Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 7 (1934-1935)

Artikel: Über ein funktionentheoretisches Seitenstück eines elementaren, algebraischen Satzes von Gauss.

Autor: Selberg, Henrik L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515593

Über ein funktionentheoretisches Seitenstück eines elementaren, algebraischen Satzes von Gauss

Von HENRIK L. SELBERG, Oslo

1. Es handelt sich in der vorliegenden Arbeit um die Herleitung eines funktionentheoretischen Satzes, der als ein Analogon eines bekannten *Gauß*'schen Satzes[1]) über Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten angesehen werden darf.

Um die Richtungslinien, wonach wir dabei vorgehen wollen, an einem leichter zugänglichen Satz zurechtzulegen, betrachten wir die ganzen nicht identisch verschwindenden Funktionen von der Form

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{m} e^{\alpha_i x^q} \varphi_i(x) \qquad (m < \infty),$$

wo die α_i reelle oder komplexe Konstanten, die φ_i ganze nicht identisch verschwindende Funktionen niedrigerer Ordnung als der ganzen positiven Zahl q sind.

Jede solche Funktion ist als ein *reduzierter* Ausdruck derselben Form darstellbar, der lauter verschiedene α_i enthält, und dieser Ausdruck ist einem bekannten *Borel*'schen Satz[2]) zufolge eindeutig bestimmt. Die reduzierte Form einer Funktion (1) erhalten wir durch Zusammenfassen der Glieder mit gleichem Wert von α_i. Zwei solche Glieder f_1 und f_2 wollen wir *äquivalent* nennen, im Zeichen $f_1 \sim f_2$.

Unter einem *Teiler* einer ganzen Funktion (1) verstehe ich im folgenden eine ganze Funktion Φ, die so beschaffen ist, daß, wenn wir uns den Ausdruck (1) in reduzierter Form gegeben denken, die Quotienten $\frac{\varphi_1}{\Phi}, \frac{\varphi_2}{\Phi}, \cdots, \frac{\varphi_m}{\Phi}$ ganze Funktionen sind, die für keinen Wert von x alle zugleich verschwinden.

[1]) *H. Weber*, Kleines Lehrbuch der Algebra, S. 74 (erste Auflage).

[2]) *E. Borel*, Sur les zéros des fonctions entières, Acta math. B. 20.

Es besteht nun der

Satz 1. *Sind Φ und Ψ Teiler von resp.*

$$(2) \qquad A = \sum_{i=1}^{m} e^{\alpha_i x^q} \varphi_i \text{ und } B = \sum_{i=1}^{n} e^{\beta_i x^q} \psi_i \,,$$

so ist $\Phi\Psi$ Teiler des Produktes

$$(3) \qquad C = A\,B = \sum_{i=1}^{p} e^{\gamma_i x^q} \eta_i \,.$$

Zum Beweise werde ich annehmen, daß (2) und (3) in reduzierter Form geschrieben sind. Sei nun x_0 ein beliebig gewählter Wert von x. Mache ich die erlaubte Voraussetzung[3])

$$\Re(\alpha_1) > \Re(\alpha_2) > \cdots > \Re(\alpha_m)$$
$$\Re(\beta_1) > \Re(\beta_2) > \cdots > \Re(\beta_n),$$

so können zwei kleinste Zahlen i_0 und k_0 bestimmt werden, für welche

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi_{i_0}}{\Phi} \text{ und } \lim_{x \to x_0} \frac{\psi_{k_0}}{\Psi}$$

nicht Null sind. Unter den ganzen Funktionen η_i von (3) befindet sich nun eine $\eta_h = \varphi_{i_0} \psi_{k_0} + \zeta$, wo ζ entweder Null ist oder die Form $\zeta = \Sigma \varphi_i \psi_k$ hat, wo die Differenzen $i - i_0$ und $k - k_0$ für zusammengehörende Indizes i und k nicht beide $\geqq 0$ sind. Es ist daher

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\zeta}{\Phi\Psi} = 0$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\eta_h}{\Phi\Psi} \neq 0,$$

womit unser Satz offenbar bewiesen ist.

2. Diesen Satz wollen wir jetzt mit Hilfsmitteln aus der modernen von *R. Nevanlinna* geschaffenen Theorie der ganzen und meromorphen Funktionen als Spezialfall eines weit allgemeineren Satzes erkennen.

---

[3]) $\Re$ = Realteil.

Dazu müssen wir vor allem erwägen, was in weiterem Sinne unter äquivalenten Funktionen zu verstehen sei. Soll die Tragweite der neuen Definition über das rein Formale hinausreichen, so muß sie in erster Reihe auf den Bau der Funktionen im großen ganzen achtgeben, während belanglose Unterschiede zu vernachlässigen sind. In der *Nevanlinna*'schen Theorie kann die in Frage kommende Abweichung zweier meromorpher Funktionen f_i und f_k zweckmäßig durch die Größe[4])

$$T\left(r, \frac{f_i}{f_k}\right) \tag{4}$$

gemessen werden. Unter den verschiedenen Definitionen, die von dieser Größe ausgehend aufgestellt werden können, wollen wir hier diejenige herausgreifen, die, wenn die eindeutige Darstellbarkeit der zu betrachtenden Funktionen in reduzierter Form beibehalten werden soll, beim heutigen Stande der *Nevanlinna*'schen Theorie die maximale Aufteilung in Äquivalenzklassen vertritt.

Um der Größenordnung von (4) einen Sinn zu geben, führen wir eine positive mit r monoton gegen unendlich wachsende Vergleichsfunktion $S(r)$ ein. Den Äquivalenzbegriff definiere ich jetzt folgendermaßen:

Zwei nicht identisch verschwindende meromorphe Funktionen f_i und f_k sind als äquivalent zu betrachten, im Zeichen $f_i \sim f_k$, wenn für jedes positives ε die Ungleichung

$$\frac{T\left(r, \frac{f_i}{f_k}\right)}{S(r)} > \varepsilon \tag{5}$$

höchstens für eine Wertemenge von r von endlichem Maß erfüllt ist.

Wegen $T\left(r, \frac{f_i}{f_k}\right) = T\left(r, \frac{f_k}{f_i}\right) + O(1)$ dürfen in der Ungleichung (5) f_i und f_k Plätze tauschen.

Es gilt offenbar:

a) aus $f_1 \sim f_2$ und $f_2 \sim f_3$ folgt $f_1 \sim f_3$.

b) aus $f_1 \sim f_2$ und $f_1 + f_2 \not\equiv 0$ folgt $f_1 \sim f_1 + f_2$.

---

[4]) Bezüglich Bezeichnungen und Sätze aus der *Nevanlinna*'schen Theorie verweise ich auf: *R. Nevanlinna,* Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes (Gauthier-Villars, Paris 1929).

Denn es ist

$$T\left(r, \frac{f_3}{f_1}\right) \leqq T\left(r, \frac{f_3}{f_2}\right) + T\left(r, \frac{f_2}{f_1}\right)$$

und somit

$$\frac{T\left(r, \frac{f_3}{f_1}\right)}{S(r)}$$

kleiner als ε, wenn

$$\frac{T\left(r, \frac{f_3}{f_2}\right)}{S(r)} \text{ und } \frac{T\left(r, \frac{f_2}{f_1}\right)}{S(r)}$$

beide kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ sind. Hiermit ist a) bewiesen. Da ferner

$$T\left(r, \frac{f_1+f_2}{f_1}\right) = T\left(r, \frac{f_2}{f_1}\right) + O(1),$$

so ist auch b) richtig.

3. Wir betrachten jetzt Funktionen von der Form

(6) $$\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \qquad (m < \infty),$$

wo die f_i ganze Funktionen sind, deren Nullstellendichte so gering ist, daß für jedes positive ε die Ungleichung

(7) $$\frac{N\left(r, \frac{1}{f_i}\right)}{S(r)} > \varepsilon$$

höchstens für eine Wertemenge von r von endlichem Maß erfüllt ist.

Durch Zusammenfassen äquivalenter Glieder läßt sich jede solche Funktion als einen *reduzierten* Ausdruck (6) darstellen, der also lauter inäquivalente Funktionen f_i enthält.

Dadurch, daß wir uns bei der Definition der reduzierten Form auf Funktionen vom Typus (6) beschränkt haben, haben wir erreicht, daß die eindeutige Darstellbarkeit in reduzierter Form beibehalten wird. Es gilt nämlich folgender Satz, der eine fast unmittelbare Konsequenz eines allgemeinen Satzes von *R. Nevanlinna* ist[5]):

[5]) S. 116 des in der Fußnote 4) zitierten Buches von *R. Nevanlinna*.

Satz 2. Zwei in bezug auf dieselbe Vergleichsfunktion $S(r)$ reduzierte Ausdrücke (6), *welche dieselbe ganze Funktion darstellen, müssen identisch sein.*

Unter einem *Teiler* einer Funktion (6) verstehe ich jetzt eine ganze Funktion F, die so beschaffen ist, daß, wenn wir, was erlaubt ist, den Ausdruck (6) in reduzierter Form gegeben voraussetzen, die Quotienten $\frac{f_1}{F}, \frac{f_2}{F}, \ldots, \frac{f_m}{F}$ ganze Funktionen sind, die nicht alle gleichzeitig Null werden. Durch diese Forderung sind die Nullstellen der Teiler einer Funktion (6) sowohl der Lage wie der Multiplizität nach vollkommen bestimmt.

4. Wir sind jetzt imstande, die in Aussicht gestellte Erweiterung von Satz 1 zu bewerkstelligen. Wir beweisen den

Satz 3. Sind F und G in bezug auf die Vergleichsfunktion $S(r)$ Teiler von resp.

$$A = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \text{ und } B = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\,, \tag{8}$$

so ist $H = FG$ Teiler in bezug auf $S(r)$ von

$$C = AB = \sum_{i=1}^{p} h_i(x)\,. \tag{9}$$

Wenn wir die Beweismethode aus Nr. 1 auf diesen Satz anwenden wollen, so begegnet uns die Schwierigkeit, daß unsere Funktionen f_i und g_i nicht wie dort sozusagen von vornherein sachgemäß geordnet erscheinen. Diesem Übelstand wollen wir im folgenden abhelfen, indem wir die Funktionen mit einer Rangordnung versehen wollen, die den vorliegenden Bedürfnissen Rechnung trägt.

Wir nehmen an, daß die Summen (8) und (9) in reduzierter Form vorliegen.

Es bezeichne $\Theta_{j,k}(r)$ denjenigen Teil des Kreises $|x| = r$, wo $\left|\frac{f_j}{f_k}\right| > 1$ $(j \neq k)$. Da f_j und f_k nicht äquivalent sind, können wir eine positive, möglicherweise unendlich große Zahl $a_{j,k}(j,k)$ finden derart, daß $(x = re^{i\vartheta})$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{S(r)} \int\limits_{\Theta_{j,k}(r)} \log \left|\frac{f_j}{f_k}\right| d\vartheta = a_{j,k}(j,k) > 0$$

ist, wenn r innerhalb einer Wertemenge $\mathfrak{M}_{j,k}$ von r von unendlich großem

Maß gegen unendlich konvergiert. Diese Wertemenge läßt sich offenbar so bestimmen, daß in $\mathfrak{M}_{j,k}$ die Grenzwerte

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{S(r)} \int\limits_{\theta_{j,k}(r)} \log \left| \frac{f_{i_1}}{f_{i_2}} \right| d\vartheta = \alpha_{j,k}(i_1, i_2) \quad (i_1, i_2 = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{S(r)} \int\limits_{\theta_{j,k}(r)} \log \left| \frac{g_{i_1}}{g_{i_2}} \right| d\vartheta = \beta_{j,k}(i_1, i_2) \qquad (i_1, i_2 = 1, 2, \cdots, n)$$

existieren, wobei als Grenzwerte $+\infty$ und $-\infty$ vorkommen dürfen.

In derselben Weise bezeichne ich mit $\Xi_{j,k}(r)$ denjenigen Teil von $|x| = r$, wo $\left| \frac{g_i}{g_k} \right| > 1$ $(j \neq k)$. Wie bei den Funktionen f_i lassen sich jetzt Wertemengen $\mathfrak{N}_{j,k}$ von r von unendlich großem Maß bestimmen, innerhalb deren die endlichen oder unendlichen Grenzwerte

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{S(r)} \int\limits_{\Xi_{j,k}(r)} \log \left| \frac{g_{i_1}}{g_{i_2}} \right| d\vartheta = \gamma_{j,k}(i_1, i_2) \qquad (i_1, i_2 = 1, 2, \cdots, n)$$

existieren und $\gamma_{j,k}(j, k) > 0$ ist.

Jedem Funktionspaare f_{i_1} und f_{i_2} $(i_1 \neq i_2)$ habe ich in dieser Weise $2m(m-1)$ Zahlen $\alpha_{j,k}(i_1, i_2)$ und $\alpha_{j,k}(i_2, i_1)$ zugeordnet, wo $\alpha_{j,k}(i_1, i_2) = -\alpha_{j,k}(i_2, i_1)$. Nicht alle diese Zahlen können Null sein, denn jedenfalls ist $\alpha_{i_1, i_2}(i_1, i_2) > 0$. Wir erteilen jetzt f_{i_1} höheren Rang als f_{i_2}, wenn für den kleinsten Index k, wofür die Zahlen

$$\alpha_{1,k}(i_1, i_2), \ \alpha_{2,k}(i_1, i_2), \ \ldots, \ \alpha_{m,k}(i_1, i_2)$$

nicht alle Null sind, die erste von Null verschiedene positiv ist. Dagegen gebe ich der Funktion g_{i_1} höheren Rang als g_{i_2}, wenn für den kleinsten Index k, wofür die Zahlen

$$\beta_{1,k}(i_1, i_2), \ \beta_{2,k}(i_1, i_2), \ \ldots, \ \beta_{m,k}(i_1, i_2) \tag{10}$$

nicht alle Null sind, die erste von Null verschiedene positiv ist. Sind aber die Zahlen (10) für alle $k = 1, 2, \ldots, m$ gleich Null, so lese ich die Rangfolge aus den Zahlen

$$\gamma_{1,k}(i_1, i_2),\ \gamma_{2,k}(i_1, i_2),\ \ldots,\ \gamma_{n,k}(i_1, i_2)$$

ab. Wenn für den kleinsten Index k, wofür diese Zahlen nicht alle Null sind, die erste von Null verschiedene positiv ist, so gebe ich g_{i_1} höheren Rang als g_{i_2}.

Durch dieses Ordnungsverfahren ist die Beweismethode aus Nr. 1 wieder leistungsfähig gemacht worden.

Es sei x_0 ein beliebig gewählter Wert von x. Es gibt dann zwei wohlbestimmte Funktionen f_{i_0} und g_{k_0} von niedrigstem Range, für welche

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_{i_0}}{F} \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g_{k_0}}{G}$$

nicht Null sind. Ich betrachte nun die Funktion $h_{j_0} = f_{i_0} g_{k_0} + Q$, wo Q entweder Null ist oder die Form $Q = \Sigma f_i g_k$ hat, wo die Addenden unter dem Summationszeichen alle mit dem Produkte $f_{i_0} g_{k_0}$ äquivalent sind. Ist aber ein Produkt $f_i g_k$ mit $f_{i_0} g_{k_0}$ äquivalent, so kann nicht zugleich f_i von höherem Range als f_{i_0} und g_k von höherem Range als g_{k_0} sein. Es ist daher

$$\lim_{x \to x_0} \frac{Q}{FG} = 0$$

und somit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h_{j_0}}{FG} \neq 0,$$

womit unser Satz offenbar bewiesen ist.

(Eingegangen den 4. Oktober 1934.)