Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1935-1936)

Artikel: Le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre ellipsoidal en rotation permanente.

Autor: Putnis, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-9292

Le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre ellipsoïdal en rotation permanente

Par A. Putnis, Riga

§ 1. D'après M. Wavre nous appellerons astre un fluide parfait soumis à l'influence des attractions newtoniennes de ses propres particules.

Supposons que la surface libre de l'astre à pression constante soit un ellipsoïde de révolution aplati, animé d'un mouvement de rotation permanente autour de son axe polaire.

D'après le théorème classique de Stokes[1]), étendu par M. Dive[2]) aux rotations permanentes et que M. Wavre[3]) a entièrement généralisé, le potentiel newtonien dû à un astre est déterminé à l'extérieur par la connaissance des éléments stokiens.

Dans notre problème les éléments stokiens sont : la masse totale M, la vitesse angulaire ω, le demi-axe polaire s et l'excentricité linéaire e de la surface libre.

Supposant ces éléments donnés, nous formerons l'expression du potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre.

§ 2. L'équation de l'hydrodynamique pour la surface libre en rotation permanente s'écrit :

$$f \cdot dU_s + \frac{\omega^2}{2} dl_s^2 = 0 , \tag{1}$$

où f est la constante de la gravitation, U_s le potentiel newtonien de l'astre en un point de la surface libre, l_s la distance de ce point à l'axe de rotation et ω la vitesse angulaire de ce point.

Employons des coordonnées r, ϑ, φ liées aux coordonnées cartésiennes par les équations

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \cos \varphi \\ z &= \sqrt{r^2 + e^2} \sin \vartheta \sin \varphi . \end{aligned} \tag{2}$$

1) Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. 4, 1849.

2) Rotations internes des astres fluides, Thèse, Blanchard, Paris 1930.

3) Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 194, p. 1447, 1932.

En prenant x dans la direction de l'axe de rotation, l'équation (1) s'écrit en r et ϑ.

$$f\,d\,U_s + \omega^2\,[r\,\sin^2\vartheta\,d\,r + (r^2+e^2)\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,d\,\vartheta] = 0\,. \tag{3}$$

D'après (2) nous avons

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2+z^2}{r^2+e^2} = 1\,.$$

C'est-à-dire que l'équation $r = s =$ const. détermine un ellipsoïde de révolution aplati de demi-axe polaire s et d'excentricité linéaire e.

Pour la surface libre ellipsoïdale d'un astre l'équation (3) s'écrit alors

$$f\cdot d\,U_s + \omega^2\,(s^2+e^2)\,\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,d\vartheta = 0$$

ou

$$\frac{d\,U_s}{d\,\cos^2\vartheta} = \frac{s^2+e^2}{2f}\,\omega^2\,. \tag{4}$$

§ 3. Supposons la rotation permanente de la surface libre symétrique par rapport è l'équateur.

Alors le développement de ω^2 en polynômes de Legendre s'écrit

$$\omega^2 = \sum_{n=0}^{m} \omega_{2n}\,P_{2n}\,(\cos\vartheta) \tag{5}$$

où m est un entier positif, ou $m = \infty$; ω_{2n} sont des constantes déterminées et P_{2n} le $2n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre :

$$P_{2n}(\cos\vartheta) = \sum_{k=0}^{n} a_{2n,\,2k}\,\cos^{2k}\vartheta \tag{6}$$

avec

$$a_{2n,\,2k} = (-1)^{n-k}\,\frac{1\cdot3\cdots(4n-1)}{(2n)\,!}\;\frac{2n\,(2n-1)\cdots(2k+1)}{2\cdot4\cdots2(n-k)\cdot(4n-1)\,(4n-3)\cdots(2n+2k+1)} \tag{7}$$

pour $k < n$,

$$a_{2n,\,2n} = \frac{1\cdot3\cdots(4n-1)}{(2n)\,!}\ \text{et}\ a_{0,0} = 1\,.$$

Substituons dans (5) les P_{2n} exprimés par (6), et supposons que, dans le cas $m = \infty$, la série ainsi obtenue

$$(8) \qquad \omega^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \omega_{2n} a_{2n,2k} \cos^{2k} \vartheta$$

est absolument et uniformément convergente. Ce qui revient à demander que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} | \omega_{2n} a_{2n,2k} |$$

soit convergente.

D'après (4) et (5) on a

$$\frac{dU_s}{d\cos^2\vartheta} = \frac{s^2+e^2}{2f} \sum_{n=0}^{m} \omega_{2n} P_{2n}(\cos\vartheta),$$

et le potentiel newtonien sur la surface libre s'écrit

$$(9) \qquad U_s = \frac{s^2+e^2}{2f} \left\{ \sum_{n=0}^{m} \omega_{2n} \int P_{2n}(\cos\vartheta)\, d\cos^2\vartheta + F_0 \right\},$$

où F_0 est une constante d'intégration.

Un calcul à partir de (9) donne

$$(10) \qquad U_s = \frac{s^2+e^2}{2f} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} P_{2p}(\cos\vartheta),$$

où

$$(11) \qquad F_{2p} = \sum_{n=p-1}^{m} \omega_{2n} b_{2n,2p} \quad \text{pour } p = 1, 2, 3, \cdots;$$

$$(12) \qquad \begin{aligned} b_{2n,2p} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots(2p)}{1\cdot3\cdot5\cdots(4p-1)} \left\{ \frac{a_{2n,2p-2}}{p} + \frac{a_{2n,2p}}{p+1} \frac{(2p+1)(2p+2)}{2\cdot(4p+3)} + \right. \\ \left. + \frac{a_{2n,2p+2}}{p+2} \frac{(2p+1)(2p+2)(2p+3)(2p+4)}{2\cdot4\cdot(4p+3)(4p+5)} + \cdots \right\}; \end{aligned}$$

(12) est une somme dont les coefficients $a_{2n,2p-2}$, $a_{2n,2p}$ $\cdots$ $a_{2n,2n}$ sont donnés par l'expression (7).

Si la convergence de (8) est assurée, l'expression

$$(13) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} | F_{2p} |$$

est aussi une série convergente.

§ 4. Formons l'expression

$$U = \frac{s^2 + e^2}{2f} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} \frac{Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right)}{Q_{2p}\left(\frac{is}{e}\right)} P_{2p}(\cos\vartheta)\,, \tag{14}$$

où $i = \sqrt{-1}$ et r, ϑ sont des coordonnées d'un point extérieur à l'astre. Q_{2p} est la $2p^{\text{ième}}$ fonction sphérique de seconde espèce. Pour $\frac{e}{r} < 1$ elle s'écrit en série hypergéométrique convergente

$$Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right) = \frac{(2p)!}{1\cdot 3\cdots(4p+1)}\,\frac{1}{i^{2p+1}}\left[\left(\frac{e}{r}\right)^{2p+1} - \frac{(2p+1)\,(2p+2)}{2\cdot(4p+3)}\left(\frac{e}{r}\right)^{2p+3} + \cdots\right].$$

Démontrons que (14) représente le potentiel newtonien à l'extérieur de l'astre.

En effet, les fonctions

$$Q_{2p}\left(\frac{ir}{e}\right) P_{2p}(\cos\vartheta) \quad \text{où } p = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

sont harmoniques à l'extérieur[4]), nulles à l'infini et atteignent leur plus grande valeur absolue sur la surface libre de l'astre et au point $\vartheta = 0$.

Alors (14) est une fonction harmonique qui a la valeur de (10) sur la surface libre et s'annule à l'infini. C'est la solution du problème extérieur de Dirichlet pour la condition aux limites (10).

Si la série (13) est convergente, la série (14) pour $m = \infty$ l'est aussi.

Pour déterminer la constante F_0, considérons l'expression générale du potentiel newtonien.

$$U = \int \frac{dm}{R} \tag{15}$$

où R est la distance du point potentié au point potentiant. Il est possible avec les coordonnées (2) de développer $\frac{1}{R}$ en une série de fonctions sphériques.[5])

[4]) *Wangerin,* Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen, 2e Vol. P. 185.

[5]) *Wangerin,* l. c., 189.

En transportant ce développement dans (15) on trouve

$$F_0 = \frac{2if}{e(e^2+s^2)} M Q_0\left(\frac{is}{e}\right), \tag{16}$$

où M est la masse totale de l'astre.

L'expression (14) donne le potentiel newtonien en tout point à l'extérieur de l'astre. Les coefficients F_{2p} de cette expression sont déterminés par (11) pour $p = 1, 2, 3, \cdots$ et par (16) pour $p = 0$.

Si l'aplatissement de l'astre est petit, on peut, comme dans la théorie classique des figures d'équilibre, considérer $\frac{e^2}{s^2}$ comme une quantité de premier ordre et négliger $\frac{e^4}{s^4}$, $\frac{e^6}{s^6}$, $\cdots$

Dans ce cas $\frac{e^2}{s^2} = 2\varepsilon$, où ε est l'aplatissement de l'astre et l'on a :

$$U = \frac{s^2}{2f} \sum_{p=0}^{m+1} F_{2p} \frac{s^{2p+1}}{r^{2p+1}} [1 + \varepsilon K_p] \, P_{2p}(\cos\vartheta) \tag{17}$$

où

$$K_p = \frac{4p^2+6p+2}{4p+3}\left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) + 2 \, .$$

L'expression (17) peut être utile dans les applications.

Je remercie vivement M. Wavre pour la bienveillante attention avec laquelle il a guidé mes recherches.

(Reçu le 20 juillet 1935.)