

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1935-1936)

Artikel: Eine Herleitung der 17 Kongruenzgruppen der Euklidischen Ebene mit topologischen Methoden.
Autor: Steiger, Franz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-9295>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Eine Herleitung der 17 Kongruenzgruppen der Euklidischen Ebene mit topologischen Methoden

Von FRANZ STEIGER, Solothurn

Brouwer hat die indikatrix-erhaltenden topologischen Abbildungen des Torus angegeben¹⁾, und Scherrer hat darauf hingewiesen²⁾, daß die Aufzählung *aller* endlichen Torusgruppen, genauer gesagt, der Faktorgruppen ihrer Normalteiler, mit der Aufzählung der *ebenen Kristallgruppen* äquivalent sei. Dies soll hier, in enger Anlehnung an die bereits am Beispiel der Kugel und der projektiven Ebene erprobte Methode²⁾, durchgeführt werden. Die als Grundlage der Untersuchung benötigten Relationen und Sätze aus der Theorie der endlichen topologischen Abbildungsgruppen geschlossener Flächen entnehme ich der unter²⁾ zitierten Abhandlung. Ich verweise auch auf meine Arbeit über „die maximalen Ordnungen periodischer topologischer Abbildungen geschlossener Flächen in sich“³⁾, welcher dieselben Tatsachen zugrunde liegen. Damit jedoch der vorliegende Aufsatz unabhängig von der eben erwähnten Publikation gelesen werden kann, wiederhole ich daraus kurz alles das, worauf wir uns nachher stützen müssen.

Nach Brouwer und Scherrer darf die betrachtete geschlossene Fläche F , die einer endlichen Gruppe von Abbildungen unterworfen ist, als *reguläre Überlagerungsfläche* einer Modulfläche Φ aufgefaßt werden. Die Abbildungsgruppe ist dann die Gruppe der Decktransformationen der Überlagerungsfläche F . Wenn n ihre Ordnung ist, so besteht F aus n übereinanderliegenden Blättern, nämlich aus n nach bestimmten Vorschriften zusammengehefteten Exemplaren der mit einem geeigneten Schnittsystem versehenen Modulfläche Φ . Jeder Punkt P der „Grundfläche“ Φ ist gemeinsamer Spurpunkt von n übereinander liegenden (gelegentlich zusammenfallenden) Punkten P_1, P_2, \dots, P_n von F . Über dem Innern von Φ liegen endlich viele Verzweigungspunkte von F , über den Rändern von Φ jeweils $\frac{n}{2}$ Faltungslinien und endlich viele Faltverzweigungspunkte. Der Durchlaufung von n Kurven auf F , die auf Φ *dieselbe* ge-

¹⁾ Enumération des surfaces de Riemann régulières de genre un. Comptes rendus, t. 168, p. 677, 1919.

²⁾ W. Scherrer, Zur Theorie der endlichen Gruppen topologischer Abbildungen von geschlossenen Flächen in sich, Habilit. Schrift, Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 1, Heft 2 (1929), (S. 118).

³⁾ Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 8, Heft 1 (1935).

geschlossene Spurkurve haben, ordnen wir folgendermaßen eine Substitution S zu: Die n übereinanderliegenden laufenden Punkte der Kurven führen von einer gewissen Ausgangslage (P_1, P_2, \dots, P_n) in die Endlage $(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_n})$ über. Die Substitution S ist die dadurch definierte Permutation der n Blätter und ist bestimmt durch die Art, in der die Blätter längs der Schnitte oder Ränder zusammengeheftet sind. (Ausführlichere Darlegung des Verfahrens auf S. 87 der unter²⁾ zitierten Arbeit.) So erhalten wir eine endliche Gruppe von Substitutionen, die sogenannte Monodromiegruppe. Es gilt dann der „*Monodromie-Satz*“: „Die Monodromiegruppe einer regulären Überlagerungsfläche ist vollständig isomorph mit der Gruppe der Decktransformationen unter Vertauschung der Faktorenfolge.“ Man kann daher von der durch die Zusammenheftung der Blätter bestimmten Monodromiegruppe sofort auf die Decktransformationen schließen und umgekehrt. Als *Verzweigungssubstitutionen* kommen in Frage:

1. $V_1, V_2 \dots V_v$ für die Umkreisung der Verzweigungspunkte (Überschreiten der nach den Verzweigungspunkten hingeführten Schnitte); (v = Anzahl der Verzweigungsstellen über Φ).
2. $R_1, R_2, \dots, R_\varrho$ für das Überschreiten der zu den Rändern hinführenden Schnitte; (ϱ = Anzahl der Ränder auf Φ).
3. S_{ik} für die Randübergänge auf dem k -ten Bogen des i -ten Randes.
4. \overline{V}_{ik} für das Umfahren der Faltverzweigungspunkte auf dem i -ten Rande.
5. $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_\pi, B_\pi$ für das Überschreiten der Schnitte eines kanonischen Schnittsystems auf Φ (π = Geschlecht von Φ), wenn Φ zweiseitig ist;
 A_1, A_2, \dots, A_π , wenn Φ einseitig ist.

Es bestehen nun folgende *Relationen*:

- (1) I $V_1 V_2 \dots V_v R_1 R_2 \dots R_\varrho A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} \dots A_\pi B_\pi A_\pi^{-1} B_\pi^{-1} = 1$,
falls Φ zweiseitig ist;
- (2) I' $V_1 V_2 \dots V_v R_1 R_2 \dots R_\varrho A_1^2 A_2^2 \dots A_\pi^2 = 1$,
falls Φ einseitig ist.
- (3) II $S_{i, \lambda+1} S_{i, \lambda} = \overline{V}_{i, \lambda} \quad \lambda = 1, 2, \dots, v_i - 1$.
- (4) III $R_i^{-1} S_{i, 1} R_i S_{i, v_i} = \overline{V}_{i, v_i}$.

Falls ein Rand keine Faltverzweigung trägt, gilt

$$(5) \quad \text{III}' \quad R_i^{-1} S_i R_i S_i = 1 \text{ (es ist } S_i \text{ für } S_{i,1} \text{ gesetzt)}$$

Falls Ränder auf Φ (nicht aber auf F) überhaupt vorhanden, gilt

$$(6) \quad \text{IV} \quad S_{ik}^2 = 1, \quad n \equiv 0 \pmod{2}.$$

Schließlich ist

$$(7) \quad \text{V} \quad V_i^{\lambda_i} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, v \quad (\lambda_i, \text{ die Ordnung der Verzweigung, ist Teiler von } n)$$

$$(8) \quad \text{VI} \quad \overline{V}_{ik}^{\mu_{ik}} = 1 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, \varrho \\ k = 1, 2, \dots, v_i. \end{array}$$

Dazu kommt noch die erweiterte „Hurwitz-Relation“:

$$(9) \quad 2 - z = n(2 - \zeta) - \sum_{(i)} n \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right) - \sum'_{(i,k)} \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu_{ik}}\right)$$

Hierbei bedeutet

$$(10) \quad z = 2p_2 + p_1 \text{ die Zusammenhangszahl der (geschlossenen) Überlagerungsfläche } F,$$

$$(11) \quad \zeta = 2\pi_2 + \pi_1 + \varrho \text{ diejenige der Modulfläche } \Phi.$$

$$(12) \quad \text{Ist } F \text{ zweiseitig, so ist } z = 2p, (p = p_2 = \text{Geschlecht})$$

Ferner gilt:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{wenn } \Phi \text{ zweiseitig ist: } \zeta = 2\pi + \varrho, \quad (\pi = \text{Geschlecht}). \\ \text{wenn } \Phi \text{ einseitig ist: } \zeta = \pi + \varrho. \end{array} \right\}$$

Schließlich brauchen wir noch folgenden Satz:

Eine endlichblättrige Überlagerungsfläche ist dann und nur dann einseitig, wenn die Monodromiegruppe eine Relation enthält, in welcher die unter Berücksichtigung der Multiplizitäten festgestellte Anzahl der indikatrix-umkehrenden erzeugenden Operationen ungerade ist. Als indikatrixumkehrende Operationen sind dabei diejenigen Substitutionen bezeichnet, welche einem Randübergang oder einem einufrigen Rückkehrschnitt entsprechen.

Nach dieser Zusammenstellung der erforderlichen Grundlagen können wir uns unserer eigentlichen Aufgabe, der Herleitung der ebenen Kongruenzgruppen zuwenden.

Unter den „ebenen Kristallgruppen“ oder „ebenen Kongruenzgruppen“ versteht man bekanntlich diejenigen diskreten Gruppen von Bewegungen und Spiegelungen der Euklidischen Ebene in sich, die einen endlichen Fundamentalbereich besitzen. Wenn wir als äquivalente Punkte diejenigen Punkte der Ebene bezeichnen, die aus einem ersten unter ihnen durch Anwendung aller Operationen der Gruppe hervorgehen, so definieren wir den „Fundamentalbereich“ als einen Bereich der Ebene, der zu jedem Punkt derselben genau einen äquivalenten enthält.

Unsere Aufgabe besteht darin, alle überhaupt möglichen ebenen Kongruenzgruppen aufzuzählen. Dabei wird die grundlegende Tatsache als bereits bewiesen vorausgesetzt, daß jede solche zwei linear unabhängige Translationen enthält⁴). (Dieser in den metrischen Eigenschaften der euklidischen Ebene begründete Satz wurde von Bieberbach und von Frobenius auf die Kongruenzgruppen des n -dimensionalen euklidischen Raumes übertragen⁵).)

Es existieren also in einer Kongruenzgruppe \mathfrak{K} der Ebene zwei linear unabhängige „primitive Translationen“, aus denen die ganze Untergruppe \mathfrak{L} der Translationen erzeugt wird. Die hinsichtlich \mathfrak{L} äquivalenten Punkte bilden ein zweidimensionales Punktgitter. Als der zu \mathfrak{L} gehörige Fundamentalbereich kann das „primitive Parallelogramm“ gewählt werden, das durch die Vektoren der beiden primitiven Translationen aufgespannt wird.

Um die Kongruenzgruppen zu gewinnen, wollen wir alle hinsichtlich der Translationsgruppe \mathfrak{L} äquivalenten Punkte P_1, P_2, \dots in inf. identifizieren, d. h. als einen einzigen Punkt P einer Modulmannigfaltigkeit F betrachten. Das kommt darauf hinaus, daß wir an Stelle der ganzen Ebene ein einziges primitives Parallelogramm herausgreifen und je zwei gegenüberliegende Seiten desselben identifizieren, indem wir sie zusammenheften. Die dadurch gewonnene Modulmannigfaltigkeit F hat dann den Zusammenhang eines Torus. Die Kongruenzgruppen der Ebene erscheinen jetzt als Abbildungsgruppen des Torus in sich, wobei die invariante Untergruppe \mathfrak{L} der Translationen durch die Identität auf dem Torus dargestellt wird. Die gesuchten Abbildungsgruppen des Torus sind

⁴) Siehe z. B. A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Springer, Berlin, 1927, S. 96.

⁵) Göttinger Nachr. 1910; Math. Ann. Bd. 70; Berliner Sitzungsberichte 1911.

die Faktorgruppen $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}/\mathfrak{L}$ der Kongruenzgruppen \mathfrak{R} . Daß diese Gruppen \mathfrak{F} endlich sind, muß zwar schon beim Existenzbeweis der zwei primitiven Translationen bewiesen und gebraucht werden. Es ist leicht, sich nachträglich davon zu überzeugen. Es gibt nämlich in der Ebene einen Kreis K von nicht verschwindendem Radius, der keine zwei äquivalente Punkte enthält. Denn andernfalls wäre die Gruppe kontinuierlich und hätte keinen Fundamentalbereich. Dem Kreis K entspricht auf dem Torus ein nicht verschwindender Bereich B . Die zu ihm äquivalenten Bereiche dürfen einander nirgends überdecken und können daher auf der endlichen Torusfläche nur in endlicher Anzahl auftreten. Die Torusgruppe ist also endlich.

Unser Torus F wurde aus einem *primitiven Parallelogramm* gebildet. Jeder fixpunktfreien indikatrix-erhaltenden Transformation von F entspricht eine Translation der Ebene, die nicht eine ganzzahlige Linearkombination der zwei primitiven Translationen ist und deshalb nicht zur Kongruenzgruppe gehört. Wir müssen deswegen nur diejenigen Torusgruppen aufsuchen, die keine fixpunktfreien indikatrixerhaltenden Operationen enthalten. Das ist dasselbe, wie wenn wir von *allen* überhaupt möglichen Torusgruppen nur die Faktorgruppen aufzählen, die zu den invarianten Untergruppen fixpunktfreier indikatrixerhaltender Abbildungen gehören.

Wir gehen jetzt daran, die gewünschten Gruppen aufzustellen⁶⁾.

Dazu verwenden wir die Hurwitz-Relation für geschlossene Flächen (9):

$$2 - z = n(2 - \zeta) - \sum n \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \sum' \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right).$$

Für den geschlossenen Torus ist $p = 1$, $z = 2p = 2$.

$$0 = n(2 - \zeta) - \sum n \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \sum' \frac{n}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)$$

$$0 = 2 - \zeta - \sum \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - \sum' \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right).$$

Daß die Blätterzahl n aus der Gleichung herausfällt, bedeutet, daß zwar nicht ganz beliebige n , aber doch beliebig viele verschiedene n Lösungen und Torusgruppen ergeben können.

⁶⁾ Für das Verfahren siehe die unter ²⁾ zitierte Abhandlung, S. 91.

Setzen wir (vgl. Seite 2) $\sum 1 = v$, $\sum' 1 = v'$, so folgt:

$$0 = 2 - \zeta - v + \sum \frac{1}{\lambda} - \frac{v'}{2} + \sum' \frac{1}{2\mu}$$

$$(14) \quad (H) \quad \sum \frac{1}{\lambda} + \sum' \frac{1}{2\mu} = \zeta + v + \frac{v'}{2} - 2.$$

Hier ist die linke Seite sicher nie negativ; dies gilt auch für die rechte:

$$(15) \quad \zeta + v + \frac{v'}{2} \geq 2$$

Andererseits folgt aus $\lambda_i \geq 2$ und $\mu_{ik} \geq 2$

$$(16) \quad \zeta + \frac{v}{2} + \frac{v'}{4} \leq 2.$$

Insbesondere ist

$$(17) \quad \zeta = 2\pi_2 + \pi_1 + \varrho \leq 2$$

$$(18) \quad \left. \begin{array}{l} v \leq 4 \\ v' \leq 8 \end{array} \right\}$$

Zur Aufzählung sämtlicher mit diesen Bedingungen verträglicher Lösungen von (H) setzen wir

$$(19) \quad \sigma = \zeta + v + v'$$

und bemerken, daß wegen (15)

$$(20) \quad \sigma \geq 2 \quad \text{ist.}$$

In der nachfolgenden Tabelle sind die Möglichkeiten nach aufsteigendem σ geordnet. Dabei sind bereits alle diejenigen Fälle weggelassen worden, die mit obigen Bedingungen unverträglich sind; ferner diejenigen, für welche die Hurwitz'sche Relation (H) keine Lösungen besitzt, und schließlich diejenigen, die sonstwie den Voraussetzungen widersprechen. So können z. B. Faltverzweigungen nur dann vorhanden sein ($v' \neq 0$), falls die Modulfläche Φ berandet ist: $\varrho \neq 0$. Für die übrigen bleibenden Fälle liefert (H) eine oder mehrere Lösungen. So erhält man im ganzen genau 17 Möglichkeiten.

(21)

Nr.	σ	ζ	π_2	π_1	ϱ	v	v'	Lösungen von (H)
1	2	2	1	0	0	0	0	
2			0	2	0			
3			0	1	1			
4			0	0	2			
5	3	1	0	1	0	2	0	$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
6			0	0	1			$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$
7			0	0	1	1	1	$\lambda = 3 \quad \mu = 3$
8								$\lambda = 4 \quad \mu = 2$
9		0	0	0	0	3	0	$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 6$
10								$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 4 \quad \lambda_3 = 4$
11								$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 3 \quad \lambda_3 = 3$
12			0	0	1	1	2	$\lambda = 2 \quad \mu_1 = \mu_2 = 2$
13	4	1	0	0	1	0	3	$\mu_1 = 2 \quad \mu_2 = 3 \quad \mu_3 = 6$
14								$\mu_1 = 2 \quad \mu_2 = 4 \quad \mu_3 = 4$
15								$\mu_1 = 3 \quad \mu_2 = 3 \quad \mu_3 = 3$
16			0	0	0	4	0	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$
17	5	1	0	0	1	0	4	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 2$

Es handelt sich jetzt darum, zu zeigen, daß die 17 gewonnenen Lösungen auch wirklich Torusgruppen liefern. Am einfachsten erreichen wir dies, indem wir von Fall zu Fall die Konstruktion der Überlagerungsfläche F durchführen, und zwar in der Weise eben, daß sie zu einem geschlossenen, zweiseitigen Torus wird. Da dieser ein *primitives Parallelogramm* darstellen soll, oder, anders ausgedrückt, da die zur Überlagerungsfläche gehörige Gruppe von Decktransformationen keine fixpunktfreien indikatrix-erhaltenden Abbildungen enthalten soll, muß die Überlagerungsfläche aus der *kleinsten* Anzahl von Blättern aufgebaut werden, welche überhaupt in Betracht fällt. An den nach dieser Vorschrift gewonnenen Modellen lassen sich die Eigenschaften der gesuchten Torusgruppen und der ihnen entsprechenden ebenen Kongruenzgruppen sofort erkennen. Jeder endlichen topologischen Torusgruppe entspricht zunächst eine unendliche topologische Gruppe der Ebene und dieser dann eine ebene Kongruenzgruppe. Denn alle auftretenden topologischen Abbildungen sind kongruenten Abbildungen der Ebene äquivalent, nämlich Drehungen, Spiegelungen, Gleitspiegelungen und Translationen.

Die Aufzählung der einzelnen Fälle soll möglichst kurz gehalten werden. Grundlagen dazu sind neben den oben gegebenen Vorschriften und der Tabelle (21) die Relationen (1) bis (8), der Monodromiesatz (S. 236) und der Satz über die Nichtorientierbarkeit der Überlagerungsfläche (S. 237).

Einzeluntersuchung der 17 Lösungen

1. Φ ist ein unberandeter Torus. Die Überlagerungsfläche F ist daher mit Φ identisch und besteht deshalb aus einem einzigen Blatt. Die Torusgruppe besteht aus der Identität allein. Die zugehörige ebene Kongruenzgruppe ist die zweigliedrige Translationsgruppe.

2. Φ ist eine Kugel mit zwei Kreuzhauben. Dem aus zwei einufrigem Rückkehrschnitten bestehenden Schnittsystem entsprechen die Substitutionen A_1 und A_2 . Die *Relation* I' (2), $A_1^2 A_2^2 = 1$, kann für $n = 2$ erfüllt werden. Man hefte nämlich die zwei Blätter nach der Vorschrift zusammen: $A_1^2 = 1$, $A_2^2 = 1$, $A_1 = A_2^*$). Die aufgeschnittene Fläche Φ stelle man sich als Kugel mit zwei Löchern vor. Zwei solcher Exemplare sind in der Weise zu vereinigen, daß bei den zwei Paaren übereinanderliegender Ränder je ein Randpunkt des einen Exemplars mit dem diametral gegenüberliegenden des andern verknüpft wird. Die geschilderte Vereinigung geschieht am einfachsten, wenn man die eine der Kugeln um eine durch die Mitten der zwei Lochpaare gehende Achse um 180° dreht und dann übereinanderliegende Randpunkte verknüpft. Daß man so einen Torus erhält, sieht man leicht ein. Die Decktransformation führt zu einer fixpunktfreien, indikatrixumkehrenden Involution des Torus, einer Drehspiegelung. Den zwei sich nicht treffenden Drehzykeln auf ihm entspricht in der Ebene eine Schar paralleler Gleitspiegelachsen. Die gefundene Kongruenzgruppe besteht nur aus Gleitspiegelungen und Translationen.

3. Φ ist eine Kugel mit einer Kreuzhaube und einem Rand. *Relationen*: $I' RA^2 = 1$, $IV S^2 = 1$. Sie sind erfüllt, wenn $n = 2$, $A = S$, $R = 1$. Die Verknüpfung der Blätter ist hieraus ohne weiteres zu erkennen.

Auf dem Torus: Ein Fixzykel und ein Drehzykel, die sich nicht treffen.

In der Ebene: Eine Schar paralleler Achsen, die abwechselnd Gleitspiegelachsen und Spiegelachsen sind, nebst Translationen. (Die Translationsgruppe, die ja immer als Untergruppe vorhanden ist, wird künftig nicht besonders angeführt.)

*) Das willkürliche Beifügen von „Zusatzrelationen“ bedeutet gruppentheoretisch das Bilden einer Faktorgruppe. Siehe z. B. *Seifert & Threlfall*, Lehrbuch der Topologie, (Teubner 1934), S. 299.

4. Φ ist ein ebener Kreisring.

Relationen: I. $R_1 R_2 = 1$, IV. $S_1^2 = 1, S_2^2 = 1$.

Brauchbare Lösung: $n = 2, R_1 = R_2 = 1, S_1 = S_2$.

Modell: Spiegelung des Torus an einer ihn in zwei Fixzykeln schneidenden Ebene. Dem entspricht für die ebene Kongruenzgruppe eine Schar paralleler Spiegelachsen.

5. Es gelten die *Relationen*: I' $V_1 V_2 A^2 = 1$, V. $V_1^2 = 1, V_2^2 = 1$. Hier reichen zwei Blätter nicht hin; denn sonst wäre $A = V_1$ und F würde einseitig. Dagegen kommt man mit vier Blättern aus. Die Monodromiegruppe ist eine Vierergruppe und besteht aus den Operationen $1, V_1 = V_2, A, A V_1$. (Eine zyklische Gruppe G_4 mit A als erzeugendem Element ist nicht möglich, da notwendig $V_1 = V_2 = A^2$ wäre, was mit I' nicht verträglich ist.)

Modell: Wegen der Relation $A^2 = 1$ sind die 4 Blätter längs des einufrigen Rückkehrschnittes zu je zweien vereinigt. Auf dem Torus existieren daher zwei sich nicht treffende Drehzykel, in der Ebene eine Schar paralleler Gleitspiegelachsen. Der Torus gestattet eine Drehung von 180° um eine Achse, die ihn in zwei mal zwei Punkten (V_1, V_2) trifft. In der Ebene liegen demnach zwischen den erwähnten Gleitspiegelachsen Rotationszentren für Drehungen um 180° , sogenannte Digyren. Der indikatrixumkehrenden, fixpunktfreien Operation AV entsprechen auf dem Torus weitere zwei Drehzykel, welche die ersten zwei treffen. In der Ebene gibt es also eine zweite Schar paralleler Gleitspiegelachsen quer zur ersten Schar.

6. *Relationen*: I. $V_1 V_2 R = 1$, IV. $S^2 = 1$, V. $V_1^2 = 1, V_2^2 = 1$. Wir erhalten wieder eine Vierergruppe: $1, V_1 = V_2, S, S V_1$.

Modell: Die Spiegelung S mit zwei Fixzykeln, die sich nicht treffen, bedeutet die Spiegelung des Torus an einer ihn schneidenden Ebene. $V_1 = V_2$ ist eine Drehung um eine Achse, die den Torus in 4 Punkten trifft, und die wir uns senkrecht auf der Spiegelebene denken können. $S V_1$ ist eine indikatrixumkehrende, fixpunktfreie Operation, also eine Gleitspiegelung, die in unserem Modell als Spiegelung am Zentrum erscheint. Die zwei zugehörigen Drehzykel treffen die Fixzykel und werden außerdem von den Windungspunkten je in zwei Teile getrennt. Wir schließen daraus: Die ebene Kongruenzgruppe enthält Spiegelungen an einer Schar paralleler Achsen, ferner Gleitspiegelungen an einer Schar quer dazu liegender Achsen, schließlich Digyren, deren Zentren sich auf den Gleitspiegelachsen befinden.

7. *Relationen*: I. $VR = 1$, III. $R^{-1}SR S = \bar{V}$, IV. $S^2 = 1$, V. $V^3 = 1$, VI. $\bar{V}^3 = 1$.

Diesen Bedingungen kann mit $n = 6$ als niedrigster Ordnung genügt werden, indem man die Heftung der 6 Blätter so vollzieht, daß $\bar{V} = R$ wird. Dann definieren die Folgerelationen $R^3 = 1$, $S^2 = 1$ und $RSRS = 1$ eine Diedergruppe G_6 .

Modell: Die Abbildungsgruppe besitzt auf dem Torus einen Fixpunkt $P_1 (\bar{V})$. Seine Umgebung und die Umgebungen zweier weiterer Punkte P_2 und $P_3 (V)$ erfahren bei den indikatriceserhaltenden Operationen 3-zählige Drehungen in sich. Die übrigen Operationen sind für die Umgebung von P_1 Spiegelungen an einem der drei durch P_1 laufenden Fixzykel, und sie vertauschen die Drehzentren P_2 und P_3 .

In der ebenen Kongruenzgruppe befinden sich Spiegelungen an 3 Scharen paralleler Achsen, die untereinander Winkel von 60° bzw. 120° bilden und sich stets zu dreien schneiden. Diese Schnittpunkte sind auch Zentren 3-zähliger Rotationen; zwischen ihnen liegen doppelt so viele eigentliche Trigynen.

8. *Relationen*: I. $VR = 1$, III. $R^{-1}SR S = \bar{V}$, VI. $S^2 = 1$, V. $V^4 = 1$, VI. $\bar{V}^2 = 1$.

Wir heften 8 Blätter nach diesen Vorschriften und sorgen dafür, daß $\bar{V} = R^2$ wird. Es resultiert eine Diedergruppe G_8 , definiert durch die Relationen $R^4 = 1$, $S^2 = 1$, $RSRS = 1$.

Modell: Es existieren Abbildungen, bei denen die Umgebungen zweier Punkte 4-zählige Drehungen erfahren (V), daneben Spiegelungen, welche diese Drehzentren vertauschen. Es gibt ferner zwei Punkte (\bar{V}), in denen sich je ein Paar von Fixzykeln kreuzt, deren Umgebung also bei der Operation \bar{V} eine Rotation von 180° ausführt.

Die Kongruenzgruppe der Ebene enthält Rotationen von 90° um Zentren, die notwendig ein quadratisches Gitter bilden. Ferner existieren zwei Scharen einander kreuzender Spiegelachsen, die nicht durch die Tetragynenzentren laufen. Ihre Schnittpunkte sind Zentren von 2-zähligen Drehungen. Der Operation RS und anderen entsprechen Gleitspiegelungen.

9. *Relationen*: I. $V_1 V_2 V_3 = 1$, V. $V_1^2 = 1$, $V_2^3 = 1$, $V_3^6 = 1$. Diesen Relationen genügt eine zyklische Gruppe der Ordnung 6. Dabei ist $V_1 = V_3^3$ und $V_2 = V_3^2$.

Die ebene Kongruenzgruppe enthält Drehungen von 60° (Hexagyren), deren Zentren ein rhombisches Gitter vom Achsenwinkel 60° erfüllen. Zwischen ihnen liegen doppelt so viele Trigyre und drei mal so viele Digyre.

10. *Relationen*: I. $V_1 V_2 V_3 = 1$, V. $V_1^2 = 1$, $V_2^2 = 1$, $V_3^2 = 1$. Hier existiert eine zyklische G_4 , falls $V_1 = V_2$ und $V_2 = V_3$ genommen wird.

Die ebene Kongruenzgruppe enthält Rotationen von 90° um Zentren, welche in einem quadratischen Gitter angeordnet sind. Dazwischen befinden sich Digyre (V_1).

11. *Relationen*: I. $V_1 V_2 V_3 = 1$, V. $V_1^3 = 1$, $V_2^3 = 1$, $V_3^3 = 1$. Wir machen $V_1 = V_2 = V_3$ und erreichen eine zyklische G_3 . Die ebene Kongruenzgruppe enthält Rotationen von 120° , Trigyre, deren Zentren ein rhombisches Gitter mit dem Achsenwinkel 60° erfüllen.

12. *Relationen*: I. $VR = 1$, II. $S_2 S_1 = \bar{V}_1$, III. $R^{-1} S_1 R S_2 = \bar{V}_2$, IV. $S_1^2 = 1$, $S_2^2 = 1$, V. $V^2 = 1$, VI. $\bar{V}_1^2 = 1$, $\bar{V}_2^2 = 1$.

Diese Relationen definieren eine Vierergruppe:

$$1, S_1, S_2, S_1 S_2 = \bar{V}_1 = \bar{V}_2 = V = R. \quad n = 4.$$

Modell: Der Torus trägt zwei geschlossene Fixzykel, die sich *zweimal* überkreuzen (\bar{V}_1, \bar{V}_2 !). Wenn der erste z. B. den Torus als „Längenzirkel“ umschließt, so muß sich der zweite quer zum ersten zweimal um den Torus herumwinden. Der Torus ist dadurch in zwei Gebiete getrennt. In jedem Gebiet liegt ein Fixpunkt der Operation V , ein Digyrenzentrums (P_1, P_2). S_1 und S_2 vertauschen diese beiden Punkte P_1 und P_2 . Eine gewisse, sich zweimal um den Torus herumwindende Linie, die den als Längenzirkel bezeichneten Fixzykel C_1 zweimal überschreitet, zum andern Fixzykel C_2 gewissermaßen „parallel“ verläuft, und dabei durch die beiden Punkte P_1 und P_2 hindurch geht, erfährt bei der Spiegelung an C_2 eine fixpunktfreie Drehung in sich. Eine solche erfährt auch ein „Längenzirkel“, der durch P_1 und P_2 geht und den Fixzykel C_2 zweimal überschreitet, bei der Spiegelung an C_1 .

Die ebene Kongruenzgruppe enthält also zwei senkrecht zueinanderliegende Scharen von abwechselnd parallelen Spiegel- und Gleitspiegelachsen. Die Schnittpunkte zweier Spiegelachsen und diejenigen zweier Gleitspiegelachsen sind Zentren für 2-zählige Drehungen.

13. Relationen:

$$\begin{aligned} \text{I. } R &= 1, & \text{II. } S_2 S_1 &= \bar{V}_1, S_3 S_2 = \bar{V}_2, & \text{III. } R^{-1} S_1 R S_3 &= \bar{V}_3, \\ \text{IV. } S_1^2 &= S_2^2 = S_3^2 = 1, & \text{VI. } \bar{V}_1^2 &= 1, \bar{V}_2^3 = 1, \bar{V}_3^6 = 1. \end{aligned}$$

Hier ist eine Diedergruppe der Ordnung 12 möglich. Ihre definierenden Relationen sind $S_1^2 = 1$, $S_3^2 = 1$, und $(S_1 S_3)^6 = 1$. Beim Verknüpfen der Blätter muß man dafür sorgen, daß folgende Zusatzrelationen erfüllt werden:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_3^3, S_2 = \bar{V}_3^3 S_1, \bar{V}_2 = \bar{V}_3^2.$$

Die ebene Kongruenzgruppe enthält Spiegelungen an 6 Scharen paralleler Achsen, deren Winkel untereinander Vielfache von 30° sind. Die Schnittpunkte von sechs Spiegelachsen sind Zentren von 6-zähligen Drehungen (Hexagyren). Sie bilden ein rhombisches Gitter vom Achsenwinkel 60° . Die Schnittpunkte von drei Spiegelachsen sind Zentren von Trigynen, diejenigen von zwei Achsen Zentren von Digynen.

14. Relationen:

$$\begin{aligned} \text{I. } R &= 1, & \text{II. } S_2 S_1 &= \bar{V}_1, S_3 S_2 = \bar{V}_2, & \text{III. } R^{-1} S_1 R S_3 &= \bar{V}_3, \\ \text{IV. } S_1^2 &= S_2^2 = S_3^2 = 1, & \text{VI. } \bar{V}_1^2 &= 1, \bar{V}_2^4 = 1, \bar{V}_3^4 = 1. \end{aligned}$$

Hier gibt es eine Diedergruppe von der Ordnung 8:

$$S_1^2 = 1, S_3^2 = 1, (S_1 S_3)^4 = 1. \text{ Dabei ist } \bar{V}_1 = \bar{V}_3^2, S_2 = \bar{V}_3^2 S_1, \bar{V}_2 = \bar{V}_3.$$

Modell: Die Gruppe hat auf dem Torus zwei Fixpunkte, durch welche dieselben vier Fixzykel hindurchlaufen (\bar{V}_2, \bar{V}_3). Ferner gibt es zwei Stellen, an denen sich je zwei Fixzykel kreuzen (\bar{V}_1).

Die ebene Kongruenzgruppe enthält Spiegelungen an vier Scharen paralleler Achsen, die sich unter 45° bzw. 90° schneiden. Die Schnittpunkte von vier Achsen sind Zentren 4-zähliger Drehungen und bilden daher ein quadratisches Gitter. Die Schnittpunkte von nur zwei Achsen sind Zentren 2-zähliger Drehungen.

15. Relationen:

$$\begin{aligned} \text{I. } R &= 1, & \text{II. } S_2 S_1 &= \bar{V}_1, S_3 S_2 = \bar{V}_2, & \text{III. } R^{-1} S_1 R S_3 &= \bar{V}_3, \\ \text{IV. } S_1^2 &= S_2^2 = S_3^2 = 1, & \text{VI. } \bar{V}_1^3 &= 1, \bar{V}_2^3 = 1, \bar{V}_3^3 = 1. \end{aligned}$$

Dies gibt eine Diedergruppe der Ordnung 6.

Modell: Die Torusgruppe hat drei Fixpunkte ($\bar{V}_1, \bar{V}_2, \bar{V}_3$), durch welche dieselben drei Fixzykel hindurchlaufen. Die Umgebungen dieser drei Punkte erfahren gleichzeitig 3-zählige Drehungen.

Die ebene Kongruenzgruppe enthält Spiegelungen an drei Scharen paralleler Achsen mit den Winkeln 60° und 120° gegeneinander. Die Achsen schneiden sich je zu dreien in Zentren von Trigynen. Diese bilden ein rhombisches Gitter mit dem Achsenwinkel 60° .

16. *Relationen*: I. $V_1 V_2 V_3 V_4 = 1$, V. $V_1^2 = V_2^2 = V_3^2 = V_4^2 = 1$.
Diesen Relationen genügt eine Involution: $n = 2$, $V_1 = V_2 = V_3 = V_4$.

Modell: Drehung von 180° um eine den Torus in 4 Punkten treffende Achse.

Die ebene Kongruenzgruppe besteht neben den Translationen nur aus Rotationen um 180° , Digynen.

17. *Relationen*:

I. $R = 1$, II. $S_2 S_1 = \bar{V}_1$, $S_3 S_2 = \bar{V}_2$, $S_4 S_3 = \bar{V}_3$, III. $R^{-1} S_1 R S_4 = \bar{V}_4$,
IV. $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_4^2 = 1$, VI. $\bar{V}_1^2 = \bar{V}_2^2 = \bar{V}_3^2 = \bar{V}_4^2 = 1$.

Die Relationen definieren die Vierergruppe:

$$1, S_1 = S_3, S_2 = S_4, S_1 S_2 = \bar{V}_1 = \bar{V}_2 = \bar{V}_3 = \bar{V}_4.$$

Modell: Die Torusgruppe besteht aus den Spiegelungen an einer Ebene, die zwei „Breitenkreise“ herauschneidet, und an einer zweiten, senkrecht dazu stehenden Ebene.

Die ebene Kongruenzgruppe enthält Spiegelungen an zwei zu einander senkrecht stehenden Scharen paralleler Geraden. Die Schnittpunkte zweier Spiegelachsen sind Zentren 2-zähliger Drehungen.

Schlußbemerkungen: Durch die Konstruktion der Überlagerungsmodelle ist die Existenz der 17 Gruppen bestätigt worden. Ihre Operationen übersieht man anschaulich bequem an den 17 einfachen Ornamenttypen, wie sie z. B. in A. Speisers „Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung“⁷⁾ abgebildet sind.

Als Anwendungsbeispiel für die Gruppen *berandeter* Flächen ließen sich in ganz analoger Weise die endlichen Gruppen des Zylindermantels (d. h. des ebenen Kreisringes) aufstellen. Ihre Faktorgruppen liefern die 7 Kongruenzgruppen eines von zwei parallelen Geraden berandeten ebenen Streifens, also die Gruppen der ebenen Bortenornamente.

Zur Literatur.

Die hier auf einem neuen Wege hergeleiteten 17 ebenen Kongruenzgruppen wurden zuerst von G. Pólya aufgestellt (Zeitschr. f. Krist.,

⁷⁾ Loc. cit. ⁴⁾ S. 87.

Bd. 60, 1924, S. 278), darauf von andern, z. B. von *P. Niggli*, bearbeitet, in der Hauptsache mit *euklidisch-geometrischen* Methoden.

Ich nenne ferner die Arbeit von *J. J. Burckhardt*, „Zur Theorie der Bewegungsgruppen“ (Comm. Math. Helv., Vol. 6, Heft 3, 1933/34), in welcher die Gruppen mit Hilfe eines *algebraisch-gruppentheoretischen* Verfahrens gewonnen werden.

Mit *topologischen* Methoden bestimmte *Brouwer* die indikatrix-erhaltenden endlichen Selbstabbildungsgruppen des Torus, womit indirekt bereits diejenigen 5 ebenen Kongruenz-Gruppen gewonnen sind, welche nur aus Translationen und Rotationen bestehen. Unser Beitrag bildet demnach eine Fortsetzung und Vervollständigung der *Brouwerschen* Arbeit (Fußnote¹). Einen andern Weg — in Problemstellung und Methode — schlägt *F. Laves* ein („Ebenenteilung und Koordinationszahl“, Zeitschr. f. Krist., Bd. 78, Heft 3/4, 1931, S. 208). Er beweist mit kombinatorisch-arithmetischen Überlegungen, ohne gruppentheoretische Hilfsmittel, daß es genau 11 topologisch verschiedene Ebenenteilungen gibt, die aus endlichen Polygonen (gleicher Eckenzahl) bestehen, welche die unendliche euklidische Ebene lückenlos erfüllen und der Bedingung genügen, daß jedes Polygon in topologisch äquivalenter Art umgeben ist wie jedes andere Polygon. Die Behauptung gilt allerdings nur unter einer weiteren einschränkenden Bedingung, über die man sich in dem genannten Artikel orientieren möge.

Die *euklidisch-geometrischen* und *algebraisch-gruppentheoretischen* Methoden führten zur Lösung des entsprechenden Problems in *drei Dimensionen*, nämlich zur Aufzählung der 230 Raumgruppen, und sogar zur Aufstellung wesentlicher Sätze über die *n*-dimensionalen Raumgruppen. Mit *topologischen* Hilfsmitteln dagegen konnten dieselben bisher nicht hergeleitet werden, da ja die wichtigste topologische Frage, das Homöomorphie-Problem, für mehr als 2 Dimensionen nicht gelöst ist. Vielmehr zog, in umgekehrter Richtung, die Topologie Nutzen aus der Kenntnis der Raumgruppen. Auf diesem Wege wurde in den Arbeiten von *W. Hantzsche* und *H. Wendt* („Dreidimensionale euklidische Raumformen“, Math. Ann. Bd. 110, 1934, S. 593) und von *W. Nowacki* („Die euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen“, Comm. Math. Helv., Vol. 7, Heft 2, 1934) das Problem der euklidischen Raumformen vollständig gelöst. Die ganze Entwicklung der Raumgruppen-Frage, samt Literaturangaben, findet man kurz zusammengefaßt in den erwähnten Arbeiten von *Burckhardt* und *Nowacki*.

Für die topologischen Fragen verweise ich besonders noch auf das Lehr-

buch der Topologie von *Seifert* und *Threlfall* (Teubner 1934), für das Gruppentheoretische auf dessen Schlußkapitel.

Die vorliegende Arbeit bildete ursprünglich einen selbständigen Bestandteil meiner Berner Dissertation („Beiträge zur Theorie der endlichen Gruppen topologischer Abbildungen von Flächen in sich“, datiert vom 19. Juli 1933), deren erster Teil unter dem Titel „Die maximalen Ordnungen periodischer topologischer Abbildungen geschlossener Flächen in sich“ in den *Comm. Math. Helv.* (Vol. 8, Heft 1, 1935) gedruckt wurde. Die seit 1933 erschienene Literatur konnte deshalb nur noch in diesem Anhang berücksichtigt werden.

(Eingegangen den 25. April 1935.)