Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1934-1935)

Artikel: Sur les systèmes de quadruples.
Autor: Bays, S. / de Weck, E. de
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515596

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur les systèmes de quadruples

Par S. Bays et E. de Weck, Fribourg

Jusqu'ici à notre connaissance rien n'a été fait concernant *l'existence* des systèmes de quadruples analogues aux systèmes de triples de Steiner. Dans ce travail nous amorçons l'étude de ce problème difficile. Nous donnons trois méthodes de construction des systèmes de quadruples. Elles suffiraient à assurer l'existence d'un système de quadruples pour chaque N des formes nécessaires, si elles étaient établies sous leur forme générale. Malheureusement cela n'est fait que pour la première d'entre elles; elle intervient d'ailleurs dans la moitié des cas et elle est exceptionnellement simple.

Ces constructions font l'objet de la seconde partie du travail. Dans la troisième partie nous donnons les systèmes de quadruples qu'elles fournissent pour les toute premières valeurs de N, $N = 4, 8, 10$ et 14 éléments et les groupes de substitutions qui appartiennent à ces systèmes. La première partie contient les définitions et les propriétés nécessaires pour la suite.

I. Définitions et propriétés

1. Le problème des quadruples, extension du problème des triples de Steiner, est le suivant:

Pour quel nombre d'éléments N peut-on trouver un système de quadruples (combinaisons 4 à 4 de ces éléments) tel que chaque triple entre une fois et une seule fois dans un quadruple?

D'une façon générale, le problème des n-uples est le suivant:

Pour quel nombre d'éléments N peut-on trouver un système de n-uples (combinaisons n à n de ces éléments) tel que chaque $(n - 1)$-uple entre une fois et une seule fois dans un n-uple?

Nous désignerons par Δ_N^n un tel système de n-uples de N éléments.

Le nombre des $(n - 1)$-uples de N éléments est:

$$\frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \quad \cdots \quad (n-1)}$$

Chaque n-uple contient n $(n - 1)$-uples. Le nombre des n-uples d'un Δ_N^n est donc:

$$\frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \quad \cdots \quad (n-1)\,n}$$

Ainsi le nombre des couples d'un Δ_N^2 est:

$$\frac{N}{2} \tag{1}$$

Il faut en effet $\frac{N}{2}$ couples pour contenir une fois et une seule fois chacun des N éléments.

Le nombre des triples d'un Δ_N^3 est:

$$\frac{N(N-1)}{2 \cdot 3} \tag{2}$$

Le nombre des quadruples d'un Δ_N^4 est:

$$\frac{N(N-1)(N-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \tag{3}$$

Pour l'existence d'un système de couples, il *faut* donc d'après (1) que N soit pair; d'autre part il est évident que cette condition est *suffisante*.

Pour l'existence d'un système de triples, il *faut* que l'expression (2) soit un nombre entier; pour celle d'un système de quadruples, il *faut* que l'expression (3) soit ùn nombre entier. Mais ces conditions ne sont pas les seules nécessaires pour N.

2. Prenons dans un Δ_N^n tous les n-uples qui contiennent un élément fixé a. *Les $(n-1)$-uples associés à cet élément a, dans ces n-uples forment un système de $(n-1)$-uples*, un Δ_{N-1}^{n-1}.

La raison en est simple. Soit A l'ensemble de ces n-uples contenant l'élément a dans Δ_N^n. Chaque $(n-1)$-uple $abc \cdots h, b, c, \cdots, h$ parcourant toutes les combinaisons $n-2$ à $n-2$ des $N-1$ éléments autres que a, se trouve une fois et une seule fois dans A. Donc chaque $(n-2)$-uple $bc \cdots h$ se trouve une fois et une seule fois dans les $(n-1)$-uples qui restent après suppression de l'élément a, c. q. f. d.

Pour l'existence d'un système de triples Δ_N^3, puisque les couples qui y sont associés à un élément fixé a forment un système de couples Δ_{N-1}^2, il *faut* donc l'intégrité des deux quotients:

$$\frac{N(N-1)}{2 \cdot 3} \quad \text{et} \quad \frac{N-1}{2}. \tag{4}$$

Il en résulte immédiatement que les formes *nécessaires* pour N sont $6x+1$ ou $6x+3$. D'autre part on sait que ces deux formes sont également *suffisantes*.

Pour l'existence d'un système de quadruples Δ_N^4, puisque les triples qui y sont associés à un élément fixé a forment un Δ_{N-1}^3, et que les couples qui sont associés dans ce Δ_{N-1}^3 à un autre élément fixé b forment un Δ_{N-2}^2, il *faut* l'intégrité des trois quotients:

$$\frac{N(N-1)(N-2)}{2\cdot 3\cdot 4}, \quad \frac{(N-1)(N-2)}{2\cdot 3}, \quad \frac{N-2}{2}.$$

L'intégrité des deux derniers exige d'après (4) que $N-1$ soit des formes $6x+1$ ou $6x+3$, donc que N soit des formes $6x+2$ ou $6x+4$. D'autre part pour ces deux formes le premier quotient est entier.

Les formes *nécessaires* pour N pour l'existence d'un système de quadruples sont donc $6x \pm 2$. Nous verrons que pour les toute premières valeurs de N au moins, ces formes sont également *suffisantes*.

3. Nous appellerons deux systèmes Δ_N^n *équivalents* ou *distincts*, lorsqu'il existe une substitution (on dit aussi permutation) des N éléments permettant de déduire l'un des systèmes de l'autre. Nous les appellerons *différents* dans le cas contraire.

L'ensemble des substitutions des N éléments qui changent un Δ_N^n en lui-même, ou autrement dit, qui le laissent invariant, constitue un groupe. Il est dit le groupe qui *appartient* au système. Ce groupe est *transitif* s'il contient une substitution qui change un élément fixé quelconque en un autre élément fixé quelconque.

Nous désignerons par $\overline{\Delta}_{N-1}^{n-1}$ un système de $(n-1)$-uples obtenu en supprimant dans Δ_N^n un élément fixé a. Dans un Δ_N^n nous pouvons donc obtenir ainsi N systèmes $\overline{\Delta}_{N-1}^{n-1}$. Inversement nous désignerons par $\underline{\Delta}_N^n$ un système de n-uples construit sur un Δ_{N-1}^{n-1}, en ajoutant à ses $(n-1)$-uples un nouvel élément a et en complétant ensuite l'ensemble de n-uples ainsi formé par des n-uples des $n-1$ éléments primitifs jusqu'à ce que l'on obtienne un système complet de n-uples. Il n'est évidemment pas dit, que sur chaque Δ_{N-1}^{n-1}, on puisse ainsi construire un $\underline{\Delta}_N^n$, sinon l'existence des systèmes de quadruples serait assurée par celle des systèmes de triples.

Nous avons maintenant à établir les quelques propriétés suivantes qui nous seront utiles pour la suite.

4. I. *Si le groupe H qui appartient à Δ_N^n est transitif, les $\overline{\Delta}_{N-1}^{n-1}$ sont équivalents.*

Preuve. Soit A et B deux $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$ quelconques, a et b les éléments auxquels ils correspondent. Il y a une substitution de H qui change a en b, en laissant Δ^n_N invariant, donc qui change A en B.

II. *Si le groupe H qui appartient à Δ^n_N est transitif, $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$ et $\overline{\Delta}'^{n-1}_{N-1}$ sont équivalents dès que Δ^n_N et Δ'^n_N sont équivalents.*

Preuve: Il y a une substitution s qui change Δ^n_N en Δ'^n_N et donc, d'après I, $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$ en un système équivalent à $\overline{\Delta}'^{n-1}_{N-1}$.

III. *Si le groupe H qui appartient à Δ^n_N est transitif, le nombre des formes distinctes de ce système est un multiple du nombre des formes distinctes d'un $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$.*

Preuve: Soit h l'ordre de H. H étant transitif, on a $h = Nk$, où k est le nombre des substitutions de H qui laissent en place un élément fixé quelconque. D'autre part le nombre n des formes distinctes de Δ^n_N est $\frac{N!}{h}$.

Soit H_1 le groupe qui appartient à l'un des $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$, celui correspondant à l'élément quelconque fixé a. Soit h_1 l'ordre de H_1. Les substitutions de H qui laissent a en place changent $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$ en lui-même; elles forment donc un sous-groupe de H_1 d'ordre k et on a $h_1 = lk$. D'autre part le nombre n_1 des formes distinctes de $\overline{\Delta}^{n-1}_{N-1}$ est $\frac{(N-1)!}{h_1}$.

On a ainsi:

$$n = \frac{N!}{h} = \frac{N!}{Nk} = \frac{(N-1)!}{k} = \frac{l(N-1)!}{h_1} = l n_1 \quad \text{c. q. f. d.}$$

IV. *Si tous les $\underline{\Delta}^n_N$ construits sur un Δ^{n-1}_{N-1} fixé sont équivalents, les $\underline{\Delta}'^n_N$ construits sur un Δ'^{n-1}_{N-1} équivalent au premier Δ^{n-1}_{N-1}, sont aussi équivalents entre eux et équivalents aux premiers $\underline{\Delta}^n_N$.*

Preuve: Il existe une substitution qui change Δ'^{n-1}_{N-1} en Δ^{n-1}_{N-1}, qui change donc[1]) chaque $\underline{\Delta}'^n_N$ construit sur Δ'^{n-1}_{N-1} en un $\underline{\Delta}^n_N$ construit sur Δ^{n-1}_{N-1}. Si l'un de ces $\underline{\Delta}'^n_N$ était différent des autres, les premiers $\underline{\Delta}^n_N$ ne seraient pas tous équivalents.

V. *S'il n'existe pas de Δ^{n-1}_{N-1} différents, et si tous les $\underline{\Delta}^n_N$ construits sur un Δ^{n-1}_{N-1} fixé sont équivalents, il n'existe pas de Δ^n_N différents.*

Preuve: Elle résulte sans autre de la propriété précédente.

Cette dernière propriété nous servira à établir que pour $N = 8$ et $N = 10$, il n'existe qu'un seul système de quadruples.

---

[1]) en laissant en place le nouvel élément a.

II. Constructions

5. Nous avons cherché des constructions de systèmes de quadruples. Nous en avons obtenu *trois* qui seraient valables dans les cas suivants:

Construction I: d'un Δ_N^4, on obtient un Δ_{2N}^4;
Construction II: d'un Δ_N^4 et d'un Δ_{N-4}^4, on obtient un Δ_{2N-6}^4;
Construction III: d'un Δ_{N-2}^4, on obtient un Δ_{2N-6}^4.

Dans la construction I, N est naturellement des deux formes $6\,n - 2$ ou $6\,n + 2$ (§ 2, dernier alinéa); $2\,N$ sera respectivement des formes $6\,n + 2$ et $6\,n - 2$. Dans la construction II, N et $N - 4$ devant être simultanément des formes $6\,n \pm 2$, N ne peut être que de la forme $6\,n + 2$; $2\,N - 6$ est alors de la forme $6\,n - 2$. Dans la construction III, $N - 2$ doit être de la forme $6\,n + 2$ pour que $2\,N - 6$ soit de l'une des deux formes nécessaires; $2\,N - 6$ est alors de la forme $6\,n + 2$.

Si ces trois constructions étaient entièrement établies, la preuve de l'existence d'un système de quadruples serait complète pour chaque N des deux formes $6\,n \pm 2$. Pour le voir remarquons simplement que dans les deux formes nécessaires $6n \pm 2$ ou $6\,n + 2$ et $6\,n + 4$, n peut être pair ou impair.

Pour n impair, $n = 2\,n' - 1$:

$N = 6\,n + 2 = 12\,n' - 4 = 2\,(6\,n' - 2) = 2\,N'$; construction I.

$N = 6\,n + 4 = 12\,n' - 2 = 2\,(6\,n' + 2) - 6 = 2\,N'' - 6$
et $N'' - 4 = 6\,n' - 2$; construction II.

Pour n pair, $n = 2\,n'$:

$N = 6\,n + 2 = 12\,n' + 2 = 2\,(6\,n' + 4) - 6 = 2\,N' - 6$
et $N' - 2 = 6\,n' + 2$; construction III.

$N = 6\,n + 4 = 12\,n' + 4 = 2\,(6\,n' + 2) = 2\,N''$; construction I.

Malheureusement seule la construction I est établie d'une manière générale. Elle est d'ailleurs exceptionnellement simple. Elle fournit immédiatement un système de quadruples pour les cas $N = 8$ et $N = 16$. Par contre les constructions II et III, qui nous ont permis d'obtenir également un système de quadruples pour les deux autres premières valeurs de N, $N = 10$ et $N = 14$, sont loin d'être établies complètement. Elles donnent les systèmes cherchés dans ces deux cas particuliers, $N = 10$ et $N = 14$, parce que pour ces premières valeurs de N, certaines conditions se trouvent réalisées. Nous ne sommes pas en état de dire si elles le seront nécessairement dans le cas général.

6. Construction I. La démonstration comporte deux parties, **A** et **B**.

A. M. Reiss[2]) a donné une manière de répartir les $\frac{n(n-1)}{2}$ couples de n éléments, n pair, en $n-1$ systèmes de couples sans couple commun[3]). Les éléments étant $1, 2, \ldots, n$, il forme le tableau suivant:

$$
\begin{array}{lllllllll}
12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & \cdots, & 1\,n-1, & 1\,n, \\
-, & 2\,n, & 23, & 24, & 25, & 26, & \cdots, & 2\,n-2, & 2\,n-1, \\
3\,n-1, & -, & -, & 3\,n, & 34, & 35, & \cdots, & 3\,n-3, & 3\,n-2, \\
4\,n-2, & 4\,n-1, & -, & -, & -, & 4\,n, & \cdots, & 4\,n-4, & 4\,n-3, \\
\multicolumn{9}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
\multicolumn{9}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
\tag{5}
$$

On voit d'abord immédiatement comment le tableau est écrit et que tous les couples s'y trouvent. La première ligne contient les couples commençant par l'élément 1, la seconde ligne, les couples commençant par l'élément 2, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne, la $(n-1)$ème, qui contient le seul couple $n-1, n$. A chaque ligne, le premier couple, 23, 34, etc., est reculé de deux colonnes par rapport au premier couple de la ligne précédente, et le dernier couple de la ligne, $2\,n$, $3\,n$, etc., est placé chaque fois dans la colonne qui précède immédiatement. L'ordre des colonnes est cyclique, c'est-à-dire que, comme on le voit déjà dans la partie écrite du tableau, après la dernière colonne, revient la première, puis la seconde, etc.

Il est facile de voir ensuite que chacun des n éléments apparaît au moins une fois dans chaque colonne. L'élément 1 est dans chaque colonne à la première ligne; l'élément 2 est dans la première colonne à la première ligne, et dans chaque autre colonne à la deuxième ligne; l'élément 3 est en diagonale dans les deuxième, troisième et quatrième colonne et ensuite horizontalement dans chaque autre colonne; et ainsi de suite. Si nous admettons la partie en retour qui est à gauche du tableau, écrite à sa place normale à la droite du tableau, on voit que d'une façon générale, l'élément k $(k \neq n)$ est en diagonale de la première à la $k$ième ligne, dans les k colonnes de rang $k-1, k, k+1, \cdots, 2\,k-2$, et ensuite dans cette $k$ième ligne intervient horizontalement encore dans les $n-k-1$ autres

[2]) *M. Reiss*, Journal für Mathematik, t. LVI, 1859, p. 326.
Voir *E. Netto*, Lehrbuch der Kombinatorik, p. 206.

[3]) Pour simplifier l'écriture des deux tableaux (5) et (6) ci-dessous, nous écrivons dans cette construction I, n, là où d'après la notation adoptée jusqu'ici, nous devrions mettre N.

colonnes restantes. Quant à l'élément n, on voit aussi aisément qu'il apparaît une fois dans chaque colonne[4]).

Le tableau comporte $n - 1$ colonnes. Chaque élément se trouvant une fois dans chaque colonne, le nombre des éléments écrits est au moins $n\,(n-1)$. D'autre part, les $\frac{n\,(n-1)}{2}$ couples du tableau représentent $n\,(n-1)$ éléments. Il est donc impossible qu'un élément se trouve deux fois dans la même colonne. Ainsi chacune des colonnes est *un système de couples* et le tableau est une répartition des $\frac{n\,(n-1)}{2}$ couples des n éléments en $n - 1$ systèmes de couples *sans couple commun*, c. q. f. d.

B. Formons le même tableau de Reiss avec les n nouveaux éléments $1', 2', \cdots, n'$.

(6)	$1'\,2'$,	$1'\,3'$,	$1'\,4'$,	$1'\,5'$,	$1'\,6'$,	$1'\,7'$,	$\cdots$,	$1'(n-1)'$,	$1'\,n'$,
	—,	$2'\,n'$,	$2'\,3'$,	$2'\,4'$,	$2'\,5'$,	$2'\,6'$,	$\cdots$,	$2'(n-2)'$,	$2'(n-1)'$,
	$3'(n-1)'$,	—,	—,	$3'\,n'$,	$3'\,4'$,	$3'\,5'$,	$\cdots$,	$3'(n-3)'$,	$3'(n-2)'$,
	$4'(n-2)'$,	$4'(n-1)'$,	—	—	—	$4'\,n'$,	$\cdots$,	$4'(n-4)'$,	$4'(n-3)'$,

....

....

Associons les couples de chaque colonne de (5) aux couples d'une colonne de (6) de la manière suivante:

1) à chaque couple de la $i$ième colonne de (5) s'unissent chaque couple de la $k$ième colonne de (6).
2) aux couples de deux colonnes différentes de (5) s'unissent les couples de deux colonnes différentes de (6).

Nous obtenons ainsi un ensemble de $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1)$ quadruples dans lesquels chaque couple des éléments $1, 2, \cdots, n, (a)$, est lié et une seule fois

[4]) En somme le tableau de Reiss part de la disposition suivante que l'on voit mieux avec un cas concret. Nous prendrons $n = 8$.

18	12	13	14	15	16	17						
—	—	28	23	24	25	26	27					
—	—	—	—	38	34	35	36	37				
—	—	—	—	—	—	48	45	46	47			
								58	56	57		
										68	67	
												78

On complète alors les cases vides à gauche du tableau rectangulaire par les colonnes de couples qui sont à droite du trait vertical. Sous cette forme on voit immédiatement que chaque élément, y compris l'élément $n = 8$, entre une fois dans chaque colonne.

avec chacun des éléments $1', 2', \cdots, n'$, (β), et inversement. Dans cet ensemble de quadruples, chaque triple constitué de deux éléments (α) et d'un élément (β) ou de deux éléments (β) et d'un élément (α), entre donc une fois et une seule fois.

Ajoutons à cet ensemble un système de quadruples des éléments (α) et un système de quadruples des éléments (β). L'ensemble total contiendra chaque triple des éléments $1, 2, \cdots, n, 1', 2', \cdots, n'$ une fois et une seule fois. *Il constitue un système de quadruples.*

On a d'ailleurs bien:

$$\frac{n^2(n-1)}{4} + 2\frac{n(n-1)(n-2)}{4!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{4!}.$$

7. Construction II. La démonstration comporte de nouveau deux parties, **a** et **b**.

a) Soit un système de quadruples S des N éléments $1, 2, \cdots, N$, $N = 6n + 2$ (§ 5, second alinéa). Séparons ces éléments en deux parties:

$$1, 2, \cdots, N-2, \qquad (\alpha)$$
$$N-1, N. \qquad (\beta)$$

Les quadruples de S se répartissent vis-à-vis des éléments (β) en trois ensembles A, A', A'', qui sont:

A) ceux qui ne contiennent pas d'élément (β);

A') ceux qui contiennent des deux éléments (β), $N-1$ *ou* N seuls;

A'') ceux qui contiennent le couple $N-1, N$.

Dans les quadruples A'', les couples des éléments (α) forment un Δ^2_{N-2} (en appliquant deux fois la propriété du § 2, premier alinéa); il y a donc $\frac{N-2}{2}$ quadruples A''. Dans les quadruples A' qui contiennent N (ou $N-1$), les triples des éléments (α) forment un Δ^3_{N-1}, en y ajoutant les triples qui restent après suppression de l'élément N (ou $N-1$) dans les quadruples A''. Le nombre des quadruples A' contenant N (ou $N-1$) est donc:

$$\frac{(N-1)(N-2)}{6} - \frac{N-2}{2} = \frac{N-2}{6}(N-4).$$

Barrons dans ces quadruples A' les éléments N et $N-1$. Il reste d'après ce qui vient d'être dit deux ensembles A_1' et A_2' de triples des éléments (α), de $\frac{(N-2)(N-4)}{6}$ triples chacun. A cause de la constitution du système de quadruples, chaque ensemble A_1' et A_2' contient les mêmes couples des éléments (a), chaque couple une seule fois, et dans les deux ensembles il n'y a pas deux fois le même triple.

$\frac{N-2}{3}$ est entier, à cause de la forme de N. Nous pouvons donc répartir les $\frac{(N-2)(N-4)}{3}$ triples des deux ensembles A_1' et A_2' en $N-4$ colonnes de $\frac{N-2}{3}$ triples. L'exigence immédiate de la construction que nous cherchons, est simplement que cette répartition soit telle que dans chacune de ces colonnes *il n'y ait pas deux fois le même couple.* Pour cela il suffit, d'après ce qui est dit ci-dessus, de partager arbitrairement chacun des ensembles A_1' et A_2' en $\frac{N-4}{2}$ colonnes de $\frac{N-2}{3}$ triples. Mais il est possible que la suite de la construction exige davantage, une répartition telle que dans chacune des $N-4$ colonnes, *il n'y ait pas deux fois le même élément.* Nous ne sommes pas en état de fixer ce point, ni surtout de dire si une telle répartition sera toujours possible. Nous avons seulement les premières conditions immédiatement nécessaires pour une telle répartition:

1) les $\frac{N-2}{3}$ triples de chaque colonne contiennent $N-2$ éléments, donc exactement, s'ils ne peuvent pas se répéter, les $N-2$ éléments (a) que nous avons à disposition;
2) le nombre des éléments (a) contenus dans les triples A_1' et A_2' est $(N-2)(N-4)$; chacun y intervient *le même nombre de fois,* puisque tous les couples de ces éléments, abstraction faite de ceux du système de couples associé au couple $N-1, N$ dans A'', y interviennent exactement deux fois; donc chaque élément y intervient $N-4$ fois, c'est-à-dire le nombre des colonnes que nous voulons former.

Admettons effectuée la répartition en question, avec la première, sinon avec la seconde des exigences que nous venons de discuter. Ajoutons aux $\frac{N-2}{3}$ triples de chaque colonne l'un des $N-4$ éléments suivants:

$$N-1, N, N+1, N+2, \cdots, 2N-6. \qquad (\gamma)$$

Nous formons ainsi un ensemble B de $\frac{(N-2)(N-4)}{3}$ quadruples contenant avec les quadruples A chaque triple des éléments (a) une fois et une seule fois.

b) Dans le système de quadruples cherché, chaque couple (α)[5]) doit être lié une fois exactement à chaque élément (γ) et inversement chaque couple (γ) doit être lié une fois exactement à chaque élément (α). Dans l'ensemble B, à chaque élément (γ) se trouve lié déjà $N-2$ couples (α). Donc chaque élément (γ) doit encore être lié à $\frac{(N-2)(N-3)}{2}-(N-2)=$ $=\frac{(N-2)(N-5)}{2}$ couples (α). D'autre part, puisque dans les ensembles A et B formés jusqu'ici n'entre encore aucun couple (γ), chacun des couples (γ) doit encore être lié à chaque élément (α).

Nous aurons exactement les liaisons demandées si nous pouvons constituer l'ensemble suivant de quadruples, formés de couples (α) et de couples (γ) associés. A chaque couple ab des éléments (γ) nous associons un système de couples $\alpha\beta, \gamma\delta, \cdots, \varkappa\lambda$, des éléments (α), de façon à former les quadruples:

$$ab\alpha\beta,\ ab\gamma\delta,\ \cdots,\ ab\varkappa\lambda, \tag{7}$$

avec les deux conditions suivantes:

1) $\alpha\beta, \gamma\delta, \cdots, x\lambda$ ne sont pas des couples (α) contenus dans les quadruples de B qui contiennent a et b;
2) pour tous les quadruples (7) contenant un même élément (γ) les couples (α) sont tous différents.

Si nous pouvons former dans les conditions demandées, ce système de couples (α) pour chaque couple (γ), les liaisons exigées ci-dessus seront complètes. En effet chaque couple (γ) sera lié exactement une fois à chaque élément (α), et inversement chaque couple (α) qui reste à lier à un élément (γ) fixé quelconque le sera exactement une fois, puisque, pour un même élément (γ), le nombre des places à occuper par les couples (α), qui est d'après (7), condition 2), $(N-5)\frac{N-2}{2}$, est le même que le nombre de ces couples qui restent à lier avec cet élément (γ) (voir ci-dessus).

Admettons constitué ce nouvel ensemble de quadruples et désignons-le par C. Ajoutons aux ensembles A, B et C, un système de quadruples D des éléments (γ), contenant donc une fois et une seule fois chaque triple des éléments (γ). L'ensemble total $A+B+C+D$ contiendra chaque triple des $2N-6$ éléments (α) et (γ) réunis, une fois et une seule fois. Il sera donc un système de quadruples des $2N-6$ éléments. On a bien effectivement:

[5]) Pour simplifier, nous écrirons simplement: *couples* (α) et *couples* (γ), au lieu de: couples des éléments (α), couples des éléments (γ).

Nombre des quadruples de D : $\frac{(N-4)(N-5)(N-6)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

,, ,, ,, ,, C : $\frac{(N-4)(N-5)}{2} \cdot \frac{N-2}{2}$

,, ,, ,, ,, B: $\frac{(N-2)(N-4)}{3}$

,, ,, ,, ,, A: $\frac{N(N-1)(N-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(N-2)(N-4)}{3} - \frac{N-2}{2}$

Nombre total des quadruples de $A+B+C+D$:

$$\frac{(N-4)(8N^2-52N+84)}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{(2N-6)(2N-7)(2N-8)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

8. Construction III. $N-2$ est de la forme $6n+2$ (§ 5, second alinéa). Nous constituons deux systèmes de quadruples de $N-2$ éléments, l'un avec les éléments $0, 1, 2, \cdots, N-3$, l'autre avec les éléments $0', 1', 2', \cdots, (N-3)'$. Nous barrons ensuite les éléments 0 et $0'$ dans chacun des systèmes. Il reste dans l'un et l'autre des systèmes un ensemble de A quadruples et un ensemble de B triples,

des éléments $1, 2, \cdots, N-3$, (α),
respectivement $1', 2', \cdots, (N-3)'$, (β).

Les B triples contiennent une fois et une seule fois chaque couple des éléments (α), resp. (β) (§ 2, premier alinéa); les A quadruples et les B triples contiennent ensemble une fois et une seule fois chaque triple des éléments (α), resp. (β).

$B = \frac{(N-3)(N-4)}{6}$. $\frac{N-4}{6}$ est entier à cause de la forme de $N-2$.

On peut donc répartir les B triples de l'un et de l'autre des systèmes en $\frac{N-4}{6}$ colonnes de $N-3$ triples chacune. Admettons que nous pouvons faire cette répartition telle qu'il y a dans chaque colonne le même nombre de fois chaque élément, donc *trois fois* chaque élément, puisque $N-3$ triples contiennent $3(N-3)$ éléments. Aux $N-3$ triples de chaque colonne des triples (α), nous ajoutons les $N-3$ éléments (β) dans un ordre quelconque; aux $N-3$ triples de chaque colonne des triples (β), nous ajoutons de même les $N-3$ éléments (α).

Nous constituons ainsi un ensemble de $2B$ quadruples dans lesquels chaque couple (α) est lié à *un* élément (β) et inversement. Pour la constitution du système de quadruples cherché des $2N - 6$ éléments (α) et (β), chaque couple (α) doit être lié à *chaque* élément (β) et inversement. Il reste donc à lier chaque couple (α) à $N - 4$ éléments (β) et inversement.

Mais on peut aussi s'exprimer autrement. Dans les $2B$ quadruples formés, chaque élément (β) est lié à $\frac{N-4}{2}$ couples (α) et inversement. Pour la constitution du système cherché, chaque élément (β) doit être lié à chaque couple (α) et inversement. Il reste donc à lier chaque élément (β) à $\frac{(N-3)(N-4)}{2} - \frac{N-4}{2} = \frac{(N-4)^2}{2}$ couples (α) et inversement.

Or nous aurons exactement les liaisons demandées si nous pouvons constituer l'ensemble suivant de quadruples, formés de couples (α) et de couples (β) associés. A chaque couple ab des éléments (α), nous associons un système de couples $\alpha\beta, \gamma\delta, \cdots, \varkappa\lambda$, des $N - 4$ éléments (β) qui ne sont pas encore liés à ab, de manière à former les quadruples:

$$ab\alpha\beta,\ ab\gamma\delta,\ \cdots,\ ab\varkappa\lambda, \tag{8}$$

avec les deux conditions suivantes:

1) $\alpha\beta, \gamma\delta, \cdots, \varkappa\lambda$ ne sont pas des couples (β) déjà liés à a et b dans les $2B$ quadruples ci-dessus;

2) pour tous les quadruples (8) contenant un même élément (α), les couples (β) sont tous différents.

En effet dans ce cas les liaisons exigées seront complètes: chaque couple (α) sera lié aux $N - 4$ éléments (β) auxquels il doit encore être lié (ci-dessus, troisième alinéa), et inversement chaque couple (β) qui doit encore être lié à un élément (α) fixé quelconque, le sera, une fois et une seule fois, puisque, pour un même élément (α), le nombre des places à occuper par les couples (β), qui est, d'après (8) condition 2), $(N-4)\frac{N-4}{2}$, est le même que le nombre de ces couples qui restent à lier avec cet élément (α) (ci-dessus, quatrième alinéa).

Admettons constitué ce nouvel ensemble de quadruples et désignons leur nombre par C. L'ensemble total des $2A + 2B + C$ quadruples que nous avons ainsi formés, contiendra maintenant chaque triple des $2N - 6$ éléments $1, 2, \cdots, N - 3, 1', 2', \cdots, (N - 3)'$ une fois et une seule fois. Il sera donc un système de quadruples. On a bien effectivement:

$$B=\frac{(N-3)\,(N-4)}{6};\quad A=\frac{(N-2)\,(N-3)\,(N-4)}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{(N-3)\,(N-4)}{6};$$

$$C=\frac{(N-3)\,(N-4)}{2}\cdot\frac{N-4}{2}.$$

Le nombre total $2A+2B+C$ de quadruples est le nombre nécessaire :

$$\frac{(N-2)\,(N-3)\,(N-4)}{3\cdot 4}+\frac{(N-3)\,(N-4)^2}{4}=\frac{(N-3)\,(N-4)\,(4N-14)}{12}=$$

$$=\frac{(2N-6)\,(2N-7)\,(2N-8)}{2\cdot 3\cdot 4}.$$

III. Les systèmes de quadruples pour $N=4$, 8, 10 et 14 éléments.

9. $\boldsymbol{N=4}$**.** Le cas est trivial; le quadruple 1234 contient chaque triple de ces éléments une fois et une seule fois. Il constitue l'unique système de quadruples pour $N=4$.

$\boldsymbol{N=8}$**.** Conformément à la construction I, les deux tableaux de Reiss sont:

12	13	14	$1'\,2'$	$1'\,3'$	$1'\,4'$
34	24	23	$3'\,4'$	$2'\,4'$	$2'\,3'$

Nous associons chaque couple des colonnes de gauche à chaque couple de la colonne *de même rang* de droite. Nous obtenons l'ensemble de quadruples suivant:

	$12\ 1'\,2'$	$13\ 1'\,3'$	$14\ 1'\,4'$
(9)	$12\ 3'\,4'$	$13\ 2'\,4'$	$14\ 2'\,3'$
	$34\ 1'\,2'$	$24\ 1'\,3'$	$23\ 1'\,4'$
	$34\ 3'\,4'$	$24\ 2'\,4'$	$23\ 2'\,3'$

En y ajoutant les deux quadruples 1234 et $1'\,2'\,3'\,4'$, nous avons un système de quadruples pour $N=8$.

Il n'existe pas d'autre système de quadruples différent de celui qui vient d'être trouvé, pour $N = 8$. Pour l'établir, il suffit de remarquer le fait suivant:

Le système de quadruples trouvé est fixé complètement par le Δ_7^3 associé à l'un de ses éléments. En effet le Δ_7^3 associé à l'élément 1 est:

$$2\,3\,4,\quad 2\,1'\,2',\quad 2\,3'\,4',\quad 3\,1'\,3',\quad 3\,2'\,4',\quad 4\,1'\,4',\quad 4\,2'\,3'.$$

Le système Δ_7^3 associé à l'élément 2 doit donc contenir les trois triples:

$$1\,3\,4,\quad 1\,1'\,2',\quad 1\,3'\,4'.$$

Pour que ce soit un système de triples, les quatre autres triples de ce Δ_7^3 ne peuvent être que:

$$3\,1'\,3',\quad 3\,2'\,4',\quad 4\,1'\,4',\quad 4\,2'\,3' \quad \textit{ou} \quad 3\,1'\,4',\quad 3\,2'\,3',\quad 4\,1'\,3',\quad 4\,2'\,4'.$$

La première alternative est impossible avec ce qui est déjà dans (9). Il ne reste que la seconde qui donne précisément les quadruples qui sont ceux de (9): $2\,3\,1'\,4'$, $2\,3\,2'\,3'$, $2\,4\,1'\,3'$, $2\,4\,2'\,4'$. Il est clair maintenant que les trois derniers quadruples encore disponibles sont fixés par les onze déjà formés; pour le vérifier, il suffirait de prendre encore le Δ_7^3 associé à l'élément 3.

Nous rappelons encore que pour $N = 7$, il n'existe qu'*un seul* système de triples, qui prend 30 formes distinctes ou, autrement dit, qui possède un groupe de substitutions d'ordre 168.

De là nous concluons sans autre (§ 4, propriété V): *le système Δ_8^4 trouvé a 30 formes distinctes et il n'existe pas de Δ_8^4 différent de celui-là.* Le groupe de substitutions qui lui appartient est d'ordre $\frac{8!}{30} = 1344$.

10. ***N*=*10*.** $10 = 6 \cdot 1 + 4$; d'après le § 5, second alinéa, c'est la construction II qui intervient avec $N'' = 6\,n' + 2 = 8$, $N'' - 4 = 4$. Nous partons donc du Δ_8^4 précédent; mais pour la concordance de la notation avec celle du § 7, au lieu des éléments $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, nous écrirons 5, 6, 7, 8. Le système de quadruples S (§ 7) est ainsi:

1256	1357	1458	1234
1278	1368	1467	5678
3456	2457	2358	
3478	2468	2367	

Les deux ensembles de triples A_1' et A_2' des éléments (α): 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont:

135, 245, 146, 236 et 136, 246, 145, 235.

Les premiers proviennent des quadruples contenant l'élément 7 seul; les seconds, des quadruples contenant l'élément 8 seul.

Leur répartition en $N - 4 = 4$ colonnes de $\frac{N-2}{3} = 2$ triples, telle que dans chaque colonne il n'y a pas deux fois *le même couple*, se fait immédiatement en partageant en deux colonnes chacun des ensembles. Mais dans ce cas-ci on peut faire immédiatement aussi la répartition telle, que dans chaque colonne il n'y a pas deux fois *le même élément*; elle est d'ailleurs unique:

135,	146,	245,	236,
246,	235,	136,	145.

Les éléments (γ) sont 7, 8, 9, 0' et pour l'ensemble B nous prendrons:

(10)	1357	1468	2459	2360'
	2467	2358	1369	1450'

A chacun des couples (γ) nous pouvons associer un système de couples (α) qui remplit les conditions demandées (§ 7, b, second alinéa). Ces systèmes de couples sont donnés dans le tableau suivant en-dessous des couples (γ):

	78	79	70'	89	80'	90'
(11)	12	14	16	15	13	12
	36	23	25	26	24	35
	45	56	34	34	56	46

Mais la constitution de ce tableau est encore unique; autrement dit il n'est pas possible de satisfaire aux conditions demandées avec une disposition autre des couples (α).

Ajoutons aux deux ensembles B et C des quadruples (10) et (11), l'ensemble A qui est 1256, 3456, 1234 et le système de quadruples D des éléments (γ) qui se réduit au quadruple 7890'. L'ensemble total $A + B + C + D$ est le Δ_{10}^4 cherché.

Il n'existe pas d'autre système de quadruples différent de celui qui vient d'être trouvé, pour $N = 10$. Pour l'établir, il suffit encore de remarquer le fait suivant:

Le système de triples Δ_9^3 associé à l'élément 1 dans le système de quadruples trouvé, permet trois systèmes de quadruples Δ_{10}^4, qui diffèrent par les 8 triples encore disponibles associés à l'élément 2 et par les autres quadruples qui en découlent. Ces trois systèmes sont équivalents.

En effet ce Δ_9^3 est:

	234	256	357	450′
(12)	589	278	380′	468
	670′	290′	369	479

Le système Δ_9^3 associé à l'élément 2 doit donc contenir les quatre triples:

$$134, \quad 156, \quad 178, \quad 190'.$$

Pour que ce soit un système de triples, les huit autres triples de ce Δ_9^3 ne peuvent prendre que l'une des huit formes suivantes:

579,	680′,	358,	370′,	3 9 6,	467,	489,	4 0′ 5;	(α)
579,	680′,	350′,	376,	3 9 8,	469,	485,	4 0′ 7;	(β)
570′,	689,	358,	379,	3 0′ 6,	467,	480′,	4 9 5;	(γ)
570′,	689,	359,	376,	3 0′ 8,	460′,	485,	4 9 7;	(δ)
589,	670′,	357,	380′,	3 9 6,	468,	479,	4 0′ 5;	(ε)
589,	670′,	350′,	386,	3 9 7,	469,	475,	4 0′ 8;	(ζ)
580′,	679,	357,	389,	3 0′ 6,	468,	470′,	4 9 5;	(η)
580′,	679,	359,	386,	3 0′ 7,	460′,	475,	4 9 8;	(θ)

Les formes (ε), (ζ), (α), (δ) et (η) ne peuvent convenir, parce que contenant des triples qui sont déjà dans les triples (12) associés à l'élément 1. Seules peuvent convenir les formes (β), (γ) et (θ); la forme (γ) est celle du système Δ_{10}^4 déjà trouvé.

Les quadruples restant encore sont maintenant fixés par les vingt déjà formés. Pour le voir prenons encore le Δ_9^3 associé à l'élément 3 dans le cas de la forme (β), par exemple. Il doit déjà contenir les sept triples suivants:

$$124, \quad 157, \quad 180', \quad 169, \quad 250', \quad 267, \quad 289.$$

Pour que ce soit un système de triples, les cinq autres triples de ce Δ_9^3 ne peuvent encore prendre que l'une des trois formes suivantes:

459,	460′,	487,	568,	790′;	(α')
458,	460′,	497,	569,	780′;	(β')
456,	487,	490′,	589,	670′;	(γ')

Les formes (β') et (γ') ne peuvent convenir à cause de triples qui sont déjà dans les triples (12). Seule la forme (α') convient. Enfin les cinq derniers quadruples encore disponibles sont fixés évidemment par les vingt-cinq qui ont été obtenus. Pour le vérifier, il suffirait de prendre encore par exemple le Δ_9^3 associé à l'élément 4.

Enfin remarquons que les substitutions (589) (670′) et (598) (6 0′ 7) qui laissent invariant le système de triples (12), changent la forme (γ) respectivement dans les formes (β) et (θ) et par conséquent le système Δ_{10}^4 trouvé dans les deux autres fixés par les formes (β) et (θ). Ainsi la proposition ci-dessus est complètement établie.

Rappelons maintenant que pour $N = 9$ il n'existe encore *qu'un seul* système de triples, qui prend 840 formes distinctes, ou autrement dit, qui possède un groupe de substitutions d'ordre 432.

Nous concluons de là sans autre (§ 4, propriété V): *le système Δ_{10}^4 trouvé a* $3 \times 840 = 2520$ *formes distinctes et il n'existe pas un Δ_{10}^4 différent de celui-là*. Le groupe de substitutions qui lui appartient est d'ordre $\dfrac{10!}{2520} = 1440$.

Remarque. Ce système Δ_{10}^4 est cyclique. On trouve sa forme cyclique invariante par le groupe cyclique $\{(1234567890')\}$, en faisant la substitution (4758) (69). On peut alors prendre pour têtes de ses trois colonnes cycliques les quadruples 1237, 1245, 1385. On voit aisément sous cette forme que le système possède le diviseur métacyclique $\{\,|\,x,\ 1+x\,|,\ |\,x,\ 3\,x\,|\,\}$, d'ordre 40.

11. $N = 14$. $14 = 6 \cdot 2 + 2$; d'après le § 5, second alinéa, c'est la construction III qui intervient, avec $N' = 6\,n' + 4 = 10$, $N' - 2 = 8$. D'après le § 8 nous partons donc de deux systèmes Δ_8^4, l'un formé des éléments (α): 0, 1, $\cdots$, 7, l'autre, des éléments (β): 0′, 1′, $\cdots$, 7′, du type (9):

	0145	0246	0347	0123
(13)	0167	0257	0356	4567
	2345	1346	1247	
	2367	1357	1256	

	0′ 1′ 4′ 5′	0′ 2′ 4′ 6′	0′ 3′ 4′ 7′	0′ 1′ 2′ 3′
(14)	0′ 1′ 6′ 7′	0′ 2′ 5′ 7′	0′ 3′ 5′ 6′	4′ 5′ 6′ 7′
	2′ 3′ 4′ 5′	1′ 3′ 4′ 6′	1′ 2′ 4′ 7′	
	2′ 3′ 6′ 7′	1′ 3′ 5′ 7′	1′ 2′ 5′ 6′	

$\frac{N-4}{6} = 1$. Ici la répartition des B triples de chaque système (§ 8, second alinéa) en $\frac{N-4}{6}$ colonnes de $N-3$ triples chacune, est sans autre telle qu'il y a dans chaque colonne le même nombre de fois chaque élément, puisqu'il n'y a qu'*une* colonne de 7 triples qui est le Δ_7^3 associé à l'élément 0 dans les Δ_8^4 (13) et (14), et un Δ_7^3 contient chaque élément trois fois.

Nous aurons ainsi les deux colonnes de triples rangées horizontalement:

1 2 3	1 4 5	1 6 7	2 4 6	2 5 7	3 4 7	3 5 6
1′ 2′ 3′	1′ 4′ 5′	1′ 6′ 7′	2′ 4′ 6′	2′ 5′ 7′	3′ 4′ 7′	3′ 5′ 6′

Nous ajoutons les éléments (β) aux premiers et les éléments (α) aux seconds, dans l'ordre qui se présente immédiatement:

(15)	1 2 3 1′	1 4 5 2′	1 6 7 3′	2 4 6 4′	2 5 7 5′	3 4 7 6′	3 5 6 7′
	1′ 2′ 3′ 1	1′ 4′ 5′ 2	1′ 6′ 7′ 3	2′ 4′ 6′ 4	2′ 5′ 7′ 5	3′ 4′ 7′ 6	3′ 5′ 6′ 7

Ce sont les 2 B quadruples. Il reste à former les C quadruples. Nous pouvons en effet, associer à chacun des couples (α) que nous disposons dans le*s* deux lignes horizontales ci-dessous, un système de couples (β) tel que l'ensemble remplit les deux conditions demandées (§ 8, cinquième alinéa). Chacun de ces systèmes de couples (β) est écrit en-dessous du couple (α) correspondant:

12	13	14	15	16	17	23	24	25	26	27
2′ 4′	2′ 6′	1′ 5′	1′ 4′	1′ 7′	1′ 6′	2′ 5′	1′ 7′	1′ 2′	1′ 6′	1′ 3′
3′ 6′	4′ 7′	3′ 4′	3′ 7′	2′ 5′	2′ 7′	3′ 7′	2′ 3′	3′ 4′	2′ 7′	2′ 6′
5′ 7′	3′ 5′	6′ 7′	5′ 6′	4′ 6′	4′ 5′	4′ 6′	5′ 6′	6′ 7′	3′ 5′	4′ 7′

34	35	36	37	45	46	47	56	57	67
1′ 3′	1′ 5′	1′ 4′	1′ 2′	1′ 6′	1′ 2′	1′ 4′	1′ 3′	1′ 7′	1′ 5′
2′ 7′	2′ 4′	2′ 3′	3′ 4′	3′ 5′	3′ 6′	2′ 5′	2′ 6′	2′ 3′	2′ 4′
4′ 5′	3′ 6′	5′ 6′	5′ 7′	4′ 7′	5′ 7′	3′ 7′	4′ 5′	4′ 6′	6′ 7′

Le Δ_{14}^4 cherché est constitué des $2A$ quadruples (13) et (14) qui ne contiennent pas 0 et 0′, des $2B$ quadruples (15) et des C quadruples du tableau ci-dessus, en tout 91 quadruples.

Le système trouvé possède un groupe de substitutions d'ordre 42. Il prend donc $\frac{14!}{42}$ *formes distinctes. Le système Δ_{13}^3 associé à ses éléments est le système de triples de Kirkman qui possède un groupe de substitutions d'ordre* 6.

Le multiple dont il est question au § 4, propriété III, est donc ici 2, puisque $\frac{14!}{42} = 2 \cdot \frac{13!}{6}$. Le système Δ_{13}^3 associé à l'élément 1, par exemple, dans le système de quadruples trouvé, ne permet donc qu'*un second* système Δ_{14}^4 équivalent au premier et distinct par les autres quadruples qui ne contiennent pas l'élément 1. Mais il n'est pas dit que sur ce même système Δ_{13}^3 de Kirkmann on ne puisse pas construire un autre système de quadruples Δ_{14}^4 différent du premier, comme il est probable aussi que sur le système de triples cyclique Δ_{13}^3 de Netto, dont le groupe de substitutions est d'ordre 39, on peut également construire *un* ou éventuellement plusieurs Δ_{14}^4 différents. Ces systèmes seront différents des précédents (§ 4, propriété II). Il est donc probable qu'il existe pour $N = 14$ *au moins deux systèmes de quadruples différents.*

Pour établir la proposition énoncée ci-dessus, c'est-à-dire obtenir le groupe de substitutions du système Δ_{14}^4 trouvé et déterminer la nature du système de triples Δ_{13}^3 associé à ses éléments, le moyen le plus simple est celui des „*trains*" de H. S. White, établi pour le système de triples, mais dont la généralisation au système de n-uples est immédiate[6]). La place nous fait défaut pour le développer ici; nous ne donnerons que les résultats qui suffisent à établir ce que nous désirons.

1) Le groupe de substitutions qui appartient au système Δ_{14}^4 trouvé est transitif. Les cinq substitutions suivantes, par exemple, qui laissent chacune le système invariant: (4 3′ 5 4′ 1 7′) (2 1′ 3 6′ 7 5′) (6 2′), (4 6′ 3 7′ 6 4′) (2 2′ 7 1′ 5 3′) (1 5′), (4 5′ 3 2′ 7 7′) (6 4′ 2 1′ 1 3′) (5 6′), (4 2′ 5 5′ 2 4′) (6 6′ 1 7′ 7 1′) (3 3′), (4 1′) (6 7′ 5 5′ 7 3′) (1 4′ 3 2′ 2 6′), suffisent à montrer que l'élément 4, par exemple, est transformé en chacun des 13 autres par les substitutions du groupe[7]).

[6]) *H. S. White,* Transactions of the Amer. Math. Society, vol. XIV, n° 1, 1913, p. 6. ou voir *S. Bays,* Annales de l'Ecole normale supérieure, t. 40, Paris (1923), p. 81 à 96.

[7]) Il suffit de savoir qu'un élément *fixé* est changé en chaque autre, pour être assuré que *chaque* élément est changé en chaque autre par les substitutions du groupe.

2) Les substitutions qui changent le système en lui-même en laissant en place l'élément 4, sont uniquement, avec l'identité, la substitution (123) (567) $(2' \, 4' \, 6')$ $(3' \, 5' \, 7')$ et son inverse. Il est facile de s'en rendre compte en très peu de temps avec les trains de White ou sur le système lui-même. L'ordre du groupe cherché est donc $14 \times 3 = 42$, et ce groupe est simplement transitif, puisque certains couples de ses éléments ne peuvent pas se transformer en tous les autres.

3) Les trains de White du système Δ_{13}^3 associé à l'élément 1, par exemple, montrent immédiatement une différence de forme avec ceux du système cyclique de Netto que nous connaissons[8]). Nous savons qu'il n'y a que *deux* systèmes de triples différents pour $N = 13$, le système cyclique de Netto et le système dit de Kirkman dont les groupes de substitutions sont respectivement d'ordre 39 et 6. Cela nous suffit donc pour être assuré que le Δ_{13}^3 en question est le système de Kirkman, comme il fallait l'établir.

---

[8]) *S. Bays*, loc. cit. note 6, p. 82.

(Reçu le 11 janvier 1935.)