Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 7 (1934-1935)

Artikel: Asymptotische Entwicklungen der Laguerreschen Polynome.

Autor: Moecklin, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515582

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Asymptotische Entwicklungen der Laguerreschen Polynome

Von E. Moecklin, Zürich

Einleitung

§ 1. In der vorliegenden Arbeit werden asymptotische Entwicklungen für die Laguerreschen Polynome

$$L_n(x) = e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) = n! \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{x^\nu}{\nu!} \tag{1}$$

aufgestellt. Wir beschränken uns auf die Betrachtung reeller Werte von x, behandeln aber sowohl den Fall $n \mid x \mid \to \infty$ wie den Fall, wo $n \mid x \mid$ beschränkt bleibt. Die angewandte Methode ist die Paßmethode, die in einer ähnlichen Untersuchung von M. Plancherel und W. Rotach[1]) zur Herleitung asymptotischer Entwicklungen der Hermiteschen Polynome gedient hat.

Aus (1) erhält man mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel folgende Integraldarstellung von $L_n(x)$:

$$\frac{L_n(x)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{y^n e^{-(y-x)}}{(y-x)^{n+1}} dy = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-z} \left(1 + \frac{x}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int F(z) \frac{dz}{z}, \tag{2}$$

wo zur Abkürzung

$$F(z) = e^{-z} \left(1 + \frac{x}{z}\right)^n \tag{3}$$

gesetzt ist. In der z-Ebene ist das Integral im positiven Sinn über eine einfach geschlossene Kurve zu erstrecken, die den Punkt $z = 0$ im Innern enthält.

Die Funktion $F'(z)$ besitzt außer $z = -x$ die beiden Nullstellen

$$z = -\frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - nx}, \tag{4}$$

nämlich die Wurzeln der Gleichung $z^2 + xz + nx = 0$.

---

[1]) *M. Plancherel* et *W. Rotach*, Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite. Comment. math. helv. 1, 1929, p. 227—254. In Formel (12_2) dieser Arbeit ist $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2\nu}{3}}$ statt $\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\nu}{3}}$ zu lesen.

Ist $x \neq 0, 4n$, so sind diese Wurzeln voneinander verschieden. Im Fall $0 < x < 4n$ bezeichne z_0 diejenige mit positivem Imaginärteil, z_1 sei die konjugierte. In den Fällen $x > 4n$ und $x < 0$ werde von den beiden reellen Wurzeln diejenige mit dem kleinern absoluten Betrag mit z_0 bezeichnet. Betrachten wir in der z-Ebene die Umgebung eines der Punkte (4), etwa z_0. Sie wird durch die Kurve $|F(z)| = |F(z_0)|$, für welche z_0 ein Doppelpunkt ist, in 4 Sektoren geteilt, in denen abwechselnd $|F(z)| > |F(z_0)|$ und $|F(z)| < |F(z_0)|$ ist. Die Fläche $w = |F(z)|$ besitzt für $z = z_0$ einen Paß. Dasselbe gilt für $z = z_1$. Je nach dem zu betrachtenden Fall wählt man nun den Integrationsweg durch einen oder beide Pässe in den Sektoren, wo $|F(z)| < |F(z_0)|$, $|F(z)| < |F(z_1)|$ ist, so daß im Paß die Tangente an die Integrationskurve mit der Winkelhalbierenden des Sektors zusammenfällt. (Richtung des größten Gefälles von $|F(z)|$). Den wesentlichen Beitrag zum Integral (2) liefern dann die Umgebungen der Pässe, wie im folgenden gezeigt wird.

Ist $x = 4n$, so fallen z_0 und z_1 im Punkt $-\frac{x}{2}$ zusammen, dessen Umgebung in 6 Sektoren der beschriebenen Art geteilt wird.

§ 2. Die asymptotischen Entwicklungen

Die Polynome

$$\varphi_\lambda(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{\lambda\mu}\,\xi^\mu, \quad \chi_{\lambda p}(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} b_{\lambda\mu}^{(p)}\,\xi^\mu, \quad \psi_\lambda(\xi) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} c_{\lambda\mu}\,\xi^\mu \tag{5, 6, 7}$$

seien durch folgende Entwicklungen definiert:

$$\frac{e^{\xi g(\zeta)}}{1+\zeta} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \varphi_\lambda(\xi)\,\zeta^\lambda, \quad \text{wo } g(\zeta) = \frac{\zeta}{1+\zeta} - \frac{z_0}{n}\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z_0}{n}\zeta\right)^{\nu-2}; \tag{8,8'}$$

$$\frac{[h_1(\vartheta)]^p}{1-\vartheta}\,e^{\xi h_2(\vartheta)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \chi_{\lambda p}(\xi)\,\vartheta^\lambda, \text{ wo } h_1(\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,(2\vartheta)^{\nu-1} \tag{9,9'}$$

$$\text{und } h_2(\vartheta) = \frac{\vartheta}{1-\vartheta} - 4\sum_{\nu=4}^{\infty}\frac{1}{\nu}\,(2\vartheta)^{\nu-3}; \tag{9''}$$

$$exp\,\left[\xi\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\zeta^{\nu-1}\right] = \sum_{\lambda=0}^{\infty}\psi_\lambda(\xi)\,\zeta^\lambda. \tag{10}$$

Die folgenden 5 Fälle sind zu unterscheiden:

I. $0 < x < 4n$; $nx \to \infty$, $n \to \infty$.

Definiert man den Winkel α durch

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{n}} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right),$$

so ergibt sich

$$\frac{L_n(x)}{n!} = \frac{(-1)^n e^{2n\cos^2\alpha}}{\pi\sqrt{n \sin 2\alpha}} \left[\sum_{\lambda=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} r_{\lambda\mu} \frac{1+(-1)^\lambda}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}+\mu\right)}{(\sin\alpha)^{\frac{\lambda}{2}+\mu}(2n\cos\alpha)^{\frac{\lambda}{2}}}\right.$$

$$\times \cos\left\{n(2\alpha - \sin 2\alpha) - (\lambda+1)\frac{\pi}{4} + \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)(\lambda+\mu) + a_{\lambda\mu}\right\}$$

$$\left. + O\left\{(\sin\alpha\sqrt{n\sin 2\alpha})^{-k}\right\}\right], \tag{11}$$

wo $r_{\lambda\mu}$ und $a_{\lambda\mu}$ durch $a_{\lambda\mu} = r_{\lambda\mu} e^{i\alpha_{\lambda\mu}}$ bestimmt sind. Die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ sind von $\frac{z_0}{n} = -2\cos\alpha\, e^{-i\alpha}$ abhängig.

Ihre ersten Werte sind:

$a_{00} = 1$;

$$a_{20} = 1,\ a_{21} = \left(-2 + \frac{4}{3}\cos^2\alpha\cos 2\alpha + 2\cos^3\alpha\cos 3\alpha\right)$$

$$- i\left(\frac{4}{3}\cos^2\alpha\sin 2\alpha + 2\cos^3\alpha\sin 3\alpha\right),$$

$$a_{22} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\cos^2\alpha\cos 2\alpha + \frac{8}{9}\cos^4\alpha\cos 4\alpha\right)$$

$$+ i\left(\frac{4}{3}\cos^2\alpha\sin 2\alpha - \frac{8}{9}\cos^4\alpha\sin 4\alpha\right).$$

Die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ mit ungeradem λ braucht man nicht zu berechnen, da die entsprechenden Glieder in (11) verschwinden[2]).

II. $x > 4n$. Definiert man β durch

$$ch\,\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{n}} \quad (0 < \beta < \infty),$$

[2]) Für $k = 3$ hat *W. Rotach*, eine asymptotische Formel für $L_n(x)$ angegeben: Reihenentwicklungen einer willkürlichen Funktion nach Hermiteschen und Laguerreschen Polynomen. Diss. E. T. H., Zürich 1925, S. 26.

so ergibt sich

$$\frac{L_n(x)}{n!}=\frac{(-1)^n\,(ch\,2\beta+sh\,2\beta)^n\,e^{2n\,ch\,\beta\,(ch\,\beta-sh\,\beta)}}{2\pi\sqrt{n\,sh\,2\beta}\,(ch\beta-sh\beta)}\left[\sum_{\lambda=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\lambda}a_{\lambda\mu}\frac{1+(-1)^\lambda}{2}\right.$$

$$\left.\times\frac{(-1)^{\frac{\lambda}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}+\mu\right)}{(sh\,\beta)^{\frac{\lambda}{2}+\mu}\,(2\,n\,ch\,\beta)^{\frac{\lambda}{2}}\,(ch\beta-sh\beta)^{\lambda+\mu}}+O\{n^{-\frac{k}{2}}(th\beta)^{-\frac{3k}{2}}\}\right]. \qquad (12)$$

Die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ sind von $\frac{z_0}{n}=-\frac{|z_0|}{n}=-2\,ch\,\beta\,(ch\,\beta-sh\,\beta)$ abhängig. Ihre ersten Werte sind:

$a_{00}=1;$

$$a_{20}=1,\ a_{21}=-2+\frac{4}{3}\,ch^2\,\beta\,(ch\,\beta-sh\,\beta)^2+2\,ch^3\,\beta\,(ch\,\beta-sh\,\beta)^3,$$

$$a_{22}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{4}{3}\,ch^2\,\beta\,(ch\,\beta-sh\,\beta)^2\right]^2.$$

III. $x<0;\ n\,|\,x\,|\to\infty,\ n\to\infty.$

Die Einführung der Hilfsgröße γ durch

$$sh^2\,(2\,\gamma)=-\frac{4n}{x}\quad(0<\gamma<\infty)$$

ergibt:

$$\frac{L_n(x)}{n!}=\frac{e^{\frac{n}{ch^2\gamma}}\,(cth\gamma)^{2n}\,ch^2\gamma}{\pi\sqrt{2\,n\,ch\,2\,\gamma}}\left[\sum_{\lambda=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\lambda}a_{\lambda\mu}\,\frac{1+(-1)^\lambda}{2}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}+\mu\right)\right.$$

$$\left.\times\frac{(-1)^{\frac{\lambda}{2}}\,2^{\frac{\lambda}{2}+\mu}\,(ch\,\gamma)^{2(\lambda+\mu)}}{n^{\frac{\lambda}{2}}(ch\,2\,\gamma)^{\frac{\lambda}{2}+\mu}}+O\{n^{-\frac{k}{2}}(ch\,\gamma)^k\}\right]. \qquad (13)$$

Die ersten Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ sind:

$$\left(\frac{z_0}{n}=-\frac{|z_0|}{n}=-\frac{1}{ch^2\gamma}\right)$$

$a_{00}=1;$

$$a_{20}=1,\ a_{21}=-2+\frac{1}{ch^4\gamma}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4\,ch^2\gamma}\right),\ a_{22}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3\,ch^4\gamma}\right)^2.$$

IV. $x \sim 4n$. Führen wir die Hilfsgröße

$$t = 2\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(n - \frac{x}{4}\right)$$

ein. Es lassen sich 2 positive Konstanten d_1 und d_2 finden, so daß für $|t| < d_1 x^{\frac{2}{3}}$ gilt:

$$\frac{L_n(x)}{n!} = \frac{(-1)^n e^{\frac{x}{2}}}{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A_p(x)}{p!}t^p + O\left(x^{\frac{1}{3}} e^{-d_2 x}\right)\right] \tag{14}$$

$$A_p(x) = (-1)^p 3^{\frac{p-2}{3}} \sum_{\lambda=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{3^{\frac{\lambda}{3}+\mu}\,\Gamma\left(\frac{p+\lambda+1}{3}+\mu\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{\lambda}{3}}} \tag{14'}$$

$$\times\, b_{\lambda\mu}^{(p)} \sin\left(\frac{2(p+\lambda+1)}{3}\pi\right) + O\left(x^{-\frac{k}{3}}\right).$$

Die ersten Koeffizienten $b_{\lambda\mu}^{(p)}$ sind:

$b_{00}^{(p)} = 1;$

$b_{10}^{(p)} = p + 1,\ b_{11}^{(p)} = -1;$

$b_{20}^{(p)} = \frac{3p^2 + 11p}{6} + 1,\ b_{21}^{(p)} = -\left(p + \frac{16}{5}\right),\ b_{22}^{(p)} = \frac{1}{2}.$

Die in (14) auftretende Reihe ist eine ganze Funktion von t. Vernachlässigt man in (14) die Glieder von einem gewissen p an, so läßt sich der Fehler abschätzen[3]).

V. $n\,|x|$ **beschränkt,** $n \to \infty$.

Bezeichnet man die Besselsche Funktion ν. Ordnung mit J_ν, so ergibt sich

$$\frac{L_n(x)}{n!} = \sum_{\lambda=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\lambda}(-1)^\mu c_{\lambda\mu}\, n^{-\frac{\lambda-\mu}{2}} x^{\frac{\lambda+\mu}{2}} J_{\lambda+\mu}(2\sqrt{nx}) + O(n^{-k}). \tag{15}$$

[3]) Vergleiche *M. Plancherel* und *W. Rotach* a. a. O. § 16.

Für $k = 1, 2, 3$ erhalten wir insbesondere:

$$\frac{L_n(x)}{n!} = J_0(2\sqrt{nx}) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= J_0(2\sqrt{nx}) - \frac{x}{2} J_2(2\sqrt{nx}) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= J_0(2\sqrt{nx}) - \frac{x}{2} J_2(2\sqrt{nx}) - \frac{1}{3} n^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} J_3(2\sqrt{nx})$$

$$+ \frac{x^2}{8} J_4(2\sqrt{nx}) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Ist n beschränkt und $|x| \to \infty$, so gilt nach (1)

$$L_n(x) = (-1)^n x^n \left[1 - \binom{n}{1}^2 \frac{1}{x} + 2!\binom{n}{2}^2 \frac{1}{x^2} + \dots\right.$$

$$\left. + (-1)^{k-1}(k-1)! \binom{n}{k-1}^2 \frac{1}{x^{k-1}} + O\left(\frac{1}{x^k}\right)\right] \quad (k \leqq n). \quad (16)$$

Die Anwendung der Formeln (11) — (15) setzt voraus, daß n groß ist. In Formel (11) zeigt dies der Ausdruck

$$\sin a\sqrt{n \sin 2a} = (nx)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(1 - \frac{x}{4n}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{n}}\, t^{\frac{3}{4}}.$$

Ist n groß, nicht aber $\sin a\sqrt{n \sin 2a}$, so ist entweder nx beschränkt oder $\frac{x}{4n}$ liegt in der Nähe von 1. Im ersten Fall ist die Formel (15), im zweiten Fall die Formel (14) zu verwenden.

Die Formel (12) ist zu benutzen, wenn der Ausdruck

$$n^{\frac{1}{2}} (th\,\beta)^{\frac{3}{2}} = n^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{4n}{x}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{2n}{x}}\,|t|^{\frac{3}{4}}$$

groß ist. Ist n groß (und damit auch x), nicht aber $n^{\frac{1}{2}}(th\,\beta)^{\frac{3}{2}}$, so liegt $\frac{4n}{x}$ in der Nähe von 1, und man gebraucht die Formel (14).

Die Formel (13) ist brauchbar, wenn der Ausdruck

$$\frac{n}{ch^2\gamma} = \frac{2}{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{4}{nx}}}$$

groß ist. Ist n groß, nicht aber $\frac{n}{ch^2\gamma}$, so ist $n\,|\,x\,|$ beschränkt, und man verwendet die Formel (15).

I. Kapitel.

Der Fall $0 < x < 4n$; $nx \to \infty$, $n \to \infty$.

§ 3. Wir wählen den Integrationsweg symmetrisch zur reellen Axe der z-Ebene durch die beiden Punkte z_0 und z_1. In der oberen Halbebene setzt er sich aus 3 Kreisbogenstücken C_0, C_2 und C_3 zusammen (Fig. 1), deren genaue Festlegung später erfolgen wird. Da die Beiträge der symmetrischen Kurventeile in der oberen und unteren Halbebene vom Integral (2) konjugiert ausfallen, kann man sich auf den ersten Teil beschränken. Der Beitrag der Umgebung von z_0 soll zunächst bestimmt werden.

§ 4. Umgebung des Passes z_0.

Die Substitution $\frac{1}{z} = \frac{1+\zeta}{z_0}$ ergibt

$$\frac{F(z)}{F(z_0)} = exp\left[\frac{z_0\zeta}{1+\zeta} + n\,lg\left(1 - \frac{z_0}{n}\zeta\right)\right].$$

Für $|\,\zeta\,| < \frac{n}{|z_0|}$ und, da

$$|\,z_0\,| = \sqrt{nx},\quad \frac{n}{|z_0|} = \sqrt{\frac{n}{x}} > \frac{1}{2},$$

a fortiori für $|\,\zeta\,| \leqq \frac{1}{2}$ erhält man die Entwicklung

$$\frac{F(z)}{F(z_0)} = exp\left[-a z_0\,\zeta^2 + \frac{z_0\,\zeta^3}{1+\zeta} - \frac{z_0^2\,\zeta^2}{n}\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z_0}{n}\zeta\right)^{\nu-2}\right],$$

wo $a = 1 + \frac{z_0}{2n} = \left(1 - \frac{x}{4n}\right) + i\sqrt{\frac{x}{4n}\left(1 - \frac{x}{4n}\right)}$, $|a| = \sqrt{1 - \frac{x}{4n}}$, $|a| < 1$.

Man findet jetzt

$$F(z) \cdot \frac{dz}{z} = -F(z_0)\, e^{-a z_0 \zeta^2} \cdot \frac{e^{\xi g(\zeta)}}{1+\zeta}\, d\zeta, \tag{17}$$

wo $\xi = z_0 \zeta^2$ und $g(\zeta)$ durch (8′) gegeben ist.

Setzt man $\zeta = \frac{u}{\sqrt{a z_0}}$, so ist u reell für die Richtung des größten Gefälles im Paß z_0, dem der Punkt $u = 0$ entspricht. In der u-Ebene erstrecken wir das Integral von

$$u_2 \text{ bis } u_3, \text{ wo } -u_2 = u_3 = \Theta \cdot \frac{|\sqrt{a z_0}|}{2}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Den diesem Wegstück entsprechenden Kreisbogen der z-Ebene bezeichnen wir mit C_0, seine Endpunkte mit z_2 und z_3. Führen wir in (17) die Entwicklung (8) ein, so resultiert für den Beitrag von C_0:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} F(z)\frac{dz}{z} = -\frac{F(z_0)}{2\pi i\sqrt{a z_0}}\left[\sum_{\lambda=0}^{k-1}\int_{u_2}^{u_3} e^{-u^2}\varphi_\lambda\left(\frac{u^2}{a}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{a z_0}}\right)^\lambda du + R'_k\right],$$

wenn zur Abkürzung

$$R'_k = \int_{u_2}^{u_3} e^{-u^2}\sum_{\lambda=k}^{\infty}\varphi_\lambda\left(\frac{u^2}{a}\right)\left(\frac{u}{\sqrt{a z_0}}\right)^\lambda du \tag{18}$$

gesetzt ist. Erstreckt man in der endlichen Summe die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$, so begeht man einen Fehler R''_k und man erhält:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} F(z)\frac{dz}{z} = -\frac{F(z_0)}{2\pi i\sqrt{a z_0}}\left[\sum_{\lambda=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\lambda} a_{\lambda\mu}\, a^{-\left(\frac{\lambda}{2}+\mu\right)} z_0^{-\frac{\lambda}{2}}\,\frac{1+(-1)^\lambda}{2}\right.$$

$$\left.\times\ \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}+\mu\right) + R'_k + R''_k\right]. \tag{19}$$

Die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ sind durch (5) und (8) bestimmt.

§ 5. Abschätzung von R_k' und R_k''.

Die Funktion $g(\zeta)$ (8′) besitzt auf Grund von $\frac{|z_0|}{n} < 2$ die Majorante

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \zeta^\nu + 2 \sum_{\nu=3}^{\infty} \frac{1}{\nu} (2\zeta)^{\nu-2}$, also a fortiori die Majorante

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\zeta)^\nu}{\nu} + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\zeta)^\nu}{\nu} = -3\, lg\,(1-2\zeta), \quad \left(|\zeta| < \frac{1}{2}\right).$$

Die Funktion (8) läßt daher die Majorante

$$(1-2\zeta)^{-(1+3|\xi|)} = 1 + \left(1 + \frac{3|\xi|}{1}\right)(2\zeta) + \left(1 + \frac{3|\xi|}{1}\right)\left(1 + \frac{3|\xi|}{2}\right)(2\zeta)^2 + \ldots$$

zu. Daraus erhält man die Ungleichung

$$\left|\sum_{\lambda=k}^{\infty} \varphi_\lambda(\xi)\, \zeta^\lambda\right| \leqq 2^k (1+3|\xi|)^k (1-2|\zeta|)^{-(1+3|\xi|)} |\zeta|^k.$$

Beachtet man, daß im Integrationsintervall $u_2 \leqq u \leqq u_3$ $1 - 2\left|\frac{u}{\sqrt{a z_0}}\right| \geqq 1 - \Theta$, so erhält man für R_k' die Abschätzung

$$|R_k'| \leqq \left(\frac{2}{|\sqrt{a z_0}|}\right)^k \cdot \frac{1}{1-\Theta} \int_{u_2}^{u_3} \left[e(1-\Theta)^{\frac{3}{a}}\right]^{-u^2} \left(1 + 3\left|\frac{u^2}{a}\right|\right)^k |u|^k\, du.$$

Hieraus findet man, falls Θ hinreichend klein gewählt wird,

$$R_k' = O(|a\sqrt{a z_0}|^{-k}). \tag{20}$$

Das in (19) stehende Fehlerglied R_k'' kann unter der Voraussetzung $|a\sqrt{a z_0}| \to \infty$ gegenüber R_k' vernachlässigt werden[4]).

---

[4]) Vergleiche *M. Plancherel* und *W. Rotach* a. a. O., S. 238.

§ 6. Beitrag des übrigen Integrationsweges.

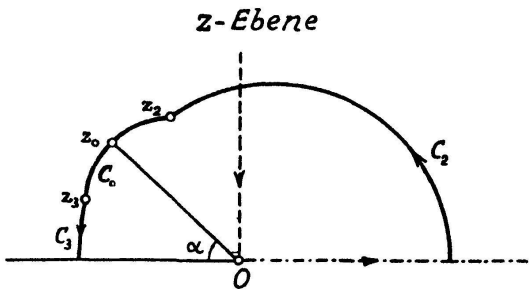

Fig. 1

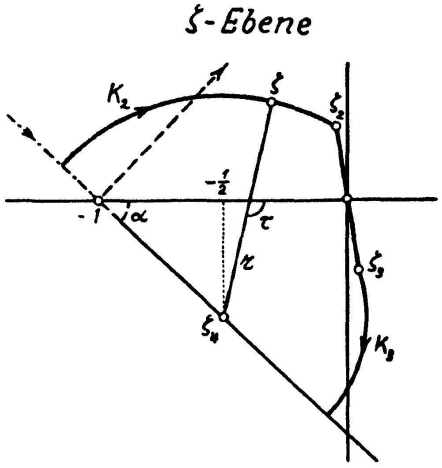

Fig. 2

Die den Punkten u_2 und u_3 der u-Ebene (§ 4) entsprechenden Punkte der ζ-Ebene seien ζ_2 und ζ_3 (Fig. 2). Durch ζ_2 legen wir einen Kreisbogen K_2, dessen Zentrum ζ_4 die Abszisse $-\frac{1}{2}$ hat und auf der Geraden liegt, welche der reellen Axe der z-Ebene entspricht. Das Bild von K_2 in der z-Ebene nennen wir C_2. Den Beitrag von C_2 wollen wir zunächst abschätzen.

Vorerst ist zu zeigen, daß der gewählte Kreis den Punkt -1 der ζ-Ebene einschließt, d. h. daß $r > s$, wenn mit r der Radius von K_2 und mit s die Strecke $(-1, \zeta_4)$ bezeichnet wird.

Zur Bestimmung von r gehen wir aus von $u = \zeta \sqrt{a z_0}$, woraus $arg\, u_2 = arg\, \zeta_2 + \frac{1}{2}(arg\, a + arg\, z_0)$. Führen wir den Winkel α ein durch $arg\, z_0 = \pi - \alpha$ (α ist also mit dem in § 2 I eingeführten Winkel identisch), so wird

$$tg\, \alpha = \sqrt{\frac{4n}{x} - 1} = ctg\,(arg\, \alpha), \quad arg\, \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha, \text{ folglich}$$

$$\pi = arg\, \zeta_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2} - 2\,\alpha\right), \text{ oder } arg\, \zeta_2 = \frac{\pi}{4} + \alpha.$$

Somit ist $r^2 = s^2 + s\,|\,\zeta_2\,|\,\sqrt{2} + |\,\zeta_2\,|^2$ und daher $r > s$.

Für s erhält man

$$s = \frac{1}{2\cos\alpha} = \sqrt{\frac{n}{x}} = \frac{n}{|\,z_0\,|}.$$

Abgesehen vom Faktor $\frac{1}{2\pi i}$ ergibt sich für den Beitrag von C_2:

$$\int_{C_2} F(z)\frac{dz}{z} = -\int_{K_2} exp\left[-\frac{z_0}{1+\zeta}\right]\left(1+\frac{x(1+\zeta)}{z_0}\right)^n \frac{d\zeta}{1+\zeta} = -\int_{K_2} H(\zeta)\frac{d\zeta}{1+\zeta}.$$

Das Integral über K_2 schreiben wir in der Form:

$$\int_{K_2} H(\zeta)\frac{d\zeta}{1+\zeta} = H(o)\frac{H(\zeta_2)}{H(o)}\int_{K_2}\frac{H(\zeta)}{H(\zeta_2)}\frac{d\zeta}{1+\zeta}, \text{ wobei}$$

$$\int_{K_2}\frac{H(\zeta)}{H(\zeta_2)}\frac{d\zeta}{1+\zeta} = \int_{K_2} exp\left[|z_0|\,e^{-i\alpha}\left(\frac{1}{1+\zeta}-\frac{1}{1+\zeta_2}\right)\right]\left(\frac{\frac{n}{|z_0|}e^{i\alpha}+\zeta}{\frac{n}{|z_0|}e^{i\alpha}+\zeta_2}\right)^n\frac{d\zeta}{1+\zeta}.$$

Auf K_2 setzen wir nun $\zeta = -1 + se^{-i\alpha} - re^{-i\tau} = -se^{i\alpha} - re^{-i\tau}$, wo die Bedeutung von τ aus Fig. 2 ersichtlich ist.

Entspricht dem Punkt ζ_2 der Winkel $\tau = \tau_0$, so folgt

$$\frac{\frac{n}{|z_0|}e^{i\alpha}+\zeta}{\frac{n}{|z_0|}e^{i\alpha}+\zeta_2} = \frac{se^{i\alpha}+\zeta}{se^{i\alpha}+\zeta_2} = e^{i(\tau_0-\tau)}.$$

Führen wir noch die folgenden abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$\Phi_1(\tau) = \Re\left[e^{-i\alpha}\left(\frac{1}{1+\zeta}-\frac{1}{1+\zeta_2}\right)\right],\quad \Phi_2(\tau) = \frac{1}{|1+\zeta|},$$

so erhält man

$$\left|\int_{K_2}\frac{H(\zeta)}{H(\zeta_2)}\frac{d\zeta}{1+\zeta}\right| \leqq r\int_{\alpha}^{\tau_0} exp\left[\,|z_0|\,\Phi_1(\tau)\,\right]\Phi_2(\tau)\,d\tau = r\int_{\alpha}^{\tau_0} f(\tau)\,d\tau.$$

Die Funktion $f(\tau)$ ist eine mit τ wachsende Funktion und nimmt den maximalen Wert für die obere Integrationsgrenze $\tau = \tau_0$ an. Die Rechnung liefert nämlich

$$\Phi_1(\tau) = \frac{s - r\cos(\tau-\alpha)}{s^2+r^2-2rs\cos(\tau-\alpha)} - \Re\left(e^{-i\alpha}\frac{1}{1+\zeta_2}\right) \text{ und}$$

$$f'(\tau) = \Phi_2^3 e^{|z_0|\Phi_1} r \cdot s \cdot \sin(\tau - a) \left[\frac{|z_0|(r^2 - s^2)}{s} \Phi_2^2 - 1 \right].$$

Nun ist $\frac{|z_0|(r^2 - s^2)}{s} > |z_0| \, |\zeta_2| \sqrt{2} \to \infty$ und folglich $f'(\tau) \geqq 0$

($= 0$ für $\tau = a$). Weiter erhält man $f(\tau_0) = \Phi_2(\tau_0) = \frac{1}{|1+\zeta_2|} < 2$ und

daher

$$\left| \int_{K_2} \frac{H(\zeta)}{H(\zeta_2)} \frac{d\zeta}{1+\zeta} \right| < 2r(\tau_0 - a) < 2r(\pi - 2a) = 4r\left(\frac{\pi}{2} - a\right).$$

Diese Abschätzung genügt noch, wenn r sehr groß ist, d. h. wenn

$$\frac{n}{|z_0|} = \sqrt{\frac{n}{x}} \text{ sehr groß ist; denn}$$

$$4r\left(\frac{\pi}{2} - a\right) < \frac{4r}{tg\, a} \sim 2, \text{ weil } r \sim \sqrt{\frac{n}{x}} \text{ und } tg\, a = \sqrt{\frac{4n}{x} - 1} \sim 2\sqrt{\frac{n}{x}}.$$

Da

$$H(0) = F(z_0) \text{ und } \left| \frac{H(\zeta_2)}{H(o)} \right| < e^{-\delta |a z_0|},$$

so ergibt sich schließlich

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} F(z) \frac{dz}{z} \right| < M_1 \, |F(z_0)| \, e^{-\delta |a z_0|}, \tag{21}$$

wo δ und M_1 zwei positive Konstanten sind.

Wählt man durch den Punkt ζ_3 den Kreisbogen K_3 mit demselben Mittelpunkt ζ_4 wie für K_2, so findet man für den Beitrag über den entsprechenden Weg C_3 der z-Ebene eine analoge Abschätzung wie über C_2, vorausgesetzt daß $\sqrt{\frac{n}{x}}$ beschränkt ist. Ist dies nicht der Fall, so ersetzen wir K_3 durch den Kreisbogen K_3^*, dessen Zentrum ζ_4^* auf der Mittelsenkrechten zur Verbindungsstrecke der beiden Punkte -1 und ζ_3 liegt. (Fig. 3). Sein Bild in der z-Ebene nennen wir C_3^*.

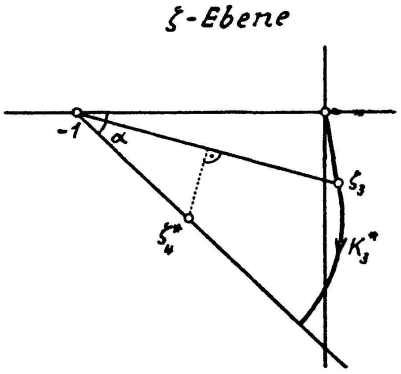

Fig. 3

Das Integral über K_3^* schreiben wir in der gleichen Form wie dasjenige über K_2 und setzen
$\zeta = -1 + r^* (e^{-i\alpha} - e^{-i\tau})$, wo mit r^* der Radius von K_3^* bezeichnet ist. Dann gilt auf K_3^*

$$\Re\left[e^{i\alpha}\left(\frac{1}{1+\zeta}-\frac{1}{1+\zeta_3}\right)\right]=0$$

$$\left|\frac{\frac{n}{|z_0|}e^{i\alpha}+\zeta}{\frac{n}{|z_0|}e^{i\alpha}+\zeta_3}\right|^n$$ nimmt mit wachsendem τ vom Wert 1 an ab.

Somit wird für eine geeignete positive Konstante M_2

$$\left|\int\limits_{K_3^*}\frac{H(\zeta)}{H(\zeta_3)}\,\frac{d\zeta}{1+\zeta}\right| < M_2 r^*.$$

Falls $\sqrt{\frac{n}{x}} \to \infty$ bleibt r^* kleiner als $\frac{m}{|\zeta_3|} = \frac{1}{\delta'}$ (m und δ' sind positive Konstanten), und es ergibt sich für den Beitrag von C_3^*

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_3^*}F(z)\frac{dz}{z}\right| < M_2\,|F(z_0)|\,\frac{1}{\delta'}\,e^{-\delta|az_0|}\,. \tag{22}$$

§ 7. Zusammenfassung

Die Abschätzungen (20), (21) und (22) zeigen, daß unter der Voraussetzung $|a\sqrt{az_0}| \to \infty$ die Umgebung des Passes z_0 den wesentlichen in (19) enthaltenen Beitrag liefert.

Die Einführung des wiederholt gebrauchten Winkels α ergibt die Ausdrücke

$$z_0 = -2n\cos\alpha\, e^{-i\alpha}, \quad \left(1+\frac{x}{z_0}\right)^n = (-1)^n e^{2in\alpha},$$

$$a = \sin\alpha\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}, \quad \sqrt{a z_0} = \sqrt{n\sin 2\alpha}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

Fügt man zu (19) den vom Paß z_1 herrührenden konjugierten Beitrag, so erhält man schließlich die Formel (11) der Einleitung.

II. Kapitel.

Der Fall $x > 4n$.

§ 8. Wir wählen den Integrationsweg symmetrisch zur reellen Axe der z-Ebene durch den einen Paß

$$z_0 = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - nx}.$$

Er setzt sich aus 2 Kreisbogenstücken C_0 und C zusammen (Fig. 4), die wir später genauer festlegen werden. Mit einigen Abweichungen sind die Ausführungen des vorhergehenden Kapitels übertragbar.

§ 9. Umgebung des Passes.

Beachtet man die Beziehungen

$$|z_0| = -z_0 = \frac{2n}{1+\sqrt{1-\frac{4n}{x}}}, \quad n < |z_0| < 2n,$$

$$0 < a = 1 + \frac{z_0}{2n} < \frac{1}{2},$$

so ergibt sich für den Beitrag der Umgebung von z_0

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} F(z)\frac{dz}{z} = \frac{F(z_0)}{2\pi\sqrt{a\,|z_0|}}\left[\sum_{\lambda=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{\lambda} i^\lambda a_{\lambda\mu}\, a^{-\left(\frac{\lambda}{2}+\mu\right)}\,|z_0|^{-\frac{\lambda}{2}}\right.$$

$$\left.\times\frac{1+(-1)^\lambda}{2}\,\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}+\mu\right) + R_k' + R_k''\right]. \quad (23)$$

Hier sind die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ wieder durch (5) und (8) bestimmt; die Bedeutung von C_0, R'_k und R''_k ist analog wie im § 4.

Da auch in diesem Fall $\frac{|z_0|}{n} < 2$, so gilt die Abschätzung von R'_k im § 5 hier unverändert; R_k'' kann unter der Voraussetzung $a\sqrt{a\,|z_0|} \to \infty$ gegenüber R'_k vernachlässigt werden.

§ 10. Beitrag des übrigen Integrationsweges

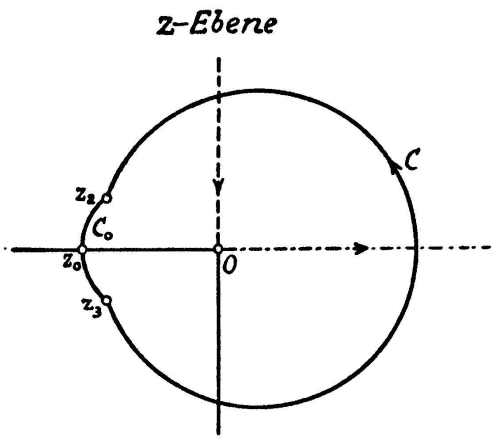

Fig. 4

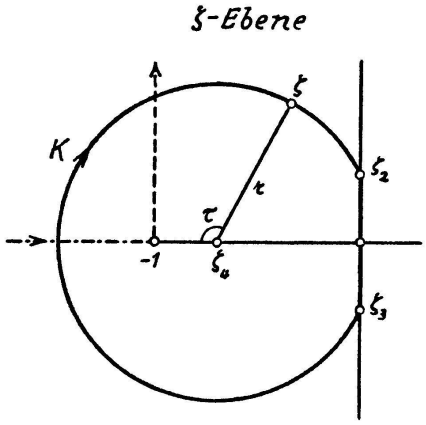

Fig. 5

Durch die Endpunkte ζ_2 und ζ_3 des geradlinigen Wegstückes der ζ-Ebene legen wir einen Kreisbogen K mit dem Zentrum $\zeta_4 = -\frac{n}{|z_0|} = -s$.

Der entsprechende Kreisbogen der z-Ebene sei C. Ist r der Radius von K, so wird

$r + s = \sqrt{s^2 + |\zeta_2|^2} + s > 2s > 1$, weil $s > \frac{1}{2}$, d. h. K umschließt den Punkt -1 der ζ-Ebene, C den Nullpunkt der z-Ebene.

Die Abschätzung des Beitrages über C ist derjenigen über C_2 im Fall $x < 4n$ ganz analog; auf K ist dabei zu setzen $\zeta = -s - re^{-i\tau}$, wo die Bedeutung von τ aus Fig. 5 zu ersehen ist. Da $s = \frac{n}{|z_0|} < 1$, so ist der Radius r von K beschränkt. Es existieren also auch hier 2 positive Konstanten M und δ derart, daß

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) \frac{dz}{z} \right| < M\,|F(z_0)|\, e^{-\delta\,|a z_0|}. \tag{24}$$

§ 11. Die Einführung der Hilfsgröße β durch

$$ch\,\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{n}}, \quad (0 < \beta < \infty)$$

ergibt die Ausdrücke

$$z_0 = -2\,n\,ch\,\beta\,(ch\,\beta - sh\,\beta), \quad 1 + \frac{x}{z_0} = -(ch\,2\,\beta + sh\,2\,\beta),$$
$$a = sh\,\beta\,(ch\,\beta - sh\,\beta).$$

Setzt man sie in (23) ein, so resultiert die Formel (12) der Einleitung.

III. Kapitel.

Der Fall $x < 0$; $n\,|x| \to \infty$, $n \to \infty$.

§ 12. Wie im II. Kapitel verlaufe der Integrationsweg nur durch den einen Paß

$$z_0 = -\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} - nx}.$$

Die Gestalt des Weges ist aus Fig. 4 ersichtlich.

Die Beziehungen

$$|z_0| = -z_0 = \frac{2\,n}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\,n}{x}}} < n, \quad \frac{1}{2} < a = 1 + \frac{z_0}{2\,n} < 1$$

zeigen, daß man für die Umgebung des Passes z_0 den gleichen Ausdruck erhält wie im Fall $x > 4\,n$ (§ 9).

§ 13. Abschätzung von R'_k.

Auf Grund von $\frac{|z_0|}{n} < 1$ folgt $-2\,lg\,(1 - 2\,\zeta)$ als Majorante von $g\,(\zeta)$ $\left(|\zeta| < \frac{1}{2}\right)$, und $(1 - 2\,\zeta)^{-(1+2\,|\xi|)}$ als solche der Funktion (8). Die weitere Abschätzung verläuft analog wie früher und man findet

$$R'_k = O\,(|z_0|^{-\frac{k}{2}}). \tag{25}$$

§ 14. Beitrag des übrigen Integrationsweges

Durch die Punkte ζ_2 und ζ_3 der Fig. 5 legen wir einen Kreisbogen mit dem Zentrum $\zeta_4 = -1$. Das Stück in der oberen Halbebene sei K^* und sein Bild in der z-Ebene C^*. Dann setzen wir wieder

$$\int_{C^*} F(z)\frac{dz}{z} = -H(o)\frac{H(\zeta_2)}{H(o)} \cdot \int_{K^*} exp\left[|z_0|\left(\frac{1}{1+\zeta} - \frac{1}{1+\zeta_2}\right)\right]\left(\frac{\frac{n}{|z_0|}+\zeta}{\frac{n}{|z_0|}+\zeta_2}\right)^n \frac{d\zeta}{1+\zeta}.$$

Auf K^* ist $\zeta = -1 - re^{-i\tau}$, $\zeta_2 = -1 - re^{-i\tau_0}$ und folglich

$$\Re\left[|z_0|\left(\frac{1}{1+\zeta} - \frac{1}{1+\zeta_2}\right)\right] = -\frac{|z_0|}{r}(\cos\tau - \cos\tau_0) \leqq 0\,;$$

$$\left|\frac{\frac{n}{|z_0|}+\zeta}{\frac{n}{|z_0|}+\zeta_2}\right|^2 = 1 - \frac{2r\left(\frac{n}{|z_0|}-1\right)(\cos\tau - \cos\tau_0)}{\left|\frac{n}{|z_0|}+\zeta_2\right|^2} \leqq 1, \text{ weil } \frac{n}{|z_0|} > 1\,;$$

$$|1+\zeta| = r.$$

Somit wird

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} F(z)\frac{dz}{z}\right| < \frac{1}{2}\,|F(z_0)|\,e^{-\delta^*|z_0|}, \tag{26}$$

wo δ^* eine positive Konstante ist.

Für den in der unteren Halbebene gelegenen Kurventeil gilt dieselbe Abschätzung.

§ 15. Die Einführung der Hilfsgröße γ durch

$$sh^2(2\gamma) = -\frac{4n}{x} \quad (0 < \gamma < \infty)$$

liefert die Ausdrücke

$$z_0 = -\frac{n}{ch^2\gamma}, \quad 1 + \frac{x}{z_0} = cth^2\gamma, \quad a = \frac{ch\,2\gamma}{2ch^2\gamma}.$$

In Verbindung mit (23) ergeben sie die Formel (13) der Einleitung.

IV. Kapitel.

Der Fall $x \sim 4n$.

§ 16. Für $x = 4n$ gehen vom Punkt $-\frac{x}{2}$ 3 Sektoren mit den Zentriwinkeln $\frac{\pi}{3}$ aus, in welchen $|F(z)| < \left|F\left(-\frac{x}{2}\right)\right|$. Ihre Winkelhalbierenden haben die Richtungswinkel $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$ und π. In der Umgebung des Passes setze sich der Integrationsweg aus 2 zur reellen Axe symmetrischen Kreisbogenstücken C' und C'' zusammen, deren Tangenten im Paß die Argumente $\frac{\pi}{3}$ und $-\frac{\pi}{3}$ besitzen. Die Endpunkte von C' und C'' werden durch einen Kreisbogen miteinander verbunden. Die genauere Festlegung folgt später.

Ist $x \sim 4n$, so sind die Pässe z_0 und z_1 benachbart, und wir wählen in der Umgebung dieser Punkte durch den Punkt $-\frac{x}{2}$ denselben aus C' und C'' bestehenden Integrationsweg, der also nicht durch die Pässe von $|F(z)|$ geht.

§ 17. Umgebung der Pässe

Die Substitutionen $z = -\frac{x}{2(1+\zeta)}$, $\zeta = -\omega\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$

ergeben, wenn zur Abkürzung

$$\varrho = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ und } t = -\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{4n}{x}\right) = 2n\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{x}{4n}\right)$$

gesetzt wird:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'\,C''} F(z)\,\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{F\left(-\frac{x}{2}\right)}{\varrho}\int\limits_{\Lambda'\,\Lambda''} exp\left[\frac{\omega\varrho^2}{1-\frac{\omega}{\varrho}} + \frac{\varrho(\varrho^2+t)}{2}\,lg\left(1-\frac{2\omega}{\varrho}\right)\right]\frac{d\omega}{1-\frac{\omega}{\varrho}} \quad (27)$$

Λ' und Λ'' bedeuten 2 vom Nullpunkt der ω-Ebene ausgehende Strecken

mit den Argumenten $-\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{3}$. Ihre Länge sei $\Theta \cdot \frac{\varrho}{2}$, $0 < \Theta < 1$,

ihre Endpunkte seien ω' und ω''. Mit C' und C'' werden die Bilder von Λ' und Λ'' in der z-Ebene bezeichnet, ihre Endpunkte mit z' und z''.

Setzt man zur Abkürzung für das Integral der rechten Seite von (27) $2\,i\,G\,(t, \varrho)$, so wird

$$\frac{1}{2\,\pi i}\int\limits_{C'C''} F\,(z)\frac{dz}{z} = \frac{F\left(-\frac{x}{2}\right)}{\pi \cdot \varrho}\; G\,(t, \varrho). \tag{28}$$

$G\,(t, \varrho)$ ist eine ganze Funktion von t und läßt sich in eine für jeden Wert von t konvergente Reihe entwickeln

$$G\,(t, \varrho) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{p\,!}\, t^p\,, \tag{29}$$

wo

$$A_p = -\frac{i}{2}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^p \int\limits_{\Lambda'\,\Lambda''} exp\left\{\varrho^3\left[\frac{\frac{\omega}{\varrho}}{1-\frac{\omega}{\varrho}} + \frac{1}{2}lg\left(1-\frac{2\omega}{\varrho}\right)\right]\right\}\left[lg\left(1-\frac{2\omega}{\varrho}\right)\right]^p \frac{d\omega}{1-\frac{\omega}{\varrho}}. \tag{30}$$

§ 18. Asymptotische Formel für A_p.

Da längs Λ' und Λ'' $|\,\omega\,| \leqq \Theta \cdot \frac{\varrho}{2} < \frac{\varrho}{2}$, so resultiert

$$A_p = -\frac{i}{2}\,(-1)^p \int\limits_{\Lambda'\,\Lambda''} \frac{[h_1(\vartheta)]^p}{1-\vartheta} e^{\xi h_2(\vartheta)}\,\omega^p\, e^{-\frac{\omega^3}{3}}\, d\,\omega\,,$$

wo $\vartheta = \frac{\omega}{\varrho}$, $\xi = \omega^3$ und $h_1\,(\vartheta)$, $h_2\,(\vartheta)$ die Funktionen (9′) und (9″) bedeuten. Führt man die Entwicklung (9) ein, so geht A_p über in

$$A_p = -\frac{i}{2}\,(-1)^p \int\limits_{\Lambda'\,\Lambda''} \omega^p\, e^{-\frac{\omega^3}{3}} \sum_{\lambda=0}^{k-1} \chi_{\lambda\,p}\,(\omega^3)\left(\frac{\omega}{\varrho}\right)^{\lambda} d\,\omega + R'_k\,,$$

wo

$$R'_k = -\frac{i}{2}(-1)^p \int\limits_{\Lambda'\Lambda''} \omega^p\, e^{-\frac{\omega^3}{3}} \sum_{\lambda=k}^{\infty} \chi_{\lambda p}(\omega^3)\left(\frac{\omega}{\varrho}\right)^{\lambda} d\,\omega\,. \tag{31}$$

Auf Λ' setzen wir $\omega = \eta\, e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ und auf Λ'' $\omega = \eta \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Dann folgt

$$A_p = \Im\left[(-1)^p\, e^{\frac{2\pi i}{3}(p+1)} \int_0^{\Theta\cdot\frac{\varrho}{2}} \eta^p\, e^{-\frac{\eta^3}{3}} \sum_{\lambda=0}^{k-1} \chi_{\lambda p}(\eta^3) \left(\frac{\eta \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}}{\varrho}\right)^{\lambda} d\eta\right] + R_k'.$$

Ersetzt man die obere Grenze $\Theta \cdot \frac{\varrho}{2}$ des Integrals durch ∞, so begeht man einen Fehler R_k''. Schreibt man für $\chi_{\lambda p}$ die Entwicklung (6), so führt dies auf die Berechnung von Integralen der Form

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\eta^3}{3}} \eta^{p+3\mu+\lambda}\, d\eta\,, \text{ die den Wert } 3^{\frac{p-2}{3}+\frac{\lambda}{3}+\mu}\, \Gamma\left(\frac{p+\lambda+1}{3}+\mu\right)$$

haben. Schließlich ergibt sich

$$A_p = (-1)^p\, 3^{\frac{p-2}{3}} \sum_{\lambda=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{b_{\lambda\mu}^{(p)}\, 3^{\frac{\lambda}{3}+\mu}}{\varrho^\lambda}\, \Gamma\left(\frac{p+\lambda+1}{3}+\mu\right) \sin\left(\frac{2(p+\lambda+1)}{3}\pi\right)$$
$$+ R_k' + R_k''. \tag{32}$$

§ 19. Abschätzung von R_k' und R_k''.

Die Funktion (9) hat die Majorante

$$(1-2\vartheta)^{-(1+p+5|\xi|)} = 1 + \left(1 + \frac{p+5|\xi|}{1}\right)(2\vartheta)$$
$$+ \left(1 + \frac{p+5|\xi|}{1}\right)\left(1 + \frac{p+5|\xi|}{2}\right)(2\vartheta)^2 + \dots$$

Daraus ergibt sich

$$\left|\sum_{\lambda=k}^{\infty} \chi_{\lambda p}(\xi)\, \vartheta^\lambda\right| \leqq 2^k (1+p+5|\xi|)^k\, |\vartheta|^k\, (1-2|\vartheta|)^{-(1+p+5|\xi|)}.$$

Da im Integrationsintervall $0 \leqq \eta \leqq \Theta \cdot \frac{\varrho}{2}$ $\quad 1 - \frac{2\eta}{\varrho} \geqq 1 - \Theta$,

so folgt

$$|R_k'| \leqq \left(\frac{2}{\varrho}\right)^k \frac{1}{(1-\Theta)^{1+p}} \int_0^{\Theta\cdot\frac{\varrho}{2}} e^{-\frac{\eta^3}{3}} (1-\Theta)^{-5\eta^3}\, \eta^{p+k} (1+p+5\eta^3)^k\, d\eta.$$

Für hinreichend kleines Θ erhalten wir

$$R'_k = O(\varrho^{-k}) = O(x^{-\frac{k}{3}}). \tag{33}$$

R''_k kann für genügend großes ϱ gegenüber R'_k vernachlässigt werden.

§ 20. Beitrag des übrigen Integrationsweges.

Durch die den Punkten ω' und ω'' (§ 17) entsprechenden Punkte ζ' und ζ'' der ζ-Ebene legen wir einen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt $-\frac{1}{2}$. Es genügt dabei, den in der oberen Halbebene liegenden Teil K^* zu betrachten. Sein Bild in der z-Ebene nennen wir C^*.

Wir setzen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} F(z)\frac{dz}{z} = -\frac{1}{2\pi i}\,\frac{H(0)}{\varrho}\,\frac{H(\zeta')}{H(0)}\,\varrho\int_{K^*}\frac{H(\zeta)}{H(\zeta')}\,\frac{d\zeta}{1+\zeta},$$

wo $H(\zeta) = exp\left[\frac{\varrho^3}{1+\zeta} + \frac{\varrho(\varrho^2+t)}{2}\,lg(-1-2\zeta)\right]$, $\zeta' = \frac{\Theta}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Nun ist

$$\left|\frac{H(\zeta')}{H(0)}\right| = \left| exp\,\varrho^3\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{\Theta}{2}\right)^3 - \frac{\left(\frac{\Theta}{2}\right)^4 e^{\frac{i\pi}{3}}}{1+\frac{\Theta}{2}e^{\frac{i\pi}{3}}}\right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{1}{2}\left(1+\frac{t}{\varrho^2}\right)\Theta^4\sum_{\nu=4}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu}e^{\frac{i\nu\pi}{3}}\Theta^{\nu-4} + \frac{t}{\varrho^2}\,\frac{\Theta}{2}\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - \frac{\Theta}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} - \frac{\Theta^2}{3}\right)\right]\right|$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß man 2 positive Konstanten d' und d'' finden kann, so daß für $|t| < d'\varrho^2$ und genügend kleines Θ

$$\left|\frac{H(\zeta')}{H(0)}\right| < e^{-d''\varrho^3}.$$

Die Abschätzung des Integrals über K^* geschieht gleich wie in den beiden Fällen $x \gtrless 4n$. Es gibt eine positive Konstante N, so daß

$$\left|\int_{K^*}\frac{H(\zeta)}{H(\zeta')}\,\frac{d\zeta}{1+\zeta}\right| < N.$$

Für den Beitrag von C^* ergibt sich also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} F(z)\frac{dz}{z} = \frac{F\left(-\frac{x}{2}\right)}{\varrho}\cdot O\left(\varrho e^{-d''\varrho^3}\right). \tag{34}$$

V. Kapitel.

Der Fall $n\,|\,x\,|$ beschränkt, $n \to \infty$.

§ 21. Wir setzen zunächst $x > 0$ voraus. Als Integrationsweg wählen wir den Kreis C durch die Pässe z_0 und z_1, dessen Mittelpunkt mit dem Nullpunkt der z-Ebene zusammenfällt. Der Radius von C ist also gleich $\sqrt{nx}$.

§ 22. Integration über C.

Die Substitution $z = -v\sqrt{nx}$ führt auf:

$$\frac{L_n(x)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_K exp\left[v\sqrt{nx} + n\,lg\left(1 - \frac{1}{v}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)\right]\frac{dv}{v},$$

wo das Integral im positiven Sinn über den Einheitskreis K der v-Ebene zu erstrecken ist.

$lg\left(1 - \frac{1}{v}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ läßt sich in eine Reihe entwickeln; denn

$|v| = 1 > \sqrt{\frac{x}{n}}$, weil $\sqrt{\frac{x}{n}} \to 0$.

Man findet

$$\frac{L_n(x)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_K exp\left[\sqrt{nx}\left(v - \frac{1}{v}\right)\right] exp\left[\xi\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\zeta^{\nu-1}}{\nu}\right]\frac{dv}{v}, \tag{35}$$

$$\text{wo } \xi = -\frac{\sqrt{nx}}{v} \text{ und } \zeta = \frac{1}{v}\sqrt{\frac{x}{n}}.$$

Führt man in (35) die Entwicklung (10) ein, so resultiert

$$\frac{L_n(x)}{n!} = \sum_{\lambda=0}^{k-1}\frac{1}{2\pi i}\int_K exp\left[\sqrt{nx}\left(v - \frac{1}{v}\right)\right]\psi_\lambda\left(-\frac{\sqrt{nx}}{v}\right)\left(\frac{1}{v}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^\lambda\frac{dv}{v} + R_k, \tag{36}$$

wobei zur Abkürzung

$$R_k = \frac{1}{2\pi i} \int_K exp\left[\sqrt{nx}\left(v - \frac{1}{v}\right)\right] \sum_{\lambda=k}^{\infty} \psi_\lambda \left(-\frac{\sqrt{nx}}{v}\right) \left(\frac{1}{v}\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^\lambda \frac{dv}{v}$$

gesetzt ist. Ersetzt man in (36) ψ_λ durch die Entwicklung (7), so erhält man

$$\frac{L_n(x)}{n!} = \sum_{\lambda=0}^{k-1} \sum_{\mu=0}^{\lambda} (-1)^\mu c_{\lambda\mu} n^{-\frac{\lambda-\mu}{2}} x^{\frac{\lambda+u}{2}} J_{\lambda+\mu}(2\sqrt{nx}) + R_k , \qquad (37)$$

wo mit J_ν die Besselsche Funktion ν. Ordnung bezeichnet ist.

§ 23. Abschätzung von R_k.

Aus der Ungleichung

$$\left| \sum_{\lambda=k}^{\infty} \psi_\lambda(\xi)\, \zeta^\lambda \right| \leqq (1 + |\xi|)^k \, |\zeta|^k (1 - |\zeta|)^{-1-|\xi|}$$ folgt

$$|R_k| \leqq (1 + \sqrt{nx})^k \left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^k \left(1 - \sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{-1-\sqrt{nx}} ,$$

wenn man beachtet, daß auf K $|v| = 1$ und

$$\Re\left[\sqrt{nx}\left(v - \frac{1}{v}\right)\right] = 0 \text{ ist.}$$

Da nach Voraussetzung $x < \frac{B_1}{n}$ ist, wird also

$$\left(1 - \sqrt{\frac{x}{n}}\right)^{-1-\sqrt{nx}} < B_2 \text{ und}$$

$$|R_k| < B_3 n^{-k} , \qquad (38)$$

wo B_1, B_2, B_3 geeignete positive Konstanten sind.

§ 24. Ist $x < 0$, so wählt man als Integrationsweg den Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und dem Radius $\sqrt{n|x|}$ ($z_0 \sim -\sqrt{n|x|}$). Die Substitution $z = -iv\sqrt{n|x|}$ zeigt dann, daß (37) und (38) auch in diesem Fall unverändert gelten.

(Eingegangen den 22. Mai 1934.)