

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1934-1935)

Artikel: Über numerische Schranken im Schottky'schen Satz.
Autor: Pfluger, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515592>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über numerische Schranken im Schottky'schen Satz

Von A. PFLUGER, Zürich

1. Der Schottky'sche Satz in qualitativer Form lautet:

Ist $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden, so gilt für $|z| \leq 1 - \vartheta < 1$ die Ungleichung

$$|f(z)| < e^\vartheta,$$

wo Ω nur von ϑ und $|f(0)|$ abhängt.

Die bezüglich der Größenordnung in ϑ genauesten Abschätzungen lauten:

$$\Omega < C \frac{\lg |f(0)| + 3}{\vartheta}$$

und

$$e^\vartheta < (A |f(0)| + A)^{\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}.$$

Die letztere stammt von Valiron¹⁾, die erstere wurde von Landau²⁾ mit Hilfe der Theorie der Modulfunktionen hergeleitet. Über die numerische Größenordnung der Konstanten A und C konnte jedoch nichts ausgesagt werden. Eine numerisch bestimmte Abschätzung von Ω und mit elementaren Methoden hergeleitet, jedoch von schlechterer Größenordnung in ϑ , stammt von Ostrowski³⁾ und lautet:

$$\Omega \leqslant 20 (\lg m) \cdot \frac{1}{\vartheta} \cdot \lg \frac{1}{\vartheta}, \quad m = \text{Max}(e, |f(0)|).$$

Durch Kombination der Methode von Bohr-Landau (Methode der Modulfunktion) mit einer der „elementaren“ Methoden von Ostrowski ist es mir gelungen, die folgenden Abschätzungen zu beweisen:

Ist $f(z)$ eine im Einheitskreise $|z| < 1$ reguläre und von 0 und 1 verschiedene Funktion, eine sogenannte Schottky'sche Funktion, so gelten im Kreis $|z| \leq 1 - \vartheta < 1$ die Abschätzungen:

¹⁾ Vergleiche G. Valiron, Bull. d. Sc. Math., Bd. 62 (1927).

²⁾ Vergleiche H. Bohr und E. Landau, Gött. Nachr., 1910, math.-phys. Klasse, Seiten 303—330.

³⁾ Vergleiche A. Ostrowski, Studien über den Schottky'schen Satz, Universitätsdruckerei, Basel (1931), Seiten 96—111.

$$\begin{aligned}
|f(z)| &< e^{4 + (9 + \lg m) \frac{2-\vartheta}{\vartheta}} \\
&< m^4 + 10^{\frac{2-\vartheta}{\vartheta}} \\
&< m^{20} \frac{1}{\vartheta},
\end{aligned}$$

wenn $m = \text{Max}(e, |f(0)|)$ gesetzt wird.

Anlaß zu der vorliegenden Arbeit gaben die Untersuchungen von W. Sacher über den verallgemeinerten Schottky'schen Satz⁴⁾. Es können nämlich die vorliegenden Resultate, wie in einer Zürcher Dissertation gezeigt werden wird, auch dazu dienen, die Abschätzungen von Sacher *numerisch* darzustellen.

2. Sei $\omega = \lambda(t)$ eine der drei gewöhnlichen Modulfunktionen, d. h. eine der Funktionen, die das Kreisbogendreieck

$$(1) \quad R(t) = 0, J(t) > 0; \quad R(t) = 1, J(t) > 0; \quad |t - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}, J(t) > 0$$

konform auf die obere Halbebene $J(\omega) > 0$ abbildet, so daß die Punkte $0, 1, \infty$ der t -Ebene in die Punkte $0, 1, \infty$ resp. $1, \infty, 0$ resp. $\infty, 0, 1$ der ω -Ebene übergehen. Ihre inverse Funktion $t = \nu(\omega)$ ist auf einer der ganzen ω -Ebene überlagerten Riemannschen Fläche mit $0, 1$ und ∞ als einzigen (transzententen) Windungspunkten, der sogenannten *Modulfläche*, eindeutig und analytisch. $f(z)$ sei eine sogenannte Schottky'sche Funktion, also im Einheitskreise regulär und von 0 und 1 verschieden. Wir wählen den Punkt $\omega = a_0 = f(0) \neq 0, 1$ auf einem bestimmten Blatte der Modulfläche, etwa so, daß $\nu(a_0)$ in den Fundamentalbereich⁵⁾ zu liegen kommt. Durch die Funktion

$$(2) \quad z = w(\omega) = \frac{\nu(\omega) - \nu(a_0)}{\nu(\omega) + \nu(a_0)}$$

wird diese schlicht auf das Innere des Einheitskreises der z -Ebene abgebildet. $w(f(z))$ bildet also diesen Einheitskreis auf sich selbst ab, wobei der Nullpunkt in sich übergeht. Aus dem Schwarz'schen Lemma folgt daher

$$|w(f(z))| \leq |z| \quad (3)$$

⁴⁾ Vergleiche W. Sacher, Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Schottky, Compositio math., Vol. 1, 1934, pag. 207—216.

⁵⁾ Das Kreisbogendreieck (1) und sein Spiegelbild bezüglich der imaginären Axe bilden den sogenannten Fundamentalbereich.

für alle $|z| < 1$. Bezeichnet $\mathfrak{M}(r, a_0)$ den maximalen Betrag der zu $w(\omega)$ inversen Funktion

$$(4) \quad \omega = \chi(z) = \lambda \left(\frac{z \overline{\nu(a_0)} - \nu(a_0)}{z - 1} \right)$$

im Kreise $|z| \leq r < 1$, so folgt aus (3) und $\chi(w(f(z))) = f(z)$ die Ungleichung

$$(5) \quad |f(z)| \leq \mathfrak{M}(r, a_0) \quad |z| \leq r.$$

Der absolute Betrag von $f(z)$ im Kreise $|z| \leq r$ wird also durch eine nur von a_0 abhängige reelle Funktion majorisiert⁶⁾. Aus dem Schwarz'schen Lemma folgt weiter, daß das Gleichheitszeichen in (5) dann und nur dann eintreten kann, wenn $f(z)$ von der Form $\chi(ze^{i\varphi})$, also selbst eine Modulfunktion ist.

Ziel der folgenden Untersuchungen ist, für $\mathfrak{M}(r, a_0)$ eine *numerisch bestimmte* Majorante zu suchen. Zu diesem Zwecke verfahren wir zunächst nach einer Methode von Bohr-Landau⁶⁾, die, ursprünglich auf die elliptische Modulfunktion angewandt, für den vorliegenden Fall einige Abänderungen erfahren mußte.

3. Sei $\lambda_1(t)$ speziell jene Modulfunktion, welche die Punkte $0, 1, \infty$ der t -Ebene in die Punkte $0, 1, \infty$ der ω -Ebene überführt; $\nu_1(\omega)$ sei ihre Umkehrfunktion. Es werde

$$(6) \quad M_1 = \underset{0 \leq u \leq 1}{\operatorname{Max}} |\lambda_1(u + i)| = \underset{-1 \leq u \leq 1}{\operatorname{Max}} |\lambda_1(u + i)|$$

gesetzt. Weil $\lambda_1(t)$ das Kreisbogendreieck (1) in der angegebenen Weise schlicht auf die obere Halbebene abbildet, so gilt für alle Punkte t des Fundamentalbereiches mit $J(t) \leq 1$ die Ungleichung

$$(7) \quad |\lambda_1(t)| \leq M_1.$$

Weil ferner durch $z = e^{i\pi t}$ der Bereich

$$(8) \quad J(t) > 0, \quad -1 \leq R(t) \leq 1$$

schlicht auf den längs der negativen reellen Axe aufgeschnittenen Einheitskreis abgebildet wird, und weil $\lambda_1(-1 + iv) = \lambda_1(+1 + iv)$, $v > 0$ ist, so ist die Funktion

⁶⁾ Vergleiche Anmerkung 2.

$$(9) \quad f_1(z) = f_1(e^{i\pi t}) = \lambda_1(t)$$

im Einheitskreis regulär bis auf den Nullpunkt, wo sie einen einfachen Pol besitzt. Das Maximum von $|z \cdot f_1(z)|$ auf dem Kreis $|z| = e^{-\pi}$ ist wegen (6) gleich $e^{-\pi} \cdot M_1$ und somit ist $|z| \cdot |f_1(z)| \leq M_1 e^{-\pi}$ für $|z| \leq e^{-\pi}$ oder wegen (9) $|\lambda_1(t)| \leq M_1 \cdot e^{-\pi + \pi v}$ für $J(t) = v > 1$ und schließlich wegen (7)

$$(10) \quad |\lambda_1(t)| \leq \max \{ M_1; M_1 e^{-\pi + \pi v} \}, \quad J(t) = v,$$

für alle Punkte t im Fundamentalbereich.

Sei nun t ein Punkt aus (8), der nicht zum Fundamentalbereich gehört. Durch eine geeignete Transformation der Modulgruppe:

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \alpha\delta - \gamma\beta = 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \equiv 1, \beta \equiv 0 \\ \gamma \equiv 0, \delta \equiv 1 \end{array} \right\} \text{ mod. } 2$$

wird dieser in einen Punkt t' des Fundamentalbereiches überführt, so daß

$$(11) \quad \lambda_1(t) = \lambda_1(t').$$

Nun ist

$$v' = J(t') = \frac{J(t)}{(\gamma t + \delta)(\gamma \bar{t} + \delta)}.$$

$t = u + iv$ gesetzt, gibt $(\gamma t + \delta)(\gamma \bar{t} + \delta) = (\gamma u + \delta)^2 + \gamma^2 v^2$. Wegen $4v^2 < 1$ und wegen $\gamma \equiv 0, \delta \equiv 1$ (mod 2) ist $(\gamma t + \delta)(\gamma \bar{t} + \delta) > 4v^2$ und schließlich

$$(12) \quad J(t') = v' \leq \frac{1}{4v}.$$

Aus (10), (11) und (12) folgt für alle t im Bereich (8), die nicht zum Fundamentalbereich gehören:

$$(13) \quad |\lambda_1(t)| \leq \max \left\{ M_1; M_1 e^{-\pi + \frac{\pi}{4v}} \right\}.$$

Weil aber $\max(v, \frac{1}{4v}) \geq \frac{1}{2}$ ist, so ergibt sich für alle t im Bereich (8)

$$(14) \quad |\lambda_1(t)| \leq M_1 \cdot e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\pi \max(v; \frac{1}{4v})}, \quad v = J(t).$$

Wie sich leicht ausrechnen lässt, ist für alle z mit $|z| \leq r$

$$J(\nu_1(a_0)) \frac{1-r}{1+r} \leq J\left(\frac{z \overline{\nu_1(a_0)} - \nu_1(a_0)}{z-1}\right) \leq J(\nu_1(a_0)) \frac{1+r}{1-r}.$$

Entspricht $\chi_1(z)$ bei $\nu_1(a_0)$ der Funktion $\chi(z)$ bei $\nu(a_0)$, so folgt aus (4) und (14)

$$|\chi_1(z)| \leq M_1 e^{-\pi/2} \cdot e^{\max\left\{\pi J(\nu_1(a_0)), \frac{\pi}{4J(\nu_1(a_0))}\right\} \frac{1+r}{1-r}}, \quad |z| \leq r$$

und schließlich nach Nr. 2

$$(15) \quad \mathfrak{M}(r, a_0) \leq M_1 \cdot e^{-\pi/2} \cdot e^{\max\left\{\pi J(\nu_1(a_0)), \frac{\pi}{4J(\nu_1(a_0))}\right\} \frac{1+r}{1-r}}.$$

4. Um $J(\nu_1(a_0))$ nach oben abzuschätzen, setzen wir

$$(16) \quad m_1 = \max_{0 \leq u \leq 1} \frac{1}{|\lambda_1(u+i)|} = \max_{-1 \leq u \leq 1} \frac{1}{|\lambda_1(u+i)|} = \max_{|z|=e^{-\pi}} \left| \frac{1}{f_1(z)} \right|.$$

Dann ist $\frac{1}{|z \cdot f_1(z)|} \leq e^\pi \cdot m_1$ für $|z| \leq e^{-\pi}$ oder $|\lambda_1(t)| \cdot m_1 e^\pi \geq e^{\pi v}$ und somit $\lg |\lambda_1(t)| + \pi + \lg m_1 \geq \pi v$ für $v = J(t) \geq 1$. Wird $t = \nu_1(a_0)$ gesetzt, so ist entweder $J(\nu_1(a_0)) \leq 1$ oder $\pi J(\nu_1(a_0)) \leq \lg m_1 + \pi + \lg |a_0|$ und somit

$$(17) \quad \pi J(\nu_1(a_0)) \leq \max\{\pi; \pi + \lg m_1 + \lg |a_0|\}.$$

Um für $\frac{1}{4J(\nu_1(a_0))}$ eine obere Grenze zu finden, teilen wir den Fundamentalbereich in Teilbereiche ein. Den Durchschnitt des Fundamentalbereiches mit dem Bereich $|u| \leq 1, v \geq \frac{1}{2}$ resp. $|u| \leq \frac{1}{2}, v \leq \frac{1}{2}$ resp. den Bereichen $\frac{1}{2} \leq u \leq 1, v \leq \frac{1}{2}$ und $-1 \leq u \leq -\frac{1}{2}, v \leq \frac{1}{2}$ bezeichnen wir mit B_1 resp. B_2 resp. B_3 . $\nu_1(a_0)$ gehört sicher einem dieser Bereiche an. Liegt $\nu_1(a_0)$ in B_1 , so ist

$$(18) \quad \frac{\pi}{4J(\nu_1(a_0))} \leq \frac{\pi}{2} < \pi.$$

Liegt $\nu_1(a_0)$ im Bereich B_2 , bezeichnet $\lambda_2(\tau)$ die Modulfunktion, welche die Punkte $0, 1, \infty$ der τ -Ebene in die Punkte $1, \infty, 0$ der ω -Ebene überführt und wird $\tau = \frac{t-1}{t}$, $\nu_1(a_0) = t = u + iv, J(\tau) = w$ gesetzt, so ist

$$(19) \quad \lambda_1(t) = \lambda_2(\tau), \quad w = J(\tau) = J\left(\frac{t \bar{t} - \bar{t}}{t \bar{t}}\right) = \frac{v}{u^2 + v^2} \geq \frac{1}{2v} > \frac{1}{4v};$$

denn im Bereich B_2 ist $|u| \leq v$. Setzen wir ferner

$$f_2(z) = f_2(e^{i\pi\tau}) = \lambda_2(\tau),$$

$$M_2 = \underset{0 \leq \xi \leq 1}{\operatorname{Max}} |\lambda_2(\xi + i)| = \underset{-1 \leq \xi \leq 1}{\operatorname{Max}} |\lambda_2(\xi + i)| = \underset{|z| = e^{-\pi}}{\operatorname{Max}} |f_2(z)|,$$

so ist $\left|\frac{f_2(z)}{z}\right| \leq M_2 e^\pi$ oder $|\lambda_2(\tau)| \leq M_2 e^{\pi - \pi w}$ für alle τ mit $J(\tau) \geq 1$.

Aus (19) folgt dann

$$(20) \quad \frac{\pi}{4J(\nu_1(a_0))} < \lg M_2 + \pi - \lg |a_0|,$$

sofern $\nu_1(a_0)$ dem Bereich B_2 angehört.

Im Falle, daß $\nu_1(a_0)$ einem der Bereiche B_3 angehört, verfahren wir analog. $\lambda_3(\tau)$ bezeichne die Modulfunktion, welche die Punkte $0, 1, \infty$ der τ -Ebene in die Punkte $\infty, 0, 1$ der ω -Ebene überführt. Wir setzen

$$\tau = \frac{1}{1-t}, \quad \nu_1(a_0) = t = u + iv, \quad J(\tau) = w. \quad \text{Es ist}$$

$$(21) \quad w = J(\tau) = J\left(\frac{1-\bar{t}}{(1-t)(1-\bar{t})}\right) = \frac{v}{(1-u)^2 + v^2} \geq \frac{1}{2v} > \frac{1}{4v};$$

denn im Bereich B_3 ist $|1-u| \leq v$. Setzen wir ferner

$$f_3(z) = f_3(e^{i\pi\tau}) = \lambda_3(\tau),$$

$$M_3 = \underset{0 \leq \xi \leq 1}{\operatorname{Max}} |\lambda_3(\xi + i)| = \underset{-1 \leq \xi \leq 1}{\operatorname{Max}} |\lambda_3(\xi + i)| = \underset{|z| = e^{-\pi}}{\operatorname{Max}} |f_3(z)|,$$

so ist $\left|\frac{f_3(z)-1}{z}\right| \leq (M_3+1) e^\pi$ oder $|\lambda_3(\tau)-1| \leq (M_3+1) e^{\pi - \pi w}$ für alle

τ mit $w = J(\tau) \geq 1$. Aus (21) folgt dann

$$(22) \quad \frac{\pi}{4J(\nu_1(a_0))} \leq \lg(M_3 + 1) + \pi - \lg |a_0 - 1|,$$

sofern $\nu_1(a_0)$ dem Bereich B_3 angehört. (15), (17), (18), (20) und (22) zusammenfassend erhalten wir folgendes Resultat:

$$(24) \quad \mathfrak{M}(r, a_0) \leq M_1 e^{-\pi/2} \cdot e^{k \frac{1+r}{1-r}},$$

$$k = \pi + \text{Max} \{ \lg m_1 + \lg |a_0|, \lg M_2 + \lg |a_0|^{-1}, \lg (M_3 + 1) + \lg |a_0 - 1|^{-1} \}.$$

5. Es bleibt noch für die Konstanten M_1, m_1, M_2 und M_3 eine obere Grenze zu finden. Sie sind gleich dem maximalen absoluten Betrag der Funktionen $\lambda_1(t), \frac{1}{\lambda_1(t)}, \lambda_2(t)$ und $\lambda_3(t)$ auf der Strecke $J(t) = 1, 0 \leq R(t) \leq 1$. Alle diese Funktionen haben im Punkte $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ den Wert $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ oder $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$.⁷⁾ Setzen wir in

$$t = \frac{z \overline{\nu_1(a_0)} - \nu_1(a_0)}{z - 1}$$

$\nu_1(a_0) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, so wird der Kreis $|z| = 2 - \sqrt{3}$ der z -Ebene auf den Kreis $|t - (\frac{1}{2} + i)| = \frac{1}{2}$ der t -Ebene abgebildet, wobei der Nullpunkt in den Punkt $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ übergeht. Da die Strecke $J(t) = 1, 0 \leq R(t) \leq 1$ im Bildkreis enthalten ist, so sind die Konstanten M_1, m_1, M_2 und M_3 nach Nr. 2 kleiner gleich $\mathfrak{M}(2 - \sqrt{3}, \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3})$.

6. Um von dieser Konstanten eine obere Grenze zu finden, verfahren wir nach einer Methode von Ostrowski⁸⁾, die wir jedoch ganz auf den vorliegenden Spezialfall zuschneiden wollen. Sie stützt sich wesentlich auf die Borel-Hadamard'sche Ungleichung⁸⁾:

Für eine im Kreise $|z| < r$ reguläre und von 0 verschiedene Funktion $f(z)$, die dort überall absolut $\leq M$, gilt

$$(25) \quad \left| \frac{f(o)}{f(z)} \right| \leq \left(\frac{M}{|f(o)|} \right)^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}}, \quad o < |z| = \varrho < r.$$

Sei nun $f(z)$ für $|z| \leq 1$ regulär, von 0 und 1 verschieden und $f(0) = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$; es genügt dann auch $\frac{1}{f(z)}$ diesen Voraussetzungen. Wir setzen

$$(26) \quad \begin{aligned} \underset{|z| \leq r}{\text{Max}} |f(z)| &= M(r), \quad \underset{|z| \leq r}{\text{Max}} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = m(r) \\ \text{Max} (e^5, M(r)) &= \overline{M}(r), \quad \text{Max} (e^5, m(r)) = \overline{m}(r). \end{aligned}$$

⁷⁾ Vergleiche L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. 2, 1931, Seiten 97—103.

⁸⁾ Vergleiche Anmerkung 3.

Hilfssatz: Für $0 < \varrho < r < 1$ gilt

$$\text{I. } \bar{m}(\varrho) \leqslant \operatorname{Max} \left\{ e^5 ; 10102 \left(3,72 \lg \bar{M}(r) \right)^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}} \cdot (0,9568)^{\frac{r+\varrho}{r-\varrho}} \right\}$$

$$\text{II. } \bar{M}(\varrho) \leqslant \operatorname{Max} \left\{ e^5 ; 1,0102 \left(3,72 \lg \bar{m}(r) \right)^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}} \cdot (0.9568)^{\frac{r+\varrho}{r-\varrho}} \right\}.$$

Beweis: Wegen der Symmetrie der Voraussetzungen und Behauptungen in bezug auf die Vertauschung von f und $\frac{1}{f}$, genügt es I zu beweisen. Man kann beim Beweis $m(\varrho) = \bar{m}(\varrho) > e^5$ annehmen, da sonst I trivial wäre. Es sei etwa für $|z_0| = \varrho$ $|f(z_0)| = \frac{1}{\bar{m}(\varrho)} < e^{-5}$. Wir bilden die Hilfsfunktion $f^*(z) = p(1 - (1 - f(z))^{1/p})$, $p = \lg \bar{M}(r)$, wo der in der Umgebung von z_0 durch die Entwicklung

$$(27) \quad f^*(z) = f(z) + \frac{1 - 1/p}{2!} f^2(z) + \frac{(1 - 1/p)(2 - 1/p)}{3!} f^3(z) + \dots$$

definierte Zweig zu nehmen und wegen (26) $p = \lg \bar{M}(r) \geqslant 5$ ist. Da für $|a| < e^{-5}$

$$|a + \frac{1 - 1/p}{2!} a^2 + \frac{(1 - 1/p)(2 - 1/p)}{3!} a^3 + \dots| \leqslant$$

$$|a|(1 + |a| + |a|^2 + \dots) < \frac{|a|}{1 - |a|} < \frac{|a|}{1 - e^{-5}} < 1,0102 \cdot |a|$$

ist, liefert die Entwicklung (27) für $|f(z)| = \frac{1}{\bar{m}(\varrho)} < e^{-5}$

$$(28) \quad \begin{aligned} \bar{m}(\varrho) &< \frac{1,0102}{|f^*(z_0)|} \leqslant 1,0102 \operatorname{Max}_{|z|=\varrho} \left| \frac{1}{f^*(z)} \right| = 1,0102 \cdot m^*(\varrho), \\ m^*(\varrho) &> \frac{\bar{m}(\varrho)}{1,0102}, \end{aligned}$$

wobei $m^*(\varrho)$, $M^*(\varrho)$ bei $f^*(z)$ den Größen $m(\varrho)$, $M(\varrho)$ bei $f(z)$ entsprechen sollen. Ebenso folgt leicht

(29)

$$\begin{aligned} M^*(r) &\leqslant p \left(1 + (1 + \bar{M}(r))^{\frac{1}{p}} \right) \leqslant \lg \bar{M}(r) \left(1 + (1 + e^5)^{\frac{1}{5}} \right) < 3,72 \lg \bar{M}(r), \\ M^*(r) &< 3,72 \lg \bar{M}(r). \end{aligned}$$

Endlich ist wegen

$$f(0) = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} |f^*(0)| &= \left| p \left(1 - \left(\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2}\sqrt{3} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \right| = 2p \sin \frac{\pi}{6p} > 10 \sin \frac{\pi}{30} > 1,0452, \\ (30) \quad &\left| \frac{1}{f^*(0)} \right| < 0,9568. \end{aligned}$$

Aus (28), (29), (30) und (25) angewandt auf $f^*(z)$ folgt dann

$$\begin{aligned} |f^*(0)| \cdot m^*(\varrho) &\leq \left(\frac{M^*(r)}{|f^*(0)|} \right)^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}}, \quad m^*(\varrho) \leq (M^*(r))^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}} \cdot \left| \frac{1}{f^*(0)} \right|^{\frac{r+\varrho}{r-\varrho}}, \\ \frac{\bar{m}(\varrho)}{1,0102} &\leq (3,72 \cdot \lg \bar{M}(r))^{\frac{2\varrho}{r-\varrho}} \cdot (0,9568)^{\frac{r+\varrho}{r-\varrho}}, \end{aligned}$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

7. Wir behaupten nun, daß

$$(31) \quad M(1-\vartheta) \leq e^{10 \frac{1}{\vartheta} \lg \frac{1}{\vartheta}}, \quad 0 < \vartheta \leq \frac{1}{10}$$

gilt. Denn wäre für ein ϑ mit $0 < \vartheta \leq \frac{1}{10}$ $M(1-\vartheta) > e^{10 \frac{1}{\vartheta} \lg \frac{1}{\vartheta}}$, so würde

aus II, wenn $\varrho = 1 - \vartheta$ und $r = 1 - \frac{\vartheta}{10}$ gesetzt wird, wegen $e^{10 \frac{1}{\vartheta} \lg \frac{1}{\vartheta}} > e^5$ folgen:

$$1,0102 \left(3,72 \cdot \lg \bar{m}(1 - \frac{\vartheta}{10}) \right)^{\frac{20}{\vartheta} \cdot \frac{1-\vartheta}{\vartheta}} \cdot (0,9568)^{\frac{10}{9\vartheta} \left(2 - \frac{11}{10} \vartheta \right)} > e^{10 \frac{1}{\vartheta} \lg \frac{1}{\vartheta}}$$

oder

$$\left(1,0102 \cdot 3,72 \cdot 0,9568 \cdot \lg \bar{m}(1 - \frac{\vartheta}{10}) \right)^{\frac{20}{9\vartheta}} > e^{10 \frac{1}{\vartheta} \lg \frac{1}{\vartheta}}$$

oder

$$\lg \bar{m}(1 - \frac{\vartheta}{10}) > 0,2781 \cdot e^{4,5 \lg \frac{1}{\vartheta}}.$$

Da aber $\left(\frac{1}{\vartheta} \right)^2 \geq 0,217 \cdot \frac{10}{\vartheta} \lg \frac{10}{\vartheta}$ für $0 < \vartheta \leq \frac{1}{10}$, so folgt

$$\lg \bar{m}(1 - \frac{\vartheta}{10}) > 0,06 \cdot e^{2,5 \lg 10} \cdot \frac{10}{\vartheta} \lg \frac{10}{\vartheta} > 10 \frac{10}{\vartheta} \lg \frac{10}{\vartheta}.$$

Wegen der Symmetrie der Formeln I und II in bezug auf M und m ergibt

sich hieraus weiter $M\left(1 - \frac{\vartheta}{100}\right) > e^{10 \cdot \frac{100}{\vartheta} \lg \frac{100}{\vartheta}}$ und daher allgemein

$$M\left(1 - \frac{\vartheta}{100^n}\right) > e^{10 \cdot \frac{100^n}{\vartheta} \lg \frac{100^n}{\vartheta}},$$

so daß $M\left(1 - \frac{\vartheta}{100^n}\right) \rightarrow \infty$, wenn $n \rightarrow \infty$, während $M(r)$ für $0 < r \leq 1$ stetig ist. Damit ist (31) bewiesen.

Um $M(1 - \vartheta)$ für $0 < \vartheta \leq 1$ abzuschätzen, setzen wir wieder in II $\varrho = 1 - \vartheta$, $r = 1 - \frac{\vartheta}{10}$, so daß $\frac{\vartheta}{10} \leq \frac{1}{10}$ und deshalb für $m(r)$ wegen der Symmetrie unserer Annahmen über f und $\frac{1}{f}$ die Abschätzung (31) gilt. Es folgt

$$M(1 - \vartheta) \leq \max\left\{e^5; 1,0102 \left(3,72 \cdot 10 \frac{10}{\vartheta} \lg \frac{10}{\vartheta}\right)^{20 \cdot \frac{1-\vartheta}{\vartheta}} \cdot (0,9568)^{\frac{10}{9\vartheta} \left(2 - \frac{11}{10}\vartheta\right)}\right\}.$$

Für $\vartheta = \sqrt[3]{3} - 1$ ist der zweite Ausdruck in der geschweiften Klammer $< e^{5,786}$ und deshalb $M(2 - \sqrt[3]{3}) < e^{5,786}$.

Dieses Resultat wurde hergeleitet unter der Annahme, daß $f(z)$ für $|z| \leq 1$ regulär sei. Ist über $f(z)$ nur bekannt, daß es in $|z| < 1$ regulär sei, so betrachte man $g(z) = f(rz)$ für $0 < r < 1$. Da für $g(z)$ im Kreise $|z| \leq 2 - \sqrt[3]{3}$ die obige Abschätzung gilt, so folgt durch den Grenzübergang $r \rightarrow 1$ dasselbe für $f(z)$. Es ist also $M(2 - \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt[3]{3}) < e^{5,786}$.

Setzen wir $r = 1 - \vartheta$, so gilt nach (24), (5) und Nr. 5 für alle Schottky'schen Funktionen $f(z)$ in dem Kreis $|z| \leq 1 - \vartheta$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(z)| &< e^{5,786 - \frac{\pi}{2} + [\pi + \lg(e^{5,786} + 1) + \max\{\lg|a_0|, \lg|a_0|^{-1}, \lg|a_0 - 1|^{-1}\}] \frac{2-\vartheta}{\vartheta}} \\ (32) \quad &< e^{4,2153 + [8,9376 + \max\{\lg|a_0|, \lg|a_0|^{-1}, \lg|a_0 - 1|^{-1}\}] \frac{2-\vartheta}{\vartheta}}. \end{aligned}$$

8. Setzen wir in (32) wieder $a_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$, so ist

$$\operatorname{Max}(\lg |a_0|, \lg |a_0|^{-1}, \lg |a_0 - 1|^{-1}) = 0.$$

Da ferner

$$7,6 \cdot \frac{1}{\vartheta} \lg \frac{1}{\vartheta} \geq 4,2153 + 8,9376 \frac{2-\vartheta}{\vartheta}$$

für $0 < \vartheta \leq \frac{1}{10}$, so erhalten wir folgende Verschärfung von (31)

$$(33) \quad \lg M(1-\vartheta) \leq 7,6 \cdot \frac{1}{\vartheta} \lg \frac{1}{\vartheta}, \quad 0 < \vartheta \leq \frac{1}{10}.$$

Daraus folgt aber weiter

$$M(1-\vartheta) \leq \operatorname{Max} \left\{ e^5; 1,0102 \left(3,72 \cdot 7,6 \cdot \frac{10}{\vartheta} \lg \frac{10}{\vartheta} \right)^{\frac{20}{9}} \cdot \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \cdot (0,9568)^{\frac{10}{9\vartheta} \left(2 - \frac{11}{10}\vartheta \right)} \right\}.$$

Für $\vartheta = \sqrt{3} - 1$ ist der zweite Ausdruck in der geschweiften Klammer $< e^{5,57}$ und somit $\operatorname{M}(2 - \sqrt{3}, \frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}) < e^{5,57}$. Analog wie (32) folgt weiter

$$|f(z)| < e^{4 + [8,73 + \operatorname{Max}\{\lg |a_0|, \lg |a_0|^{-1}, \lg |a_0 - 1|^{-1}\}]} \frac{2-\vartheta}{\vartheta}, \quad |z| \leq 1 - \vartheta.$$

Ist also $|a_0| > e$, so gilt

$$(34) \quad |f(z)| < e^{4 + (8,73 + \lg |a_0|)} \frac{2-\vartheta}{\vartheta}, \quad |z| \leq 1 - \vartheta.$$

Ist $e^{-1} < |a_0| < e$ und $|a_0 - 1|^{-1} < e$, so gilt

$$(35) \quad |f(z)| < e^{4 + (8,73 + 1)} \frac{2-\vartheta}{\vartheta}, \quad |z| \leq 1 - \vartheta.$$

Ist $|a_0| < e^{-1}$ und wird $f - 1 = \varphi$ gesetzt, so ist $e^{-1} \leq |\varphi(0)| \leq e$ und $|\varphi(0) - 1|^{-1} < e$. Es gilt also für φ die Abschätzung (35) und deshalb für f die Abschätzung

$$(36) \quad |f(z)| < 1 + |f(z) - 1| \leq e^{4 + (8,73 + 1)} \frac{2-\vartheta}{\vartheta} + 1, \quad |z| \leq 1 - \vartheta.$$

Ist $|a_0 - 1| < e^{-1}$ und wird $f - 1 = \psi$ gesetzt, so ist $|\psi(0)| < e^{-1}$. Es gilt also für ψ die Abschätzung (36) und deshalb für f die Abschätzung

$$(37) \quad |f(z)| \leqslant 1 + |f(z) - 1| \leqslant e^{\frac{4 + (8,73+1)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}{\vartheta}} + 2 < e^{\frac{4 + (8,74+1)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}{\vartheta}}.$$

(34), (35), (36) und (37) ergeben somit wegen $\lg m \geqslant 1$

$$|f(z)| < e^{\frac{4 + (8,74 + \lg m)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}{\vartheta}}, \quad |z| \leqslant 1 - \vartheta, \quad m = \text{Max}(e, |f(z)|),$$

woraus schließlich die gesuchten Abschätzungen folgen:

Ist $f(z)$ eine im Einheitskreise reguläre und von 0 und 1 verschiedene Funktion und wird $m = \text{Max}(e, |f(0)|)$ gesetzt, so gelten für $f(z)$ in dem Kreis $|z| \leqslant 1 - \vartheta$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |f(z)| &< e^{\frac{4 + (9 + \lg m)\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}{\vartheta}} \\ &< m^{\frac{4 + 10\frac{2-\vartheta}{\vartheta}}{\vartheta}} \\ &< m^{20\frac{1}{\vartheta}}. \end{aligned}$$

(Eingegangen den 18. September 1934.)