

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1935-1936)

Artikel: Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des proues.
Autor: Leray, Jean
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9296>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les problèmes de représentation conforme d'Helmholtz; théories des sillages et des proues

Par JEAN LERAY, Paris

(suite*)

V. Cas où la solution du problème du sillage est unique

26° Préliminaires

Soit une fonction $l(s)$ résolvant le problème du sillage :

$$(5,1) \quad l(s) = V\{l(s), \Psi[l], b, c\}.$$

Nous avons prouvé au § 11 que V possède une différentielle de Fréchet W . Soient $\Delta\Psi[l]$, δb , δc des variations des données; écrivons l'équation, nommée *équation aux variations*,

$$(5,2) \quad \delta l(s) = W\{\delta l(s), \Delta\Psi[l], \delta b, \delta c; \Psi[l(s)], b, c\};$$

W est linéaire et complètement continue; (5,2) est donc une équation de Fredholm.

La théorie des équations fonctionnelles établit les propositions suivantes :

Supposons que l'équation (5,2) possède une solution unique; alors $l(s)$ est une solution isolée de (5,1); quand $\Delta\Psi[l]$, δb , δc sont suffisamment petits, le problème du sillage posé pour l'obstacle $\Psi[l] + \Delta\Psi[l]$, $b + \delta b$, $c + \delta c$ possède au moins une solution voisine de $l(s)$; $\delta l(s)$ est la partie principale de la différence entre $l(s)$ et ces solutions voisines de $l(s)$. En outre la solution $\delta l(s)$ de (5,2), qui est supposée unique, a un indice topologique égal à celui de la solution $l(s)$ de (5,1). L'étude de (5,2) permet donc de préciser les indices des solutions de (5,1) et par suite le nombre des solutions de cette équation, puisque leur indice total vaut $+1$.

27. Enoncé du problème aux limites de M. Weinstein

Nous allons exposer les calculs⁴¹⁾ par lesquels M. Weinstein transforme la résolution de (5,2) en la recherche d'une fonction harmonique β assujettie à certaines conditions aux limites.

*) Voir ce journal vol. 8 pag. 149.

⁴¹⁾ M. Weinstein a fait ces calculs dans le cas du jet; M. Jacob m'a aidé à les transposer au cas présent.

Introduisons les quantités $\delta\Omega$, δa , δs_0 , $\delta\omega$ que définissent les relations (1,20), (1,24) où l'on pose $\delta L = \delta l$; définissons δf et δz par les relations (1,1) et (1,3) différenciées logarithmiquement :

$$(5,3) \quad \frac{\delta f}{f} = \frac{\delta a}{a} + \frac{2 \sin s_0 \delta s_0}{\frac{1}{2}(\zeta + \zeta^{-1}) - \cos s_0}, \quad (5,4) \quad \frac{d\delta z}{dz} = i\delta\omega + \frac{d\delta f}{df}.$$

Ces quantités sont les parties principales des variations que subissent, en un point ζ fixe, $\Omega(\zeta)$, . . . $z(\zeta)$, quand δl est la partie principale de la variation de $l(s)$ qui correspond à une variation des données.

Posons

$$(5,5) \quad \gamma = \delta f - \frac{df}{dz} \delta z \quad (\gamma = \alpha + i\beta)$$

Quand δl est la partie principale de la variation de l , γ est la partie principale de la variation que subit $f(z)$ en un point z fixe.⁴²⁾

Nous allons transformer les conditions imposées à $\delta\omega$ en conditions imposées à β :

La relation qui lie γ , $\delta\omega$, δf est

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{dz}{df} (\gamma - \delta f) \right] + \frac{d\delta f}{df} = -i\delta\omega;$$

il suffit de remplacer dz/df par $e^{i\omega}$ pour lui donner les formes suivantes :

$$(5,6) \quad \frac{d\gamma}{df} + i \frac{d\omega}{df} (\gamma - \delta f) = -i\delta\omega.$$

$$(5,6') \quad \frac{d\gamma}{d\zeta} + i \frac{d\omega}{d\zeta} (\gamma - \delta f) = -i\delta\omega \frac{df}{d\zeta}.$$

$$(5,7) \quad \gamma = i e^{-i\omega} \int e^{i\omega} [\delta f d\omega - \delta\omega df].$$

γ et $d\gamma/d\zeta$ sont donc hölderiennes dans la moitié supérieure du cercle $|\zeta| \leq 1$, sauf peut-être au voisinage des points $\zeta = 0, e^{is_0}, \pm 1$.

a) *Le long du demi-cercle* $\zeta = e^{is}$ ($0 \leq s \leq \pi$) nous devons avoir d'après (1,20) et (1,23)

$$(5,8) \quad \delta\omega = \Psi'[l] \delta l - i \frac{d\delta l}{dl} + \Delta\Psi[l] + i \frac{d\delta f}{df}.$$

⁴²⁾ Cette interprétation de γ , quand elle est légitime, permet de déduire rapidement de l'énoncé même du problème du sillage que $\beta = 1$ (γ) doit vérifier des conditions aux limites simples sur l'obstacle et sur les lignes libres. Toutefois elle ne permet pas d'obtenir l'ensemble des conditions imposées à β .

Remplaçons dans (5,4) $\delta\omega$ par cette expression et dz par $e^{i\psi}dl$; il vient

$$\delta z = \int e^{i\psi} [i d\Psi \delta l + d\delta l] + i \int e^{i\psi} \Delta\Psi[l] dl = e^{i\psi} \delta l + \Delta z[l];$$

$z[l]$ est le point de l'obstacle dont l'abscisse curviligne est l ; $\Delta z[l]$ est la variation connue de cette fonction; un choix particulier vient d'être fait pour la constante d'intégration, en sorte que γ et $\delta\omega$ se correspondent biunivoquement. Portons dans (5,5) la valeur obtenue pour δz ; il vient

$$(5,9) \quad \gamma = \mp e^{i\psi} \delta l - e^{-i\omega} \Delta z[l] + \delta f \quad (+ \text{ pour } 0 \leq s \leq s_0; - \text{ pour } s_0 \leq s \leq \pi).$$

Nous avons donc

$$(5,10) \quad \beta = -I\{e^{-i\omega} \Delta z[l]\} \quad \text{sur le demi-cercle } \zeta = e^{is};$$

le second membre de cette relation est une donnée.

b) *Sur le diamètre* ($-1, +1$) $\delta\omega$, $d\omega/df$, δf sont réels; donc d'après (5,6)

$$\frac{d\alpha}{df} = \frac{d\omega}{df} \beta;$$

en d'autres termes, $\frac{d}{dn}$ désignant la dérivée normale au diamètre $-1 < \zeta < +1$, on a

$$(5,11) \quad \frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dn} = \frac{d\tau}{dn} \quad \text{pour } -1 < \zeta < +1.$$

c) *Voisinage du point* $\zeta = 1$. Nous désignerons par des fonctions nulles en ce point et hölderiennes en son voisinage. La valeur de $\delta\omega$ pour $\zeta = 1$ étant réelle, est, d'après (5,8) et (1,21), $\Psi'[b]\delta b + \Delta\Psi[b]$; donc $\delta\omega = \Psi'[b]\delta b + \Delta\Psi[b] + \dots$

D'après (2,4) nous avons les développements limités

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \omega'(1) + \dots, \quad \frac{d\omega}{df} = \frac{\omega'(1)}{4a(1 - \cos s_0)} \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \Psi'[b] + \dots$$

Ces développements portés dans (5,7) prouvent que γ est hölderienne au point $\zeta = 1$; donc d'après (5,9)

$$\gamma - \delta f = \delta b + e^{-i\psi[b]} \Delta z[b] + \dots.$$

Portons cette valeur de $\gamma - \delta f$ dans l'équation (5,6'); il vient

$$\frac{d\gamma}{d\zeta} = -i\omega'(1) \{ \delta b + e^{-i\Psi[b]} \Delta z[b] \} + \dots$$

d'autre part $(d\delta f/d\zeta) = 0$; donc

$$\gamma - \delta f = \{ \delta b + e^{-i\Psi[b]} \Delta z[b] \} \{ 1 - i\omega'(1)(\zeta - 1)(1 + \dots) \}.$$

Portons dans (5,6) les développements limités obtenus pour $\delta\omega$, $\frac{d\omega}{df}$ et $\gamma - \delta f$ il vient:

$$(5,12) \quad \frac{d\gamma}{df} = \left\{ \delta b + e^{-i\Psi[b]} \Delta z[b] \right\} \left\{ -\frac{i\omega'(1)}{4a(1 - \cos s_0)} \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + \right. \\ \left. + i\Psi'[b] - \frac{\omega'(1)^2}{2a(1 - \cos s_0)} \right\} \\ - i \{ \Psi'[b] \delta b + \Delta \Psi[b] \} + \dots$$

d) *Voisinage du point* $\zeta = e^{is_0}$. Nous désignerons par ... des fonctions vérifiant une condition de Hölder au voisinage de ce point et nulles en ce point. Nous avons d'après (5,3), (2,1), (1,23) les développements limités

$$\delta f = a \sin s_0 \delta s_0 [\zeta + \zeta^{-1} - 2 \cos s_0] [1 + \dots];$$

$$\frac{df}{d\zeta} = i a e^{-is_0} \sin s_0 [\zeta + \zeta^{-1} - 2 \cos s_0] [1 + \dots];$$

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = -2 e^{-is_0} \sin s_0 [\zeta + \zeta^{-1} - 2 \cos s_0]^{-1} [1 + \dots];$$

$$\delta\omega = 2i \sin s_0 \delta s_0 [\zeta + \zeta^{-1} - 2 \cos s_0]^{-1} [1 + \dots].$$

D'où

$$(5,13) \quad \delta f \frac{d\omega}{d\zeta} - \delta\omega \frac{df}{d\zeta} = \dots$$

D'autre part, d'après (1,11)

$$e^{i\omega} = \frac{1 - \zeta e^{is_0}}{e^{is_0} - \zeta} [1 + \dots].$$

Par suite $\int e^{i\omega} [\delta f d\omega - \delta\omega df]$ est höldérienne au point $\zeta = e^{is_0}$; autrement dit $\gamma(\zeta - e^{is_0})^{-1}$ est höldérienne en ce point. Ce fait et le développement (5,13) porté dans (5,6') démontrent que $d\gamma/d\zeta$ est höldérienne au point $\zeta = e^{is_0}$.

e) *Voisinage du point* $\zeta = 0$. $\omega, f, \delta\omega, \delta f$ sont des fonctions analytiques pour $|\zeta| < 1$, réelles en même temps que ζ ; au point $\zeta = 0$ ω et $\delta\omega$ s'annulent, f et δf présentent un pôle double; par suite

$$\delta\omega \frac{df}{d\zeta} - \delta f \frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{a'}{\zeta^2} + \frac{a''}{\zeta} + \dots$$

a' et a'' étant des constantes réelles, qui dépendent des données et des inconnues. Portons ces développements dans (5,7); il vient

$$(5,14) \quad \gamma = -\frac{ia'}{\zeta} - (a' \omega'(0) - ia'') e^{-i\omega(\zeta)} \log \zeta + \dots$$

les termes non écrits constituant un développement de Taylor.

Conclusion. Le problème de Weinstein, auquel se ramène ainsi la résolution de l'équation aux variations (5,2), consiste donc à trouver une fonction analytique γ qui vérifie les conditions suivantes: γ est définie dans la moitié supérieure du cercle $|\zeta| \leq 1$; $d\gamma/d\zeta$ est höldérienne sauf peut-être au voisinage des points $0, \pm 1$; $\gamma(e^{is_0}) = 0$; β a des valeurs données le long du demi cercle $\zeta = e^{is}$ [cf (5,10)]; la relation (5,11) est vérifiée sur le diamètre $(-1, +1)$; au voisinage des points $\zeta = +1$ et $\zeta = -1$ on doit avoir respectivement

$$\frac{d\gamma}{df} = b' \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + b'' + \dots \quad ; \quad \frac{d\gamma}{df} = c' \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} + c'' + \dots$$

b' et b'' , c' et c'' étant des constantes complexes *données* [cf (5,12)]; au point $\zeta = 0$ γ présente une singularité du type (5,14) où a' et a'' sont des constantes *réelles inconnues*.

N.B. S'il s'agit du problème symétrique du sillage, β s'annule sur le segment $(0, i)$ et prend des valeurs opposées aux points $\pm \xi + i\eta$.

28° L'hypothèse de Friedrichs

Enoncé. — Nous disons qu'une solution du problème du sillage [du problème symétrique du sillage] vérifie l'hypothèse de Friedrichs quand il existe une fonction $B(\zeta)$ présentant les particularités suivantes: $B(\zeta)$ est définie sur le demi-cercle $|\zeta| \leq 1, \eta \geq 0$ [dans le quart de cercle $|\zeta| \leq 1, \eta \geq 0, \xi \geq 0$]; $B(\zeta)$ y est surharmonique et y possède des dérivées

hölderiennes⁴³⁾; $B(\zeta)$ est positive à l'intérieur de ce domaine de définition; on a le long du diamètre $(-1, +1)$ [du rayon $(0, +1)$]

$$(5,15) \quad \frac{1}{B} \frac{dB}{dn} = \frac{d\tau}{dn}.$$

Lemme de Friedrichs. — Supposons vérifiée l'hypothèse de Friedrichs. Envisageons une solution du problème de Weinstein, β , qui ne soit pas proportionnelle à B . Désignons par d les domaines en lesquels les lignes $\beta = 0$ décomposent le demi-cercle $|\zeta| \leq 1, \eta \geq 0$. Si la frontière d'un domaine d ne contient aucun arc du cercle $|\zeta| = 1$ où $\beta \neq 0$, alors cette frontière atteint le point $\zeta = 0$ et γ n'est pas holomorphe en ce point.

Pour établir ce fait M. Friedrichs⁴⁴⁾ rattache le problème étudié au calcul des variations, ce qui lui permet d'appliquer le „principe de Jacobi“. Mais on peut résumer comme suit son raisonnement:

On a l'inégalité

$$(5,16) \quad \oint \left[\beta \frac{d\beta}{dn} - \frac{\beta^2}{\beta_0} \frac{d\beta_0}{dn} \right] ds \geq 0,$$

sous la seule condition que β est harmonique à l'intérieur du contour d'intégration, que β_0 y est surharmonique et positive; l'égalité ne peut être réalisée que si β et β_0 sont proportionnels. En effet le premier membre de (5,16) est égal à l'intégrale double

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial \beta}{\partial \xi} - \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \eta} - \frac{\beta}{\beta_0} \frac{\partial \beta_0}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\beta^2}{\beta_0} \left(\frac{\partial^2 \beta_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \beta_0}{\partial \eta^2} \right) \right\} d\xi d\eta.$$

Appliquons l'inégalité (5,16) à la frontière d'une domaine d qui ne vérifie pas le lemme de Friedrichs⁴⁵⁾. Choisissons $\beta_0 = B + \beta$ si $\beta > 0$ dans d , $\beta_0 = B - \beta$ dans le cas contraire; puisque $\left| \frac{\beta}{\beta_0} \right| \leq 1$, le premier membre de (5, 16) a un sens. Nous avons sur l'axe réel

$$\frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dn} = \frac{1}{B} \frac{dB}{dn} = \frac{1}{\beta_0} \frac{d\beta_0}{dn};$$

nous avons sur le restant de la frontière de d $\beta = 0$. Donc le premier membre de (5, 16) est nul; β est proportionnel à β_0 , c'est-à-dire à B . C. Q. F. D.

⁴³⁾ On pourrait toutefois tolérer une singularité logarithmique au point $\zeta = 0$.

⁴⁴⁾ K. Friedrichs, Über ein Minimumproblem für Potentialströmungen mit freiem Rande, Math. Annalen, t. 109, p. 60, 1933.

⁴⁵⁾ S'il s'agit du problème symétrique d ne peut pas traverser l'axe $\xi = 0$; pour fixer les idées nous supposons que d appartient au quart de cercle $|\zeta| \leq 1, \xi \geq 0, \eta \geq 0$.

Réalisations de l'hypothèse de Friedrichs.

Faisons subir à l'obstacle une variation, qui soit une translation $\Delta z = \mathbf{C}^{10}$. Une solution de l'équation aux variations est évidente: on peut choisir⁴⁶⁾ $\delta\omega = 0$, $\delta f = 0$; il vient d'après (5,7) et (5,9)

$$\gamma = -e^{-i\omega} \cdot \Delta z.$$

Supposons d'abord qu'il s'agisse du problème symétrique; donnons à Δz une valeur réelle négative; dans le quart de cercle $|\zeta| < 1$, $\xi > 0$, $\eta > 0$ nous avons $-\pi < \theta(\xi) < 0$ et par suite $\beta > 0$; nous pouvons donc choisir pour B cette fonction β . Ainsi l'hypothèse de Friedrichs est toujours vérifiée dans le cas du problème symétrique.

Ne supposons plus qu'il s'agisse du problème symétrique. Au voisinage du point de bifurcation $l = l_0$, l'argument de γ atteint les valeurs

$$\arg. \Delta z - \Psi[l_0] - \pi, \arg. \Delta z - \Psi[l_0];$$

pour donner à β un signe constant il est donc nécessaire de prendre $\arg. \Delta z = \Psi[l_0] + \pi$, c'est-à-dire d'effectuer la translation parallèlement à la tangente au point de bifurcation. Ceci fait, $\beta(\zeta)$ a le signe de $\sin \{ \Psi[l_0] - \theta(\zeta) \}$.

Supposons que nous ayons

$$\{ \Psi[l] - \Psi[l_0] \} \{ l - l_0 \} > 0;$$

l'oscillation de $\Phi(s)$, donc celle de $\theta(\zeta)$ dépassent π ; $\beta(\zeta)$ ne peut garder un signe constant. Toutefois β est négatif pour $|\zeta| = 1$, $\eta > 0$; γ est holomorphe pour $\zeta = 0$. Le lemme de Friedrichs est donc contredit; l'hypothèse de Friedrichs ne peut pas être vérifiée. En particulier l'hypothèse de Friedrichs est en défaut quand l'obstacle est concave.

Supposons au contraire

$$\{ \Psi[l] - \Psi[l_0] \} \{ l - l_0 \} \leq 0.$$

Nous avons $0 \leq \Psi[l_0] - \Phi(s) \leq \pi$,

donc $0 < \Psi[l_0] - \theta(\zeta) < \pi$, $\beta(\zeta) > 0$

Nous pouvons choisir $B = \beta$. En particulier l'hypothèse de Friedrichs est vérifiée quand l'obstacle est convexe.

⁴⁶⁾ On connaît de même une solution de l'équation aux variations quand la transformation que subit l'obstacle est une homothétie, $\Delta z = h(z - z_1)$: on peut choisir $\delta\omega = 0$, $\delta f = hf$, $\gamma = h[f - e^{-i\omega}(z - z_1)]$.

29° Discussion du problème de Weinstein

On déduit aisément de (5,14) les conséquences suivantes: Si $a' \neq 0$ le point $\zeta = 0$ appartient à la frontière de deux domaines d . Si $a' = 0$ et si $a'' \neq 0$ ce point appartient à la frontière d'un seul domaine d . Le lemme de Friedrichs démontre donc le théorème ci-dessous:

Théorème a. — Supposons vérifiée l'hypothèse de Friedrichs; soit n le nombre des arcs en lesquels les points où $\beta = 0$ subdivisent la demi-circonférence $|\zeta| = 1$, $\eta > 0$. Le nombre des domaines d est au maximum $n + 2$; si ce maximum est atteint, on a dans (5,14) $a' \neq 0$.

Supposons que le problème de Weinstein admette une solution non nulle, γ , correspondant aux données nulles $\delta b = \delta c = \Delta \Psi[l] = \Delta z[l] = 0$. D'après (5,12) nous avons $d\gamma/df = 0$ pour $\zeta = 1$, c'est-à-dire pour $f = a [1 - \cos s_0]^2$; $\gamma(f)$ est définie dans le demi-plan $I(f) \leq 0$. Donc β prend des valeurs positives et des valeurs négatives dans la partie de ce demi-plan qui est voisine du point⁴⁷⁾ $f = a [1 - \cos s_0]^2$. Autrement dit $\zeta = 1$ (et de même $\zeta = -1$) est point frontière de deux domaines d .

Faisons l'hypothèse de Friedrichs; d'après le théorème a il y a exactement deux domaines d , et chacun atteint le point $\zeta = 0$. Or ceci les empêche d'atteindre tous deux les points $\zeta = 1$ et $\zeta = -1$: on peut joindre le point $\zeta = 0$ au point $\zeta = i$ par un chemin intérieur à l'un des domaines d ; ce chemin sépare les points $\zeta = \pm 1$ qui ne peuvent donc appartenir tous deux à la frontière de l'autre domaine d . Cette contradiction établit le théorème suivant.

Théorème b. — Quand l'hypothèse de Friedrichs est vérifiée, l'équation aux variations (5,2) possède une seule solution⁴⁸⁾.

Remarque. — Il est aisé d'obtenir, en précisant le théorème a, un résultat curieux: Considérons un sillage vérifiant l'hypothèse de Friedrichs; modifions infiniment peu la forme de l'obstacle; à ce nouvel

⁴⁷⁾ Cette proposition serait évidente si $\gamma(f)$ était holomorphe en ce point. Elle résulte, sous les hypothèses plus générales qui se présentent ici, d'un travail en préparation de M. A. Magnier (cf. Sur les valeurs limites des fonctions harmoniques, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 200 8 avril 1935, p. 1275).

⁴⁸⁾ L'hypothèse suivante joue un rôle essentiel dans les travaux de M. Weinstein: „Quelle que soit la constante k ($0 \leq k \leq 1$) il est impossible de trouver une fonction harmonique β , régulière pour $|\zeta| \leq 1$, $\eta \geq 0$, nulle pour $|\zeta| = 1$, qui vérifie l'équation $\frac{1}{\beta} \frac{d\beta}{dn} = k \frac{d\tau}{dn}$ pour $-1 < \xi < +1$ ”. On démontre aisément que l'hypothèse de Friedrichs est sûrement vérifiée quand cette hypothèse de Weinstein l'est. Ceci permet de dire que le théorème b, sur lequel repose notre théorie, est une généralisation du théorème fondamental de M. Weinstein, que cet Auteur formule ainsi: „on peut réduire le problème d'unicité locale I au problème d'unicité locale II”.

obstacle correspond un sillage infiniment voisin du sillage primitif (cf § 26). Soit p le nombre de fois que se croisent nos deux obstacles infiniment voisins. Le nombre des points en lesquels les nouvelles lignes de jet et les anciennes se rencontrent est au plus $p + 4$; si les deux sillages présentent un même axe de symétrie, ce nombre est au plus $p + 2$.

30° Indices de celles des solutions du problème du sillage qui vérifient l'hypothèse de Friedrichs

Soient deux sillages, pour lesquels s_0 a une même valeur; nous les repérerons par les indices 1 et 2. Envisageons les équations aux variations correspondantes

$$(5,2)_1 \quad \delta l(s) = W\{\delta l(s), \Delta \Psi[l], \delta b, \delta c; \Psi_1[l_1(s)], b_1, c_1\},$$

$$(5,2)_2 \quad \delta l(s) = W\{\delta l(s), \Delta \Psi[l], \delta b, \delta c; \Psi_2[l_2(s)], b_2, c_2\}.$$

Soit k un paramètre variant de 0 à 1. Posons $\Phi(s) = k \Phi_1(s) + (1 - k) \Phi_2(s)$. Introduisons le sillage associé à cette fonction $\Phi(s)$: celui que définissent (1,4) et (1,5); notons que $\omega(\zeta) = k \omega_1(\zeta) + (1 - k) \omega_2(\zeta)$. L'équation aux variations (5,2) qui correspond à ce sillage se réduit à $(5,2)_1$ pour $k = 1$, à $(5,2)_2$ pour $k = 0$.

Supposons que les deux sillages donnés vérifient l'hypothèse de Friedrichs. Posons $B(\zeta) = B_1(\zeta)^k \cdot B_2(\zeta)^{1-k}$. $B(\zeta)$ est surharmonique. Nous avons, sur le diamètre $-1 \leq \zeta \leq +1$,

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dn} = k \frac{1}{B_1} \frac{dB_1}{dn} + (1 - k) \frac{1}{B_2} \frac{dB_2}{dn} = k \frac{d\tau_1}{dn} + (1 - k) \frac{d\tau_2}{dn} = \frac{d\tau}{dn}.$$

Le sillage variable vérifie donc l'hypothèse de Friedrichs quel que soit k . Par suite l'équation (5,2) possède toujours une seule solution; son indice est constant. Les équations $(5,2)_1$ et $(5,2)_2$ ont donc même indice topologique.

Etant donné le sillage numéroté 1, qui vérifie l'hypothèse de Friedrichs, on peut choisir pour sillage numéroté 2 celui qui correspond à un segment rectiligne de direction $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Psi_1[l_1(s)] ds$: ce second sillage vérifie l'hypothèse de Friedrichs. Le second membre de $(5,2)_2$ est alors indépendant de $\delta l(s)$; l'indice topologique de la solution de $(5,2)_2$ est donc $+1$. Par suite l'indice topologique de la solution de $(5,2)_1$ est $+1$. Il en résulte, comme nous l'avons rappelé au § 26, que $l(s)$ est une solution d'indice $+1$ du problème du sillage. Donc:

Théorème c. — Toute solution du problème du sillage qui vérifie l'hypothèse de Friedrichs a l'indice $+1$.

Or nous avons déterminé l'indice total des solutions du problème du sillage; c'est $+1$; donc:

Théorème d. — Soit un obstacle; s'il est impossible qu'une solution du problème du sillage correspondant mette en défaut l'hypothèse de Friedrichs, alors ce problème possède une seule solution.

En particulier *le problème symétrique du sillage possède une seule solution; le problème du sillage possède une seule solution quand l'obstacle est convexe.*

VI. Nombre des solutions du problème de la proue

31° Sillage infiniment voisin d'un sillage en proue

Soit un sillage vérifiant l'hypothèse de Friedrichs. Supposons que le détachement inférieur soit en proue: $\omega'(1) = 0$. Faisons subir à l'obstacle une variation infinitésimale, qui consiste à le prolonger en son extrémité inférieure; cette variation est définie par $\Delta z[l] = 0$, $\Delta \Psi[l] = 0$, $\delta c = 0$, $\delta b \neq 0$. Les termes écrits au second membre de (5,12) disparaissent; la solution du problème de Weinstein est évidemment $\beta = 0$. Donc $\gamma = 0$; l'examen de la figure le faisait d'ailleurs prévoir. Nous avons, d'après (5,6),

$$\delta \omega = \frac{d\omega}{df} \delta f;$$

rappelons la relation (5,3)

$$\delta f = \frac{\delta a}{a} f - 2 \frac{\sin s_0 \delta s_0}{\sqrt{a}} \sqrt{f} ;$$

les deux constantes δa , δs_0 , se déterminent en remarquant que la relation (5,9) se réduit

pour $\zeta = 1$ à $\delta f = -\delta b$, pour $\zeta = -1$ à $\delta f = 0$; nous obtenons ainsi

$$(6,1) \quad \delta \omega = -\frac{d\omega}{df} [f - \sqrt{a} (1 + \cos s_0) \sqrt{f}] \frac{\delta b}{2a (1 - \cos s_0)} .$$

D'où⁴⁹⁾

$$(6,2) \quad \delta \omega' (+1) = - \left[\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{d\omega}{df} \right) \right]_{\zeta=1} \delta b .$$

⁴⁹⁾ La dérivée écrite au second membre de (6,2) existe puisque $\delta \omega'(1)$ existe.

Si en outre le détachement supérieur est également en proue, on a

$$(6,3) \quad \delta\omega'(-1) = 0$$

Remarques. — Rappelons que la courbure d'une ligne libre est $\varepsilon \frac{d\omega}{df}$ ($\varepsilon = +1$ pour la ligne libre supérieure; $\varepsilon = -1$ pour la ligne libre inférieure). Considérons un détachement en proue où

$$(6,4) \quad \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\omega}{df} \right) > 0.$$

On démontre⁵⁰⁾ qu'au voisinage du point de détachement τ ne prend que des valeurs négatives si l'obstacle est convexe en ce point. La dérivée de la courbure de la ligne libre par rapport à l'arc y vaut $+\infty$. Si nous prolongeons l'obstacle, ce prolongement se trouve donc situé en aval de la ligne libre; d'après (6,2) le détachement devient un détachement vers l'amont; il suffit d'ailleurs d'examiner la figure pour prévoir que ces deux circonstances se présentent simultanément.

Considérons au contraire un détachement en proue où

$$(6,5) \quad \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\omega}{df} \right) < 0.$$

Les faits opposés ont lieu; en particulier aucune des deux conditions de validité de M. Brillouin (§ 1) n'est satisfaite.

32° Problème symétrique de la proue

Considérons un obstacle symétrique $\widehat{B_0 C_0}$; choisissons-en le milieu comme origine des abscisses curvilignes, l . Faisons varier le paramètre $c \equiv -b$ de 0 à c_0 . Le chapitre V nous apprend qu'à chaque valeur de c correspond un seul sillage symétrique. Envisageons la courbe **P** qui représente les variations de $\omega'(1)$ en fonction de c . Les solutions du problème symétrique de la proue sont les points où cette courbe **P** coupe l'axe des c , et en outre le point c_0 si $\omega'(1)$ y est négatif. Quand c tend vers 0, $\omega'(1)$ tend vers -1 [cf (2,6)]. Il est donc certain que le problème de la proue possède une solution au moins. D'après (6,2) et (6,3) la pente de **P** en un point où elle coupe l'axe des c , est $\left[\frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\omega}{df} \right) \right]_{\xi=1}$; les points où **P**

⁵⁰⁾ *J. Leray*, Sur la validité des solutions du problème de la proue, Volume du Jubilé de MM. Brillouin (Gauthier-Villars, 1935).

coupe l'axe des c avec une pente négative constituent donc des solutions *inacceptables* du problème.

De telles intersections peuvent avoir lieu: les méthodes de M. Villat fournissent aisément des obstacles symétriques, convexes \widehat{BC} , dont le sillage présente des détachements en proue où l'inégalité (6,5) est vérifiée. Nous en avons par exemple construit⁵⁰⁾ un, dont la courbure croît constamment en valeur absolue quand on se rapproche de son milieu, le rapport des courbures extrêmes étant 5,7. Soit $\widehat{B_0C_0}$ un obstacle symétrique convexe contenant un tel arc \widehat{BC} . L'examen de la courbe \mathbf{P} montre immédiatement que *le problème de la proue posé pour cet obstacle $\widehat{B_0C_0}$ possède au moins trois solutions symétriques.*

Envisageons par contre *un obstacle symétrique en accolade* (cf § 2). On démontre⁵¹⁾ que l'inégalité (6,4) a alors lieu en un point de détachement, quand le détachement y est en proue: la courbe \mathbf{P} a une pente positive là où elle coupe l'axe des c . *Le problème de la proue possède donc dans ce cas une seule solution*⁵²⁾.

33° Obstacle circulaire convexe

Nous savons que la solution du problème du sillage est unique si l'obstacle est convexe. On démontre d'autre part que toute solution du problème de la proue vérifie l'inégalité (6,4) aux points où le détachement est en proue si l'obstacle est une accolade $\widehat{B_0B_1A C_1C_0}$ et si le courant bifurque en A ⁵¹⁾. Nous désirons faire simultanément ces deux hypothèses; la valeur absolue de la courbure de l'obstacle ne croîtra donc jamais quand on se rapprochera du point de bifurcation; or ce point est un point inconnu de l'obstacle. Nous sommes contraints à supposer l'obstacle circulaire.

⁵¹⁾ Cf. 1 c. (50). La démonstration est entièrement élémentaire: on pose $\frac{d\omega}{df} = U + iV$; on remarque que le long de l'obstacle $\frac{d}{dl} \left[U \frac{dl}{d\psi} \right] = -V$; on régit le demi-cercle $|\xi| \leq 1$, $\eta \geq 0$ suivant les signes de U et V ; on constate ainsi que les conditions de validité de M. Brillouin sont satisfaites; on en déduit, comme corollaire, que l'inégalité (6,4) est vérifiée là où le détachement est en proue.

⁵²⁾ Un cas particulier de ce théorème a déjà été établi: dans sa thèse M. C. Jacob prouve que si l'obstacle est un arc de cercle convexe la pente de \mathbf{P} est constamment positive. Sa démonstration, sans rapport avec les raisonnements ci-dessus, est basée sur quelques inégalités remarquables. (Mathematica, t. 11, 1936).

Soit donc un demi-cercle convexe de rayon 1 :

$$\Psi[l] = \frac{\pi}{2} - l \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq l \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Représentons un arc $b \leq l \leq c$ de ce demi-cercle par un point du triangle. $\pi/2 \leq b \leq c \leq \pi/2$ dont les sommets $(\pi/2, \pi/2), \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ seront nommés m, n, p . A chaque point de ce triangle mnp correspond un sillage unique; les points qui nous intéressent sont ceux où $B \leq 0, C \leq 0$. Nous avons d'après le paragraphe 14 (quelques cas où la nature du détachement est évidente *a priori*)

sur \overline{mn} $B < 0$ et $C < 0$;

sur \overline{mp} $C > 0$; sur \overline{np} $B > 0$.

Soit un point (b, c) où $B = 0, C < 0$; puisque l'arc BC est une accolade, l'inégalité (6,4) est vérifiée en B ; il en résulte, d'après (6,2), que B a le signe de $-\delta b$ au point voisin $(b + \delta b, c)$. Soit de même un point (b, c) où $B < 0, C = 0$; C a le signe de δc au point voisin $(b, c + \delta c)$. Soit enfin un point (b, c) où $B = 0, C = 0$; les relations (6,2) et (6,3) prouvent qu'au point voisin $(b + \delta b, c + \delta c)$ B a le signe de $-\delta b$, C celui de δc .

Considérons l'un des domaines Δ en lesquels se décompose l'ensemble des points où B et C sont négatifs. Orientons la frontière Δ' de Δ de manière que Δ soit à sa gauche. La partie de Δ' qui est intérieure au triangle mnp est constituée par des arcs où $B < 0, C = 0$; des arcs où $B = 0, C < 0$; des points où $B = C = 0$. D'après ce qui précède un tel point est l'extrémité d'un arc où $B < 0, C = 0$ et l'origine d'un arc où $B = 0, C < 0$. La partie de Δ' intérieure au triangle mnp est donc un ensemble d'arcs \widehat{mqn} tels que $B < 0, C = 0$ sur \widehat{mq} , $B = 0, C < 0$ sur \widehat{qn} . Le sens positif sur chacun de ces arcs est le sens \widehat{mn} . Il est donc nécessaire que Δ' contienne un seul arc \widehat{mqn} . Par suite Δ' contient le segment rectiligne \overline{mn} , et le domaine Δ est unique.

Ainsi les points où B et C sont négatifs constituent l'intérieur d'un triangle mnp , dont le côté \overline{mn} est rectiligne, dont les côtés \widehat{mq} et \widehat{np} sont curvilignes. Ce triangle est nécessairement symétrique par rapport à l'axe de symétrie du triangle mnp ; il présente en q un angle droit saillant; l'arc \widehat{mq} n'a pas de tangente parallèle à \overline{np} , ni l'arc \widehat{np} de tangente parallèle à \overline{mq} . Les points du triangle mnp où $B < 0, C = 0$ constituent \widehat{mq} ; ceux où $B = 0, C < 0$ constituent \widehat{np} ; q est le seul point où $B = C = 0$.

Si (b_0, c_0) est dans le triangle ourviligne $m n q$, (b, c) est confondu avec (b_0, c_0) .

Si (b_0, c_0) est dans le triangle curviligne mqr , (b, c) est le point de l'arc \widehat{mq} dont l'abscisse est $b = b_0$.

Si (b_0, c_0) est dans le triangle curviligne nqt , (b, c) est le point de l'arc \widehat{nq} dont l'ordonnée est $c = c_0$.

⁵³) Voir note ¹¹), p. 152.

263