\Gamma_{14} + \Gamma_{23}).$$

On dira que le tenseur  $-\Gamma_5 (a_{ik} \Gamma_{ik})$  est *duel* du tenseur  $a_{ik} \Gamma_{ik}$  ; dès lors :

*Les tenseurs antisymétriques du second ordre, invariants par  $G_3$ , sont opposés à leur duel, alors que ceux qui sont invariants par  $G'_3$  sont égaux à leur duel.*

Avant de chercher dans quelles circonstances un tel tenseur est un bivecteur, on peut remarquer que l'expression

$$(1 + \Gamma_5) V \times W = \frac{1}{2} (1 + \Gamma_5) (VW - WV)$$

est un tenseur invariant par  $G_3$ , de même

$$(1 - \Gamma_5) V \times W = \frac{1}{2} (1 - \Gamma_5) (VW - WV)$$

l'est par  $G'_3$ ,  $V$  et  $W$  étant deux vecteurs. Or chacun de ces invariants est une somme de trois invariants de la forme :

$$A (\Gamma_{12} \pm \Gamma_{34}) + B (\Gamma_{13} \pm \Gamma_{42}) + C (\Gamma_{14} \pm \Gamma_{23}).$$

Ainsi donc deux vecteurs  $V$  et  $W$  ont quatre invariants relativement au groupe  $G_3$ , leur produit scalaire

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4,$$

et les trois combinaisons

$$\begin{aligned} v_1 w_2 - v_2 w_1 - (v_3 w_4 - v_4 w_3), \\ v_1 w_3 - v_3 w_1 - (v_4 w_2 - v_2 w_4), \\ v_1 w_4 - v_4 w_1 - (v_2 w_3 - v_3 w_2). \end{aligned}$$

De même deux vecteurs  $V$  et  $W$  ont quatre invariants relativement à  $G'_3$  :

$$\begin{aligned} v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4, \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 + (v_3 w_4 - v_4 w_3), \\ v_1 w_3 - v_3 w_1 + (v_4 w_2 - v_2 w_4), \\ v_1 w_4 - v_4 w_1 + (v_2 w_3 - v_3 w_2). \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier de mentionner les deux expressions

$$\Sigma v_i^2, \quad \Sigma w_i^2,$$

qui sont aussi bien invariantes par  $G_3$  que par  $G'_3$ .

20. MM. Einstein et Mayer ont introduit les notions de *semi-vecteurs de première et de seconde espèce*. Un semi-vecteur de première espèce est une grandeur à quatre composantes; lorsque l'on fait subir à l'espace  $E_4$  une rotation quelconque se décomposant en

$$R = O_1 O_2,$$

le semi-vecteur en question se transforme comme un vecteur de mêmes composantes se transforme par la rotation singulière  $O_1$ . Il est de seconde espèce s'il se transforme par  $O_2$ . C'est dire que les semi-vecteurs sont des grandeurs des groupes  $G_3$  ou  $G'_3$ . Deux semi-vecteurs d'une espèce ont donc trois invariants en plus des trois qu'ils ont lorsqu'on les considère comme des vecteurs.

21. Il peut y avoir quelque intérêt à étudier les tenseurs invariants par  $G_3$  ou  $G'_3$  qui sont des bivecteurs. Bornons-nous à la première espèce, c'est-à-dire à  $G_3$ . Le tenseur

$$(9) \quad \lambda_1 (\Gamma_{12} - \Gamma_{34}) + \lambda_2 (\Gamma_{13} - \Gamma_{42}) + \lambda_3 (\Gamma_{14} - \Gamma_{23})$$

est invariant par  $G_3$ ; ce sera un bivecteur, et il représentera un plan invariant, si

$$(10) \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0.$$

Il y a donc  $\infty^1$  plans invariants par  $G_3$ <sup>17)</sup>; ils sont déterminés par les rapports  $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$  et par la condition (10).

Montrons que par chaque droite isotrope, on peut faire passer un tel plan.

Choisissons les axes de telle façon que la droite isotrope considérée porte le vecteur

$$V = v_1 \Gamma_1 + v_2 \Gamma_2, \text{ avec } v_1^2 + v_2^2 = 0.$$

Pour que

$$W = w_i \Gamma_i$$

forme avec  $V$  un bivecteur du type indiqué, il faut et il suffit que

$$\frac{1}{2} (VW - WV),$$

soit de la forme (9). Or

$$\frac{1}{2} (VW - WV) = (v_1 w_2 - v_2 w_1) \Gamma_{12} + v_1 w_3 \Gamma_{13} + v_1 w_4 \Gamma_{14} + v_2 w_3 \Gamma_{23} - v_2 w_4 \Gamma_{42},$$

<sup>17)</sup> Cela veut dire qu'ils dépendent d'un paramètre complexe.

le coefficient de  $\Gamma_{12}$  doit être opposé à celui de  $\Gamma_{34}$ , celui de  $\Gamma_{13}$  à celui de  $\Gamma_{42}$ , celui de  $\Gamma_{14}$  à celui de  $\Gamma_{23}$ , donc :

$$\begin{aligned} v_1 w_2 - v_2 w_1 &= 0, \\ v_1 w_3 - v_2 w_4 &= 0, \\ v_1 w_4 + v_2 w_3 &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{w_3}{w_4} = -\frac{w_4}{w_3},$$

donc

$$w_3^2 + w_4^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$w_3 = \pm i w_4 \quad \text{et} \quad w_2 = \pm i w_1,$$

ce qui montre que  $W$  est aussi isotrope, mais ce n'est pas un vecteur isotrope quelconque, il est de la forme

$$W = s_1 (\Gamma_1 \pm i \Gamma_2) + s_2 (\Gamma_3 \mp i \Gamma_4),$$

$s_1$  et  $s_2$  étant deux paramètres arbitraires, alors qu'un vecteur isotrope, en général, dépend de trois paramètres. Plus précisément, la direction isotrope de  $W$  dépend d'un paramètre, le rapport  $\frac{s_1}{s_2}$ , tandis que la direction la plus générale d'une droite isotrope dépend de deux paramètres.

**22.** On peut retrouver les résultats précédents par une méthode plus générale et plus rigoureuse<sup>18)</sup>. Cherchons deux vecteurs  $V$  et  $W$  dont le plan soit invariant par  $G_3$ . On devra écrire :

$$(11) \quad \begin{aligned} v_1 w_2 - v_2 w_1 &= -(v_3 w_4 - v_4 w_3), \\ v_1 w_3 - v_3 w_1 &= -(v_4 w_2 - v_2 w_4), \\ v_1 w_4 - v_4 w_1 &= -(v_2 w_3 - v_3 w_2), \end{aligned}$$

d'où après multiplication par  $v_1, v_2, v_3$  et addition,

$$v_1 (v_2 w_2 + v_3 w_3 + v_4 w_4) - (v_2^2 + v_3^2 + v_4^2) w_1 = 0,$$

soit

$$v_1 V \cdot W - V^2 w_1 = 0,$$

d'où, bien évidemment,

<sup>18)</sup> Dans la première méthode,  $V$  a une forme particulière, il se pourrait qu'on objectât que la forme de  $W$  qu'on a trouvée provient du choix particulier des axes.

$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{V^2}{V \cdot W} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3} = \frac{v_4}{w_4},$$

ce qui montre soit que  $V$  et  $W$  sont parallèles; c'est là une banalité qui ne répond pas à notre problème, soit que

$$V^2 = 0 \quad \text{et} \quad V \cdot W = 0;$$

d'ailleurs, en multipliant par  $w_2, w_3, w_4$ , et additionnant membre à membre les équations (11), on eût trouvé

$$W^2 = 0.$$

*Les plans invariants sont donc déterminés par des paires de vecteurs isotropes perpendiculaires l'un à l'autre.*

**23.** Or les composantes d'un vecteur isotrope  $V$ , pour lequel on a donc

$$\Sigma v_i^2 = 0,$$

peuvent se représenter au moyen de trois paramètres sous la forme

$$\begin{aligned} v_1 &= i \lambda (1 - \mu \nu), \\ v_2 &= \lambda (1 + \mu \nu), \\ v_3 &= i \lambda (\mu + \nu), \\ v_4 &= \lambda (\mu - \nu); \end{aligned}$$

soit pour  $W$  la représentation analogue:

$$\begin{aligned} w_1 &= i \lambda' (1 - \mu' \nu'), \\ w_2 &= \lambda' (1 + \mu' \nu'), \\ w_3 &= i \lambda' (\mu' + \nu'), \\ w_4 &= \lambda' (\mu' - \nu'). \end{aligned}$$

La condition  $\Sigma v_i w_i = 0$  donne

$$(\mu - \mu') (\nu - \nu') = 0,$$

et les conditions (11) donnent:

$$\begin{aligned} (\mu - \mu') (\nu + \nu') &= 0, \\ (\mu - \mu') (1 + \nu \nu') &= 0, \\ (\mu - \mu') (2 - \nu \nu') &= 0. \end{aligned}$$

On tire de là

$$\mu = \mu' = 0.$$

Remarquons maintenant que si  $V$  et  $W$  sont des solutions de notre problème,  $\varrho V + \sigma W$  et  $\varrho' V + \sigma' W$  en sont encore. On peut s'arranger, en particulier, pour que les deux vecteurs définissant le plan invariant soient chacun de la forme  $\alpha U + \beta Z$ ,  $U$  et  $Z$  étant deux vecteurs isotropes orthogonaux déterminés du plan. En effet, fixons  $\mu, \nu, \mu' = \mu$ . Posons ensuite  $\lambda = \lambda' = 1$ , puis

$$\begin{aligned}\varrho v_1 + \sigma w_1 &= i(\varrho v_2 + \sigma w_2), \\ \varrho v_3 + \sigma w_3 &= i(\varrho v_4 + \sigma w_4); \end{aligned}$$

on tire de là

$$\begin{aligned}\varrho(1 - \mu\nu) + \sigma(1 - \mu\nu') &= \varrho(1 + \mu\nu) + \sigma(1 + \mu\nu'), \\ \varrho(\mu + \nu) + \sigma(\mu + \nu') &= \varrho(\mu - \nu) + \sigma(\mu - \nu'), \end{aligned}$$

soit

$$\varrho\nu + \sigma\nu' = 0, \quad \text{donc} \quad \varrho = \nu', \quad \sigma = -\nu, \quad \text{par exemple.}$$

Puis, posons

$$\begin{aligned}\varrho' v_1 + \sigma' w_1 &= -i(\varrho' v_2 + \sigma' w_2), \\ \varrho' v_3 + \sigma' w_3 &= -i(\varrho' v_4 + \sigma' w_4), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\varrho'(1 - \mu\nu) + \sigma'(1 - \mu\nu') &= -\varrho'(1 + \mu\nu) - \sigma'(1 + \mu\nu'), \\ \varrho'(\mu + \nu) + \sigma'(\mu + \nu') &= -\varrho'(\mu - \nu) - \sigma'(\mu - \nu'), \end{aligned}$$

soit

$$\varrho' + \sigma' = 0.$$

Ainsi donc, la paire des deux vecteurs — qu'on appellera encore  $V$  et  $W$  — isotropes rectangulaires, qui soit la plus simple possible pour déterminer un plan invariant est définie par les égalités

$$\begin{aligned}v_1 &= i(\nu' - \nu), & w_1 &= i\mu(\nu' - \nu), \\ v_2 &= \nu' - \nu, & w_2 &= -\mu(\nu' - \nu), \\ v_3 &= i\mu(\nu' - \nu), & w_3 &= -i(\nu' - \nu), \\ v_4 &= \mu(\nu' - \nu), & w_4 &= \nu' - \nu, \end{aligned}$$

et l'on peut poser, ce qui n'est pas contradictoire avec la première méthode, mais plus précis :

$$(12) \quad \begin{aligned}V &= \xi_1(\Gamma_1 - i\Gamma_2) + \xi_2(\Gamma_3 - i\Gamma_4), \\ W &= \xi_2(\Gamma_1 + i\Gamma_2) - \xi_1(\Gamma_3 + i\Gamma_4); \end{aligned}$$

le bivecteur invariant est alors

$$2i\xi_1\xi_2(\Gamma_{12} - \Gamma_{34}) - (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\Gamma_{13} - \Gamma_{42}) - i(\xi_1^2 - \xi_2^2)(\Gamma_{14} - \Gamma_{23}).$$

On a donc formé des vecteurs isotropes ayant deux „composantes“ distinctes. A chacun d'eux,  $V$ , on peut en associer un autre,  $V$ , par une règle que les équations (12) expriment (si l'on fait jouer aux axes  $Ox_1$  et  $Ox_2$  un rôle particulier). Le produit  $VW$  est alors invariant par  $G_3$ .

Réciproquement, on peut se donner un bivecteur invariant par  $G_3$ :

$$\gamma_1 (\Gamma_{12} - \Gamma_{34}) + \gamma_2 (\Gamma_{13} - \Gamma_{42}) + \gamma_3 (\Gamma_{14} - \Gamma_{23}),$$

avec

$$(13) \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 0.$$

Comme on peut résoudre l'équation (13) par les formules bien connues:

$$(14) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= 2i \xi_1 \xi_2, \\ \gamma_2 &= -(\xi_1^2 + \xi_2^2), \\ \gamma_3 &= -i(\xi_1^2 - \xi_2^2), \end{aligned}$$

dépendent de deux paramètres, les formules (12) définissent un couple de vecteurs isotropes perpendiculaires dans le bivecteur donné; ce couple n'est évidemment pas unique, car si  $(\xi_1, \xi_2)$  en définit un,  $(-\xi_1, -\xi_2)$  en définit un autre, et l'on peut encore échanger le rôle des  $\gamma_i$  dans (13).

**24.** En partant des conditions relatives à  $G'_3$  on eût obtenu les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} V' &= \eta_1 (\Gamma_1 - i\Gamma_2) + \eta_2 (\Gamma_3 + i\Gamma_4), \\ W' &= \eta_2 (\Gamma_1 + i\Gamma_2) - \eta_1 (\Gamma_3 - i\Gamma_4), \end{aligned}$$

et le bivecteur invariant eût été:

$$2i \eta_1 \eta_2 (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) - (\eta_1^2 + \eta_2^2) (\Gamma_{13} + \Gamma_{42}) + i(\eta_1^2 - \eta_2^2) (\Gamma_{14} + \Gamma_{23}).$$

**25.** On peut résumer les résultats précédents dans les définitions et les théorèmes suivants.

Considérons dans  $E_4$  deux plans réels absolument perpendiculaires, passant par le point  $O$  et, dans ces plans, quatre axes de coordonnées. Prenons dans chacun de ces plans deux vecteurs isotropes distincts  $v_1$  et  $\tilde{v}_1$  pour le premier,  $v_2$  et  $\tilde{v}_2$  pour le second [dans les formules (12), on a supposé que les deux plans sont les plans des  $x_1, x_2$  et des  $x_3, x_4$ ]. Considérons les vecteurs isotropes à deux composantes

$$(15) \quad \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2$$

nous les appellerons des *spineurs*, et, si nous les considérons comme des semi-vecteurs de première espèce, nous les nommerons *spineurs de première espèce*. A un spineur comme (15) correspond un spineur

$$(16) \quad \xi_2 \tilde{v}_1 - \xi_1 \tilde{v}_2$$

qui lui est *associé*.

Un bivecteur invariant par  $G_3$  contient un et un seul spineur de la forme (15) (au sens près): ce bivecteur est parfaitement déterminé par le couple de vecteurs associés (15) et (16) et, réciproquement, tout bivecteur invariant par  $G_3$  détermine un couple de spineurs associés de la forme (15) et (16).

En formant les expressions:

$$(17) \quad \eta_1 v_1 + \eta_2 \tilde{v}_2,$$

$$(18) \quad \eta_2 \tilde{v}_1 - \eta_1 v_2,$$

on obtient des spineurs associés dans un bivecteur invariant par  $G_3$ .

Remarquons que  $v_1 v_2$ , ou  $\tilde{v}_1 \tilde{v}_2$  sont des bivecteurs invariants par  $G'_3$ ; d'une manière générale, le produit de deux spineurs comme (15) ou de deux spineurs comme (16) sont des bivecteurs invariants par  $G'_3$  et, inversement, le produit de deux spineurs du type (17) ou de deux spineurs du type (18) est un bivecteur invariant par  $G_3$ .

**26.** On voit donc que, de même que les vecteurs de  $E_4$  (ou les semi-vecteurs) sont des grandeurs à quatre composantes rapportées aux vecteurs de base  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ , les spineurs sont des grandeurs à deux composantes, associées deux à deux, chaque paire étant rapportée aux *spineurs de base*

$$\Gamma_1 - i\Gamma_2, \Gamma_1 + i\Gamma_2, \Gamma_3 - i\Gamma_4, \Gamma_3 + i\Gamma_4,$$

qu'on représentera dorénavant par les lettres

$$\gamma_1, \tilde{\gamma}_1, \gamma_2, \tilde{\gamma}_2,$$

respectivement. Ayant ainsi fixé les spineurs de base, une *paire de spineurs associés par  $G_3$*  est déterminée univoquement par un bivecteur invariant dans  $G_3$  par des formules de la forme

$$(19) \quad \begin{aligned} s_1^* &= \xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2, \\ s_1^{**} &= \xi_2 \tilde{\gamma}_1 - \xi_1 \tilde{\gamma}_2; \end{aligned}$$

une *paire de spineurs associés par  $G'_3$*  est déterminée univoquement par un bivecteur invariant dans  $G'_3$  par des formules de la forme

$$(20) \quad \begin{aligned} s_2^* &= \eta_1 \gamma_1 + \eta_2 \tilde{\gamma}_2, \\ s_2^{**} &= \eta_2 \tilde{\gamma}_1 - \eta_1 \gamma_2. \end{aligned}$$

On peut prendre pour les spineurs de base quatre vecteurs isotropes quelconques, situés deux à deux dans deux plans réels<sup>19)</sup> absolument perpendiculaires. On les associe deux à deux et l'on obtient, par les combinaisons (19) ou (20) des paires de spineurs associés par  $G_3$  ou par  $G'_3$ .

## Chapitre VI

### Expression des rotations de l'espace $E_4$ au moyen du groupe unimodulaire de deux variables

27. On a vu que, parmi les vecteurs isotropes de  $E_4$  les spineurs

$$\begin{aligned} \xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2, & \quad \text{où} \quad \gamma_1 = \Gamma_1 - i\Gamma_2, \quad \gamma_2 = \Gamma_3 - i\Gamma_4, \\ \eta_1 \gamma_1 + \eta_2 \tilde{\gamma}_2, & \quad \tilde{\gamma}_1 = \Gamma_1 + i\Gamma_2, \quad \tilde{\gamma}_2 = \Gamma_3 + i\Gamma_4, \end{aligned}$$

et leurs associés

$$\begin{aligned} \xi_2 \tilde{\gamma}_1 - \xi_1 \tilde{\gamma}_2, \\ \eta_2 \tilde{\gamma}_1 - \eta_1 \gamma_2, \end{aligned}$$

jouent un rôle particulier. On pourrait d'ailleurs remplacer  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  respectivement par

$$\Gamma_1 - i\Gamma_3, \quad \Gamma_4 - i\Gamma_2,$$

ou par

$$\Gamma_1 - i\Gamma_4, \quad \Gamma_2 - i\Gamma_3,$$

mais le système sus-indiqué suffira à notre propos.

On va considérer dorénavant les spineurs des formes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(Ia)} \quad \eta_1 \gamma_1 + \eta_2 \tilde{\gamma}_2, & \quad \text{(IIa)} \quad \xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2, \\ \text{(Ib)} \quad \tau_1 \tilde{\gamma}_1 + \tau_2 \gamma_2, & \quad \text{(IIb)} \quad \sigma_1 \tilde{\gamma}_1 + \sigma_2 \tilde{\gamma}_2. \end{aligned}$$

<sup>19)</sup> Cette association doit se faire de telle manière que si une rotation amène les deux plans en question sur  $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$ , on ait amené les nouveaux spineurs de base respectivement sur  $\gamma_1, \tilde{\gamma}_1, \gamma_2, \tilde{\gamma}_2$ .

Le produit de deux spineurs (IIa) est un bivecteur invariant de seconde espèce (c'est-à-dire invariant par  $G'_3$ ):

$$(\xi_1\gamma_1 + \xi_2\gamma_2)(\zeta_1\gamma_1 + \zeta_2\gamma_2) = (\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1)\gamma_1\gamma_2,$$

car

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_1\gamma_2 = I_{13} + I_{42} - i(I_{14} + I_{23}).$$

Dès lors si l'on considère un spineur (IIa) comme un vecteur de  $E_4$ , une rotation singulière de seconde espèce transforme linéairement ses composantes  $(\xi_1, \xi_2)$  de telle manière que le produit de deux tels spineurs reste invariant, c'est-à-dire, si l'on désigne par des accents les nouvelles composantes  $(\xi'_1, \xi'_2)$  et  $(\zeta'_1, \zeta'_2)$  se transforment en  $(\xi'_1, \xi'_2)$  et  $(\zeta'_1, \zeta'_2)$  et l'on a:

$$\xi_1\zeta_2 - \xi_2\zeta_1 = \xi'_1\zeta'_2 - \xi'_2\zeta'_1;$$

cela signifie que la rotation de seconde espèce induit sur les composantes d'un spineur (IIa) une transformation linéaire de déterminant un, mais cela prouve aussi que (IIa) est un *spineur de seconde espèce*; (IIb) aussi.

On peut montrer plus rigoureusement ce fait au moyen des transformations infinitésimales de  $G'_3$ . Si

$$V = \xi_1\gamma_1 + \xi_2\gamma_2,$$

on a

$$V + \delta V = [1 - (I_{12} - I_{34})\delta\varphi_1 - (I_{13} - I_{42})\delta\varphi_2 - (I_{14} - I_{23})\delta\varphi_3]V[1 + (I_{12} - I_{34})\delta\varphi_1 + (I_{13} - I_{42})\delta\varphi_2 + (I_{14} - I_{23})\delta\varphi_3],$$

et l'on trouve

$$\begin{aligned} \delta\xi_1 &= (1 + \delta\alpha)\xi_1 + \delta\beta\xi_2, \\ \delta\xi_2 &= \delta\gamma\xi_1 + (1 - \delta\alpha)\xi_2, \end{aligned}$$

les  $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$  étant des combinaisons linéaires des  $\delta\varphi_1, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3$  et l'on a bien ainsi une transformation infinitésimale du groupe unimodulaire sur  $(\xi_1, \xi_2)$ . On trouve aussi, en prenant la forme finie des transformations de  $G'_3$ , que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des combinaisons linéaires de déterminant un de leurs transformés. Enfin on voit sans peine que

$$\tilde{V} = \tilde{\xi}_1\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\xi}_2\tilde{\gamma}_2$$

se transforme en un spineur du même type, de manière que les  $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$  subissent une transformation unimodulaire.

Remarquons que le produit scalaire de  $V$  par  $\tilde{V}$  est  $2(\xi_1 \tilde{\xi}_1 + \xi_2 \tilde{\xi}_2)$ , comme il est invariant, on voit que toute transformation de  $G'_3$  induit sur  $(\xi_1, \xi_2)$  et sur  $(\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)$  des transformations unimodulaires *contragrédientes*.

On trouve une propriété analogue pour les spineurs (Ia) et (Ib) transformés par les transformations de  $G_3$ , on peut donc formuler le théorème suivant :

*Un spineur (Ia) ou (Ib) se transforme par les transformations de  $G_3$  en un spineur analogue; de tels spineurs sont dits de première espèce; les composantes d'un spineur de première espèce se transforment par le groupe linéaire spécial (à deux variables); deux spineurs de première espèce, des formes (Ia) et (Ib) respectivement, se transforment en deux spineurs des mêmes formes, mais leurs composantes respectives subissent des transformations unimodulaires contragrédientes.*

On a une proposition analogue pour les spineurs (IIa) et (IIb) qui sont de seconde espèce et cela pour les transformations du groupe  $G'_3$ .

Remarquons qu'un spineur de seconde espèce [(IIa), par exemple] a un associé [(IIb), où  $\sigma_1 = \xi_2, \sigma_2 = -\xi_1$ ], avec lequel il forme un bivecteur invariant de première espèce (c'est-à-dire invariant dans  $G_3$ ).

**28.** Tout vecteur de  $E_4$  se met évidemment d'une seule manière sous la forme

$$V = \xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2 + \tilde{\xi}_1 \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\xi}_2 \tilde{\gamma}_2,$$

et si  $V$  est réel,

$$\tilde{\xi}_i = \bar{\xi}_i = \text{imaginaire conjugué de } \xi_i, \quad (i = 1, 2).$$

Soit, dès lors, une rotation de  $E_4$  dont les facteurs dans  $G_3$  et  $G'_3$  sont  $O_1$  et  $O_2$ . Formons

$$\begin{aligned} O_1 V O_1^{-1} &= O_1 (\xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2) O_1^{-1} + O_1 (\tilde{\xi}_1 \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\xi}_2 \tilde{\gamma}_2) O_1^{-1} = \\ &= (t_{11} \xi_1 + t_{12} \xi_2) \gamma_1 + (t_{21} \xi_1 + t_{22} \xi_2) \gamma_2 + (\tilde{t}_{11} \tilde{\xi}_1 + \tilde{t}_{12} \tilde{\xi}_2) \tilde{\gamma}_1 + (\tilde{t}_{21} \tilde{\xi}_1 + \tilde{t}_{22} \tilde{\xi}_2) \tilde{\gamma}_2, \end{aligned}$$

où

$$T = \left\| \begin{array}{cc} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{array} \right\| \quad \text{et} \quad \tilde{T} = \left\| \begin{array}{cc} \tilde{t}_{11} & \tilde{t}_{12} \\ \tilde{t}_{21} & \tilde{t}_{22} \end{array} \right\|$$

sont deux matrices unimodulaires et contragrédientes.

Ensuite

$$\begin{aligned}
 O_2 O_1 V O_1^{-1} O_2^{-1} &= O_2 [(t_{11} \xi_1 + t_{12} \xi_2) \gamma_1 + (\tilde{t}_{21} \tilde{\xi}_1 + \tilde{t}_{22} \tilde{\xi}_2) \tilde{\gamma}_2] O_2^{-1} + \\
 &\quad + O_2 [(\tilde{t}_{11} \tilde{\xi}_1 + \tilde{t}_{12} \tilde{\xi}_2) \tilde{\gamma}_1 + (t_{21} \xi_1 + t_{22} \xi_2) \gamma_2] O_2^{-1} = \\
 (23) \quad &= [u_{11}(t_{11} \xi_1 + t_{12} \xi_2) + u_{12}(\tilde{t}_{21} \tilde{\xi}_1 + \tilde{t}_{22} \tilde{\xi}_2)] \gamma_1 + \\
 &\quad + [u_{21}(t_{11} \xi_1 + t_{12} \xi_2) + u_{22}(\tilde{t}_{21} \tilde{\xi}_1 + \tilde{t}_{22} \tilde{\xi}_2)] \gamma_2 + \\
 &\quad + [\tilde{u}_{11}(\tilde{t}_{11} \tilde{\xi}_1 + \tilde{t}_{12} \tilde{\xi}_2) + \tilde{u}_{12}(t_{21} \xi_1 + t_{22} \xi_2)] \tilde{\gamma}_1 + \\
 &\quad + [\tilde{u}_{21}(\tilde{t}_{11} \tilde{\xi}_1 + \tilde{t}_{12} \tilde{\xi}_2) + \tilde{u}_{22}(t_{21} \xi_1 + t_{22} \xi_2)] \tilde{\gamma}_2,
 \end{aligned}$$

où

$$U = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{vmatrix} \tilde{u}_{11} & \tilde{u}_{12} \\ \tilde{u}_{21} & \tilde{u}_{22} \end{vmatrix}$$

sont aussi deux matrices unimodulaires et contragrédientes.

Le dernier membre de (23) représente le vecteur  $V'$  provenant de  $V$  par la rotation considérée de  $E_4$ :  $O = O_1 O_2$ .

$T$  dépend de trois paramètres complexes,  $\tilde{T}$  est déterminée lorsque  $T$  l'est;  $U$  dépend aussi de trois paramètres complexes et  $\tilde{U}$  se déduit de  $U$ . On a ainsi obtenu par (23) une représentation du groupe  $G_6$  à six paramètres complexes. On dit, dans la théorie de la représentation linéaire des groupes, que la représentation de  $R$  ainsi obtenue est le produit de deux représentations linéaires unimodulaires.

Cherchons la forme des transformations unimodulaires précédentes dans le cas où les rotations sont réelles. Soit  $V$  un vecteur réel, alors  $O_1 V O_1^{-1}$ , est réel, et comme

$$\tilde{\xi}_i = \bar{\xi}_i$$

il faut que

$$\tilde{t}_{ik} \tilde{\xi}_k \text{ soit conjugué de } t_{ik} \xi_k$$

donc

$$\tilde{t}_{ik} = \bar{t}_{ik}.$$

Cela revient à dire que  $T$  est une transformation unimodulaire dont la conjuguée lui est contragrédiente. Il en est de même pour  $U$ .

Voyons à exprimer ces conditions pour avoir les  $t_{ik}$  ou les  $u_{ik}$ . Ecrivons plutôt

$$T = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}, \quad \bar{T} = \begin{vmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{vmatrix},$$

et à cause de la contragrédience

$$\begin{aligned} A\bar{A} + B\bar{B} &= 1, \\ B\bar{B} + D\bar{D} &= 1, \\ A\bar{B} + C\bar{D} &= 0, \end{aligned}$$

et puisque  $T$  est unimodulaire

$$AD - BC = 1.$$

On voit facilement que

$$D = \bar{A}, \quad C = -\bar{B} \text{ }^{20)}.$$

Si donc

$$A = a + ib, \quad B = c + id,$$

$$T = \left\| \begin{array}{cc} a + ib, & c + id \\ -c + id, & a - ib \end{array} \right\| \text{ avec } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1;$$

de même pour  $U$ ;  $T$  et  $U$  dépendent donc chacune de trois paramètres réels.

On peut dire, comme M. E. Cartan l'a montré d'un point de vue très général dans sa théorie des groupes réels<sup>21)</sup>:

*Il y a isomorphie entre :*

*Le groupe linéaire formé du groupe linéaire, — spécial, — de la forme d'Hermite  $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2$  et du groupe linéaire, — spécial, — de la forme d'Hermite  $x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4$ ,*

*le groupe linéaire de la forme quadratique réelle  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ .*

## Chapitre VII

### Examen du groupe de Lorentz

29. On peut facilement transformer les résultats des chapitres précédents de manière à les appliquer au groupe linéaire qui conserve la forme quadratique de Minkowski

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2.$$

Il suffirait de considérer des unités  $\Gamma_i$  avec

$$\Gamma_4^2 = -1,$$

<sup>20)</sup> D'ailleurs  $\tilde{T}$  étant contragrédiente à  $T$  qui est unimodulaire, on a toujours  $\tilde{t}_{11} = t_{22}$ ,  $\tilde{t}_{12} = -t_{21}$ ,  $\tilde{t}_{21} = -t_{12}$ ,  $\tilde{t}_{22} = t_{11}$ .

<sup>21)</sup> Cartan, loc. cit. p. 354.

les autres carrés étant toujours égaux à un. Il est préférable, pour aller plus vite, de faire correspondre à tout point de l'espace ordinaire à quatre dimensions  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  le point de l'univers de Minkowski  $(x_1, x_2, x_3, ix_4)$  et réciproquement.

On trouve encore que le groupe  $\mathcal{G}_6$  de Lorentz est le produit direct de deux sous-groupes  $\mathcal{G}_3$  et  $\mathcal{G}'_3$  mais alors que les transformations au produit desquelles est égale une rotation de l'espace  $E_4$  à quatre dimensions sont réelles si la rotation totale est réelle, il n'en est plus ainsi pour le groupe de Lorentz. Les conditions dans lesquelles les transformations correspondantes de  $\mathcal{G}_3$  et de  $\mathcal{G}'_3$  déterminent une transformation de Lorentz réelle sont toutes différentes, alors que pour le groupe complexe de Lorentz, elles sont tout à fait analogues (cf. éq. 23).

Un vecteur *réel* de l'univers de Minkowski correspondra au vecteur

$$V = v_1\Gamma_1 + v_2\Gamma_2 + v_3\Gamma_3 + iv_4\Gamma_4,$$

(où les  $v_k$  sont réels) de l'espace  $E_4$ . Si on écrit

$$V = \xi_1\gamma_1 + \xi_2\gamma_2 + \tilde{\xi}_1\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\xi}_2\tilde{\gamma}_2,$$

$\xi_1$  et  $\tilde{\xi}_1$  sont imaginaires conjugués,  $\xi_2$  et  $\tilde{\xi}_2$  sont réels.

Dans la formule (23) on doit avoir, en utilisant les remarques de la note de la page 302, et en posant :

$$T = \left\| \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right\|, \quad U = \left\| \begin{array}{cc} A' & B' \\ C' & D' \end{array} \right\|,$$

$$\begin{aligned} V' = & [A'(A\xi_1 + B\xi_2) + B'(-B\tilde{\xi}_1 + A\tilde{\xi}_2)]\gamma_1 + \\ & + [C'(A\xi_1 + B\xi_2) + D'(-B\tilde{\xi}_1 + A\tilde{\xi}_2)]\gamma_2 + \\ & + [D'(D\tilde{\xi}_1 - C\xi_2) - C'(C\xi_1 + D\xi_2)]\tilde{\gamma}_1 + \\ & + [-B'(D\tilde{\xi}_1 - C\xi_2) + A'(C\xi_1 + D\xi_2)]\tilde{\gamma}_2. \end{aligned}$$

Pour que la transformation de Lorentz soit réelle, il faut que les coefficients de  $\gamma_2$  et de  $\tilde{\gamma}_2$  soient réels, ceux de  $\gamma_1$  et  $\tilde{\gamma}_1$ , imaginaires conjugués, si  $\xi_2$  et  $\tilde{\xi}_2$  sont réels et  $\tilde{\xi}_1$  conjugué de  $\xi_1$ . On voit que ces conditions impliquent que

$$\begin{aligned} C'A &= -\bar{D}'\bar{B}; & AA' &= \bar{D}\bar{D}', & AB' &= -CD' \text{ (réels)} \\ B'D &= \bar{A}'\bar{C}; & BB' &= \bar{C}\bar{C}', & A'B &= -C'D \text{ (réels)} \end{aligned}$$

$C'B, D'A, B'C, A'D$  réels.

On tire de là

$$B' = -\bar{C}, \quad C' = -\bar{B}, \quad A' = \bar{D}, \quad D' = \bar{A}.$$

Les transformations  $T$  et  $U$  ont alors les matrices:

$$T = \left\| \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right\|, \quad U = \left\| \begin{array}{cc} \bar{D} & -\bar{C} \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{array} \right\|,$$

et  $U$  est déterminée lorsque  $T$  l'est. On voit qu'à une transformation de Lorentz réelle est associée une transformation unimodulaire à trois paramètres complexes.  $U$  est la conjuguée de la contragrédiente de  $T$ .

*Il y a donc isomorphie entre<sup>22)</sup>:*

*Le groupe linéaire spécial à deux variables complexes  $x_1, x_2$ , le groupe linéaire de la forme quadratique réelle  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ .*

---

<sup>22)</sup> *Cartan*, loc. cit. p. 353.

(Reçu le 25 décembre 1935.)