Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 7 (1934-1935)

Artikel: Weitere Untersuchungen über die kubische diophantische Gleichung z3 - y2 = D.

Autor: Brunner, Otto

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515585

Weitere Untersuchungen über die kubische diophantische Gleichung $z^3 - y^2 = D$

Von OTTO BRUNNER, Meilen

Einleitung

In seiner Arbeit „*Über kubische diophantische Gleichungen*“[1]) hat Herr *Fueter* ein von ihm gefundenes Kriterium für die rationalen Lösungen von $z^3 - y^2 = D$ [2]) veröffentlicht. Diese Untersuchungen sind von mir weitergeführt worden; im folgenden gebe ich die bis jetzt gefundenen Resultate wieder[3]).

In den Abschnitten I und II zeige ich, daß der Fueter'sche Satz auch gilt, wenn D gewisse ungerade Primfaktoren in gerader Anzahl enthält und wenn $D \equiv 5 \pmod 9$ ist.

Unter der Annahme einer Lösung wende ich im Abschnitt III den früheren Beweis auf Gleichungen $z^3 - y^2 = D$ an, deren D beliebige ungerade Primfaktoren in gerader Potenz besitzt, bzw. von den Inkongruenzen $D \not\equiv -1 \pmod 4$ und $D \not\equiv -4 \pmod{16}$ befreit ist. Auch zeige ich, was sich ergibt, wenn man in der vorliegenden Gleichung $D \equiv 1$ oder $\equiv 8 \pmod 9$ annimmt. Dadurch gelange ich zur Erfassung einer Menge neuer diophantischer Gleichungen, für die die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ durch 3 teilbar ist.

Während im vorigen Abschnitt der Zähler von z zu den ungeraden Primfaktoren, welche in D in gerader Potenz auftreten, teilerfremd, bzw. ungerade sein muss, beweise ich im IV. Abschnitt, unter der Voraussetzung, daß der Zähler von z jene Faktoren enthält, bezw. gerade ist ($D > 0$ und nicht durch 3 teilbar), ein neues Kriterium, welches dem im Abschnitt II angeführten vollkommen entspricht.

Ferner sei noch hervorgehoben, daß derjenige Teil von D, welcher keine quadratischen Teiler enthält, im folgenden mit D' bezeichnet wird. Es ist also

$$D = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot p_r^2 \cdot D',$$

[1]) Commentarii Mathematici Helvetici, Band II, Heft 1, Seite 69—89; künftig durch C. M. H. II, 1 abgekürzt.

[2]) Satz 4, S. 86.

[3]) Ausführliche Beweise zu den erwähnten Sätzen und weitere Einzelheiten finden sich in meiner Inaugural-Dissertation (erschienen im Sommer 1933 bei Gebr. Leemann & Co., Zürich), welche ich von jetzt an mit I. D. bezeichnen werde.

wo die p_i $(i = 1, 2, \ldots . r)$ sämtliche in D im Quadrat auftretenden Primfaktoren bedeuten.

I.

Wir setzen voraus, daß D, welches sonst alle Bedingungen des Satzes von Herrn Fueter erfüllen soll [$D > 0$, $D \equiv 7 \pmod 9$, $D \not\equiv -1 \pmod 4$, $D \not\equiv -4 \pmod{16}$], auch ungerade Primfaktoren p mit der Bedingung

$$\left(\frac{-D'}{p}\right) = -1$$

aufweist. Ordnen wir nun, wie beim Beweise des Fueterschen Kriteriums, einer vorhandenen Lösung y, z, t von $z^3 - y^2 = Dt^6$ [4]) die kubische Gleichung

$$u^3 - 3\,z\,u - 2\,y = 0 \tag{1}$$

mit der Lösung

$$u = \sqrt[3]{y + t^3\sqrt{-D}} + \sqrt[3]{y - t^3\sqrt{-D}}$$

zu, so sind (D ist auch hier nicht durch 3 teilbar) die beiden Fälle zu unterscheiden:

A. (1) ist in $k(\sqrt{3\,D})$ *irreduzibel*. Die Eigenschaft, daß $(y \pm t^3\sqrt{-D})$ je die dritte Potenz eines Ideals von $k(\sqrt{-D})$, welches nicht Hauptideal ist, darstellen, bleibt auch bei der erwähnten Annahme erhalten, weil p Primideal in $k(\sqrt{-D})$ und somit seinem konjugierten gleich ist. Da im übrigen der Beweis derselbe wie beim Satz von Fueter bleibt, ist demnach die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ durch 3 teilbar.

B. (1) ist in $k(\sqrt{3\,D})$ *reduzibel*. Im ganzen kann auch jetzt die ehemalige Beweisführung vollständig übertragen werden. Nur muß für den Nachweis, daß im irreduziblen Fall der Gleichung

$$v^3 - 3\,t_2\,v - 2\,r = 0$$

(welche der Beziehung (10)′ in C. M. H. II, 1, S. 84, zugeordnet wird), die Radikanden von v [5]) auch dritte Potenzen sind, p noch die Bedingung $\left(\frac{3\,D'}{p}\right) = -1$ [p dann Primideal in $k(\sqrt{3\,D})$] erfüllen, wegen der ähn-

[4]) In C. M. H. II, 1, S. 72/73, wird gezeigt, daß jeder Gleichung $z^3 - y^2 = D$ ($y, z =$ rationale Zahlen) eine andere umkehrbar eindeutig entspricht: $z^3 - y^2 = Dt^6$, wo y, z, t ganze rationale Zahlen sind.

[5]) C. M. H. II, 1, S. 84.

lichen Überlegung wie für $(y \pm t^3 \sqrt{-D})$ im Falle A). Insbesondere bleiben die Ausführungen über die Relativdiskriminante vom Wurzelkörper zu $k(\sqrt{-D})$ genau die gleichen. Folglich ist auch hier die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ durch drei teilbar.

Weil $\left(\frac{3D'}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right)\left(\frac{-D'}{p}\right)$, gilt also das Fuetersche Kriterium auch für ungerade p von D für die $\left(\frac{-D'}{p}\right) = -1$ und $\left(\frac{-3}{p}\right) = +1$ [6]. Demnach besitzt z. B.

$$z^3 - y^2 = 196 = 2^2 \cdot 7^2,$$

wo D alle verlangten Kongruenzen befriedigt, $\left(\frac{-D'}{p}\right) = -1$ und $\left(\frac{-3}{7}\right) = +1$, keine Lösung, da die Klassenzahl von $k(\sqrt{-2^2 \cdot 7^2})$ eins ist.

II.

Daß man das Theorem von Herrn Fueter, unter gleichen Bedingungen wie früher, auch auf den Fall

$$D \equiv 5 \pmod 9$$

ausdehnen kann [7], erkennt man folgendermaßen: Im irreduziblen Fall von (1) ändert sich der Beweis überhaupt nicht. Im reduziblen ist der allerwichtigste Schritt der, wieder nachzuweisen, daß sich zwei analoge widerspruchsvolle Kongruenzen wie in C. M. H. II, 1, S. 84 ergeben, die jetzt lauten:

$$\pm 1 \equiv 7 \pmod 9 \tag{2}$$
$$\pm 1 \equiv 5 \pmod 9, \tag{3}$$

woraus folgt, daß t im reduziblen Fall immer durch 3 teilbar sein muß. Demnach wird, weil im übrigen der Beweis der gleiche wie bei $D \equiv 7 \pmod 9$ bleibt, in jedem Fall h [8] $\equiv 0 \pmod 3$.

Beispiele hiefür sind:

$$9^3 - 25^2 = 104 = 2^2 \cdot 2 \cdot 13; \qquad h = 6;$$
$$27^3 - 137^2 = 914 = 2 \cdot 457; \qquad h = 36.$$

[6] I. D., S. 39—41.

[7] I. D., S. 41—44.

[8] Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$.

Dagegen gibt es keine Darstellung in rationalen y und z durch $z^3 - y^2 = D$ z. B. für die Zahlen: 5 ($h = 2$), 14 ($h = 4$), 32 ($h = 1$).

Infolge dieser beiden Erweiterungen nimmt das Kriterium von Herrn Fueter folgende Form an [9]):

Ist D eine von sechsten Potenzen freie, positive, ganze rationale Zahl, die nur diejenigen ungeraden Primfaktoren p in gerader Potenz enthält, für die

$$\left(\frac{-D'}{p}\right) = -1 \text{ und } \left(\frac{-3}{p}\right) = +1,$$

so besitzt die diophantische Gleichung

$$z^3 - y^2 = D$$

keine Lösung, falls

$$D \equiv 5 \text{ oder } \equiv 7 \pmod 9,\ D \not\equiv -1 \pmod 4,\ D \not\equiv -4 \pmod{16}$$

und die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ nicht durch drei teilbar ist.

III.

Einige unserer (lösbaren) diophantischen Gleichungen, wie z. B. $3^3 - 2^2 = 23$ [$D \equiv -1 \pmod 8$, $D \equiv 5 \pmod 9$, $h = 3$], welche sich nicht in das oben stehende Kriterium einordnen lassen, für die aber die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ trotzdem durch 3 teilbar ist, führen zum Versuch, den Beweis des Satzes von Herrn Fueter auch zur Erfassung dieser Fälle zu verwenden. Wir teilen die sich hieraus ergebenden Sätze, welche alle Lösungen von $z^3 - y^2 = Dt^6$ [4]) voraussetzen, am besten in zwei Gruppen ein.

a) *Spezialsätze für $D \equiv 5$ und $\equiv 7 \pmod 9$.* D enthalte jetzt beliebige ungerade Primteiler p, für die $\left(\frac{-D'}{p}\right) = 1$ oder $= -1$, bzw. D sei auch $\equiv -1 \pmod 4$ und $\equiv -4 \pmod{16}$. Dann lassen sich folgende zwei Kriterien formulieren:

Besitzt die diophantische Gleichung

$$z^3 - y^2 = Dt^6,$$

wobei D eine von sechsten Potenzen freie, positive, ganze rationale Zahl

[9]) I. D., S. 44. — Auf andere Kongruenzklassen von D den Beweis des Kriteriums in vollem Umfange auszudehnen, ist unmöglich.

bedeutet, eine Lösung, in der z zu denjenigen ungeraden Primfaktoren p in D teilerfremd ist, für die $\left(\frac{-D'}{p}\right) = 1$, *so muß, falls*

$$D \equiv 5 \text{ oder } \equiv 7 \pmod 9,\ D \not\equiv -1 \pmod 8,\ D \not\equiv -4 \pmod{32},$$

entweder die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ *oder t durch drei teilbar sein* [10].

Besitzt die diophantische Gleichung

$$z^3 - y^2 = Dt^6,$$

wobei D eine von sechsten Potenzen freie, positive, ganze rationale Zahl bedeutet, eine Lösung, in der z ungerade und zu denjenigen ungeraden Primfaktoren p in D teilerfremd ist, für die $\left(\frac{-D'}{p}\right) = 1$, *so muß, falls*

$$D \equiv 5 \text{ oder } \equiv 7 \pmod 9,$$

entweder die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ *oder t durch drei teilbar sein* [11].

Beim Beweise dieser Sätze ist im *irreduziblen* Fall von (1) darauf zu achten, daß, wegen der Annahme über z und nach der Beziehung

$$(y + t^3\sqrt{-D})\,(y - t^3\sqrt{-D}) = y^2 + t^6 D = z^3, \tag{4}$$

die Ideale $(y \pm t^3\sqrt{-D})$ keine Teiler ungerader Faktoren p von D, für die $\left(\frac{-D'}{p}\right) = 1$, bzw. keine geraden Teiler enthalten. Weil im übrigen alle Faktoren nach der ehemaligen Beweisführung zur dritten Potenz in obigen Idealen aufgehen, sind diese wieder dritte Potenzen von Idealen, welche keine Hauptideale darstellen. Folglich ist hier die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ auch durch 3 teilbar. — Hingegen läßt sich eine analoge Schlußweise im *reduziblen* Fall von (1) nicht durchführen, da man durch besondere Überlegungen einsieht, daß sich aus der Bedingung $z \not\equiv 0 \pmod p$, wobei es sich um eines der vorhin genannten p ($p = 2$ inbegriffen) handelt, nicht auch die Inkongruenz $t_2 \not\equiv 0 \pmod p$ [12] ergibt. Da

[10] vgl. I. D., S 47, abgeänderter Satz 2.
[11] vgl I. D , S 48/49, erweiterter Satz 3.
[12] r, t_2, t_1 ist eine Lösung der Gleichung (10)' in C. M. H. II, 1, S. 84, welche der Lösung y, z, t unserer diophantischen Gleichung entspricht.

$$t_2^3 = r^2 - 3^3 D t_1^6 = (r + 3\, t_1^3 \sqrt{3\, D})\,(r - 3\, t_1^3 \sqrt{3\, D})\,^{13}),$$

könnten folglich die Hauptideale $(r \pm 3\, t_1^3 \sqrt{3\, D})$ [13]) keine dritten Potenzen von Idealen sein [14]), d. h. es könnte h nicht durch 3 teilbar werden. Hingegen ist man in diesem Falle sicher, daß, wegen den Inkongruenzen in C. M. H. II, 1, S. 84 und wegen (2) und (3), t durch 3 teilbar sein muß. Wenn also unter obigen Annahmen für eine unserer Gleichungen h zu 3 prim ist, so wird unbedingt $t \equiv 0 \pmod 3$ [15]) und umgekehrt. — Daß man im ersten der beiden Sätze nur die Inkongruenzen $D \not\equiv -1 \pmod 8$ und $D \not\equiv -4 \pmod{32}$ beibehält, beruht darauf, daß nach obigem der Nachweis, daß $(r \pm 3\, t_1^3 \sqrt{3\, D})$ dritte Potenzen sind, ausfällt. Im zweiten Satz kann man, aus demselben Grunde und weil die Behandlung des Falles, z gerade, gar nicht eintritt (vgl. C. M. H. II, 1, S. 83), diese Beziehungen überhaupt weglassen.

Folgerung: Haben wir ganzzahlige Lösungen ($t = 1$) von $z^3 - y^2 = D$ mit den Bedingungen der soeben bewiesenen Sätze vor uns, so muß unbedingt h durch 3 teilbar sein, weil (1) dann auf alle Fälle irreduzibel ist. Demnach enthält z. B. der erste Satz die Gleichung

$$9^3 - 2^2 = 725 = 5^2 \cdot 29,$$

$$\text{da } \left(\frac{-29}{5}\right) = 1, \quad z \not\equiv 0 \pmod 5 \text{ und } h = 6;$$

der zweite z. B.

$$35^3 - 206^2 = 439,$$

$$\text{da } D \equiv -1 \pmod 8, \quad z \text{ ungerade und } h = 15.$$

Beide Gleichungen können im Kriterium auf S. 70 nicht untergeordnet werden.

Man kann noch mehr Sätze solcher Art bilden [16]); sie sind aber eigentlich alle in den vorhin angeführten vorhanden.

b) *Spezialsätze für $D \equiv 1$ und $\equiv 8$ (mod 9).* Die Untersuchung, ob sich der Beweis von Fueter auch auf andere Kongruenzklassen von D ausdehnen läßt, führt uns zur folgenden Eigenschaft:

---

[13]) C. M. H. II, 1, S. 84/85.

[14]) siehe Abschnitt IV.

[15]) Wäre nämlich t zu 3 teilerfremd, so würde der irreduzible Fall von (1) eintreten, in welchem h immer durch 3 teilbar ist.

[16]) I. D., S. 47 und S. 49/50.

Besitzt die diophantische Gleichung

$$z^3 - y^2 = Dt^6,$$

wobei D eine von sechsten Potenzen freie, positive, ganze rationale Zahl bedeutet und nur diejenigen ungeraden Primfaktoren p in gerader Potenz enthält, für die $\left(\frac{-D'}{p}\right) = -1$ und $\left(\frac{-3}{p}\right) = +1$, *eine Lösung, so muß, falls*

$$D \equiv 1 \text{ oder } \equiv 8 \ (\mathrm{mod}\ 9),\ D \not\equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ 4),\ D \not\equiv -4 \ (\mathrm{mod}\ 16),$$

entweder die Klassenzahl von $k(\sqrt{-D})$ durch 3 oder y durch 9 teilbar sein [17]).

Beweis: Auch hier haben wir, weil D nicht durch 3 teilbar ist, nur die beiden gewohnten Fälle für die kubische Gleichung (1) zu unterscheiden. Während die Ausführungen im irreduziblen Fall derselben vollständig gleich wie früher bleiben, nimmt der Nachweis im reduziblen Fall eine etwas veränderte Form an. Denn, unterscheiden wir wie beim Beweise von Fueter die beiden Fälle in C. M. H. II, 1 auf S. 84, so finden wir, wenn t zu 3 teilerfremd ist, daß sich nur diejenige Kongruenz für $r \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)$ als widerspruchsvoll zeigt [$\pm 1 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 9)$ [18]), bzw. $\equiv 4 \ (\mathrm{mod}\ 9)$ [19])], während die andere Kongruenz (für r durch 3 teilbar) sehr wohl bestehen kann [$\pm 1 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 9)$ [18]), bzw. $\equiv 8 \ (\mathrm{mod}\ 9)$ [19])]. Also darf jetzt im reduziblen Fall t auch zu 3 prim sein, d. h. h von $k(\sqrt{-D})$ könnte unter Umständen ebenfalls diese Eigenschaft besitzen. Doch ist dies, wegen der Beziehung

$$n^3 y = r^3 - 3 r s^2 D \text{ [20])}$$

(r durch 3 teilbar), nur dann möglich, wenn y den Faktor 9 enthält. Wird demnach y nicht durch 9 teilbar, so ist im reduziblen Fall von (1) wie früher t immer $\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)$. Hier läßt sich aber in gewohnter Weise feststellen, daß h in jedem Falle durch 3 teilbar ist. Dabei muß man beachten, daß, falls v einer in $k(\sqrt{-D})$ reduziblen Gleichung genügt [21]), falls sich also die bisherige Beweisführung wiederholt, auch das neue y, d. h. r_1 zu 9 teilerfremd ist, wie man leicht einsieht. — Damit ist unser neues Kriterium

---

[17]) vgl. I. D., S. 51, abgeänderter Satz 5.

[18]) wenn $D \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 9)$.

[19]) wenn $D \equiv 8 \ (\mathrm{mod}\ 9)$.

[20]) Sie ergibt sich aus

$$y + t^3 \sqrt{-D} = \frac{1}{n^3} (r + s \sqrt{-D})^3$$

(C. M. H. II, 1, S. 83; n nicht durch 3 teilbar).

[21]) C. M. H. II, 1, S. 85/86.

vollständig nachgewiesen, denn h von $k\,(\sqrt{-D})$ kann nach obigem nur dann zu 3 prim werden, wenn y durch 9 teilbar ist und umgekehrt.

Beispiele:

$5^3 - 4^2 = 109,$	$D \equiv 1 \pmod 9,$	$h = 6,$	$y \not\equiv 0 \pmod 9;$
$3^3 - 1^2 = 26,$	$D \equiv 8 \pmod 9,$	$h = 6,$	$y \not\equiv 0 \pmod 9;$
$29^3 - 153^2 = 980,$	$D \equiv 8 \pmod 9,$	$h = 2,$	$y \equiv 0 \pmod 9;$
$34^3 - 198^2 = 100,$	$D \equiv 1 \pmod 9,$	$h = 1,$	$y \equiv 0 \pmod 9.$

Aus diesem Spezialsatz gewinnt man ebenfalls analoge Kriterien wie die unter a) genannten. Wesentlich ist jedoch, daß jetzt bei allen die Bedingung hinzutritt, daß, falls $D \equiv 1$ oder $\equiv 8 \pmod 9$ usw., entweder y durch 9 oder die Klassenzahl von $k\,(\sqrt{-D})$ oder t durch 3 teilbar sein muß.

IV.

Der Vollständigkeit halber soll noch untersucht werden, was geschieht wenn in einer vorhandenen Lösung unserer Gleichung z durch irgendwelche *ungeraden* Faktoren p, die in D *in gerader Potenz* enthalten sind, bzw. durch die diesen p *entsprechenden Faktoren* 2 *teilbar* ist.

1. Zunächst konstatieren wir, daß bei solchen Lösungen die *Hauptideale* $(y \pm t^3 \sqrt{-D})$ *niemals 3. Potenzen* von Idealen in $k\,(\sqrt{-D})$ sind[22]. Die Einsicht dieser Eigenschaft ist unabhängig von der Unterscheidung der beiden bekannten Fälle für Gleichung (1), weshalb wir hier D ganz beliebig (auch durch 3 teilbar) annehmen dürfen; sie ergibt sich hauptsächlich durch die Betrachtung der früher erwähnten Beziehung (4).

A. *Ist p ein ungerader Faktor von z*, so sind zwei Bedingungen auseinander zu halten:

$$\text{a)}\ \underline{\left(\frac{-D'}{\mathrm{p}}\right) = +1}$$

Dann zerfällt p in $k\,(\sqrt{-D})$ in zwei verschiedene, zueinander konjugierte Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$. Weil nach unseren Annahmen die Gleichung (4) entweder zu

$$p^{3n} \cdot z_1^3 = p \cdot p\,(y_1 + t^3 \sqrt{-D_1})\,(y_1 - t^3 \sqrt{-D_1}),$$

falls $D = p^2 D_1$, $z = p^n z_1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $y = p \cdot y_1$ $[y_1 \not\equiv 0 \pmod p]$, oder zu

[22]) I. D., S. 57, Satz 1 und S. 61, Satz 2.

$$p^{3n} \cdot z_1{}^3 = p^2 \cdot p^2 \, (y_1 + t^3 \sqrt{-D_1}) \, (y_1 - t^3 \sqrt{-D_1}),$$

falls $D = p^4 D_1$, $z = p^n z_1$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, $y = p^2 \cdot y_1$ $[y_1 \not\equiv 0 \pmod{p}]$, wird, stellen wir fest, daß das Produkt $(y_1 + t^3 \sqrt{-D_1}) \cdot (y_1 - t^3 \sqrt{-D_1})$ durch p^{3n-2} bzw. p^{3n-4} teilbar sein muß. Daraus folgt, daß $y_1 + t^3 \sqrt{-D_1}$ $\mathfrak{p}^{3n-2}$ bzw. $\mathfrak{p}^{3n-4}$, und $y_1 - t^3 \sqrt{-D_1}$ $\mathfrak{p}'^{3n-2}$ bzw. $\mathfrak{p}'^{3n-4}$ zur höchsten Potenz enthalten [eine andere Verteilung von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ ist wegen $y_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ unmöglich]. Also wird z. B.

$$y + t^3 \sqrt{-D} = p \, (y_1 + t^3 \sqrt{-D_1}) = \mathfrak{p}^{3n-1} \cdot \mathfrak{p}' \,\ldots\ldots,$$

bzw. $$y + t^3 \sqrt{-D} = p^2 \, (y_1 + t^3 \sqrt{-D_1}) = \mathfrak{p}^{3n-2} \cdot \mathfrak{p}'^2 \,\ldots\ldots,$$

womit wir unsere Behauptung schon allgemein für die ungeraden p bestätigt haben. Ist nämlich

$$\text{b)} \; \underline{\left(\frac{-D'}{\mathfrak{p}}\right) = -1,}$$

so kann z kein solches p besitzen, da sonstdie obige Überlegung ergäbe [p ist jetzt Primideal in $k(\sqrt{-D})$], daß sowohl $y_1 + t^3 \sqrt{-D_1}$, wie $y_1 - t^3 \sqrt{-D_1}$ und demnach auch y_1 durch p teibar wäre.

B. *Ist z gerade,* so sind die Hauptideale $(y \pm t^3 \sqrt{-D})$ nur dann keine dritten Potenzen, a) wenn y ungerade oder b) wenn y gerade und $D = 2^2 D_1$ $[D_1 \equiv -1 \pmod 4]$. Im ersten Fall wird nämlich, da die genannten Ideale den Faktor 2 enthalten, die Gleichung (4) zu

$$2^{3n} z_1{}^3 = 2 \cdot 2 \left(\frac{y}{2} + \frac{t^3}{2} \sqrt{-D}\right) \left(\frac{y}{2} - \frac{t^3}{2} \sqrt{-D}\right),$$

wo $2^n \cdot z_1 = z$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und die zwei letzten Faktoren ganze algebraische Zahlen sind. Weil nach C. M. H. II, 1, S. 83, sogar $D \equiv -1 \pmod 8$, zerfällt 2 in zwei voneinander verschiedene Primideale $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ in $k(\sqrt{-D})$; also folgt wie bei A) z. B.

$$y + t^3 \sqrt{-D} = 2\left(\frac{y}{2} + \frac{t^3}{2} \sqrt{-D}\right) = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{p}^{3n-2} \ldots\ldots = \mathfrak{p}^{3n-1} \cdot \mathfrak{p}' \ldots$$

— Im zweiten Fall sind zwei Unterfälle zu unterscheiden: *a)* $D_1 \equiv -1 \pmod 8$. Da hier die Hauptideale unbedingt durch 4 teilbar sind, hat (4) das Aussehen:

$$2^{3n}\, z_1^3 = 2^2 \cdot 2^2 \left(\frac{y_1}{2} + \frac{t^3}{2}\sqrt{-D_1}\right)\left(\frac{y_1}{2} - \frac{t^3}{2}\sqrt{-D_1}\right),$$

wo $2^n z_1 = z$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ und $2\, y_1 = y$ (y_1 ungerade). Aus dem gleichen Grunde wie oben erhalten wir demnach z. B.

$$y + t^3 \sqrt{-D} = 2^2\left(\frac{y_1}{2} + \frac{t^3}{2}\sqrt{-D_1}\right) = \mathfrak{p}^2 \cdot \mathfrak{p}'^2 \cdot \mathfrak{p}^{3n-4} \ldots = \mathfrak{p}^{3n-2}\, \mathfrak{p}'^2 \ldots,$$

woraus sich wieder unsere Behauptung ergibt. Wird β) $D_1 \equiv -5 \pmod 8$, so ist 2 Primideal in $k\,(\sqrt{-D})$, d. h. dieser Fall tritt nicht ein [vgl. $\left(\frac{-D'}{p}\right) = -1$].

Hieraus erkennt man, daß die diesen Gleichungen entsprechenden Klassenzahlen von $k\,(\sqrt{-D})$ nicht durch 3 teilbar zu sein brauchen, wie auch aus nachstehenden Beispielen ersichtlich ist:

$$15^3 - 55^2 = 350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7,\ z \equiv 0 \pmod 5,\ h = 4,$$
$$(55 \pm 5\sqrt{-14}) \text{ keine 3. Potenzen.}$$

$$20^3 - 89^2 = 79,\ z \text{ gerade},\ y \text{ ungerade},\ h = 5,$$
$$(89 \pm \sqrt{-79}) \text{ keine 3. Potenzen.}$$

$$12^3 - 38^2 = 284 = 2^2 \cdot 71,\ z \text{ und } y \text{ gerade},\ h = 7,$$
$$(38 \pm 2\sqrt{-71}) \text{ keine 3. Potenzen.}$$

Hingegen ist diese Eigenschaft nicht unbedingt notwendig, wie folgende Gleichung zeigt:

$$10^3 - 15^2 = 775 = 5^2 \cdot 31,\ z \equiv 0 \pmod 5 \text{ und dennoch } h = 3.$$

Folgerung: Ist $D \equiv 5$ oder $\equiv 7 \pmod 9$, oder, falls y zu 9 teilerfremd, $D \equiv 1$ oder $\equiv 8 \pmod 9$, und h von $k\,(\sqrt{-D})$ nicht durch 3 teilbar, so stellen wir wegen obiger Eigenschaft von $y \pm t^3\sqrt{-D}$ fest, daß in jeder ganzzahligen Lösung von $z^3 - y^2 = D\, z$ durch mindestens einen der erwähnten ungeraden Primfaktoren p oder dann durch 2 teilbar sein muß [23]). Denn nach Abschnitt III wäre sonst $h \equiv 0 \pmod 3$.

[23]) I. D., S. 66, Satz 4. Vgl. insbesondere die Folgerung, S. 67.

Beispiele:

$$14^3 - 42^2 = 980 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2, \; h = 2, \; z \equiv 0 \pmod{7};$$

$$33^3 - 187^2 = 968 = 2^2 \cdot 2 \cdot 11^2, \; h = 1, \; z \equiv 0 \pmod{11}.$$

2. Um aus der unter 1. gewonnenen Aussage über $(y \pm t^3 \sqrt{-D})$ weitere Schlüsse zu ziehen, bauen wir jetzt Relativkörper auf. Zum Grundkörper $K(\sqrt{3D}, \sqrt{-3})$ adjungieren wir nämlich die dritte Wurzel aus $\mu = y + t^3 \sqrt{-D}$ bzw. $\mu = y - t^3 \sqrt{-D}$, wo D *zu 3 prim* angenommen werde. Auf die neuen Körper $K_1(\sqrt[3]{\mu}, \sqrt{3D}, \sqrt{-3})$ wenden wir Satz 6 der bekannten Arbeit von *Ph. Furtwängler:* „Über das Reziprozitätsgesetz der l. Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet“ [24]), an. Hierzu setzen wir $l = 3$. Als Primideal $\mathfrak{l}_1$, welches in μ nicht zur dritten Potenz aufgeht, dürfen wir die in 1. genannten $\mathfrak{p}$ wählen; denn sie genügen der Bedingung, daß sie zu 3 (D zu 3 teilerfremd), also ebenfalls zu $\mathfrak{l} = (1 - \zeta)$ [25]) prim sind. Folglich müssen die *Relativdiskriminanten* von K_1 zu K durch diese und damit auch *durch* sämtliche *Primfaktoren* p (2 inbegriffen), in denen die $\mathfrak{p}$ aufgehen, *teilbar* sein.

Wichtig für das Folgende ist, daß sich diese Teilbarkeitseigenschaft auch auf die Relativdiskriminante des Körpers $K_2(u, \sqrt{3D})$ in bezug auf $k(\sqrt{3D})$, wo u eine Wurzel der in $k(\sqrt{3D})$ irreduziblen (weil D nicht durch 3 teilbar) kubischen Gleichung (1) darstelle, ausdehnen läßt [26]). Dies gelingt mittelst einer analogen Betrachtung, wie sie beim Beweise des Kriteriums von Fueter im reduziblen Fall von (1) angewendet worden ist [27]).

3. Dieses neue Resultat führt uns zur Anwendung eines weiteren Theorems, das Herr *Fueter* in seiner Abhandlung: „Abelsche Gleichungen in quadratisch-imaginären Zahlkörpern“, veröffentlicht hat [28]). Wir setzen dazu wieder $l = 3$; ferner wählen wir als Grundkörper $k(\sqrt{3D})$ und als relativ-Abelschen Körper $K_2(u, \sqrt{3D})$. $\mathfrak{l}_1$ lassen wir ebenfalls die Primideale $\mathfrak{p}$ der Primfaktoren p ($\neq 3$) von 1. durchlaufen. Da diese $\mathfrak{p}$ wegen 2. in der Relativdiskriminante von K_2 zu k aufgehen, werden sie,

---

[24]) erschienen in den „Abhandlungen der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen. Math.-Phys. Klasse. Neue Folge. Bd. II, Nr. 3, Berlin 1902“.

[25]) $\mathfrak{l}$ ist bekanntlich im Körper der 3. Einheitswurzel $\left(\zeta = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)$ gleich $\sqrt{-3}$.

[26]) I. D., S. 72, Satz 6.

[27]) Näheres darüber in I. D., S. 22—28 und S. 70—72.

[28]) Mathematische Annalen, Bd. 75, S. 188.

nach der Theorie über den Zerfall von Primidealen in kubischen Körpern, in K_2 je die dritte Potenz eines Ideals. Also gilt, infolge des soeben erwähnten Satzes von Fueter, für jedes p die Kongruenz

$$p - \left(\frac{3D'}{p}\right)^{29)} \equiv 0 \pmod 3.$$

Damit sind wir zu dem in der Einleitung gewünschten wichtigen Kriterium für die in gerader Anzahl auftretenden ungeraden Primfaktoren p von D, bzw. für die ihnen entsprechenden Faktoren 2 gelangt:

Besitzt die diophantische Gleichung

$$z^3 - y^2 = Dt^6,$$

wobei D eine von sechsten Potenzen freie, positive, ganze rationale und zu 3 teilerfremde Zahl bedeutet, eine Lösung, in der entweder $z \equiv 0 \pmod{p_i}$, wo p_i irgendwelche ungeraden Primfaktoren durchläuft, die in D in gerader Anzahl aufgehen, oder in der, falls z gerade, y ungerade oder, falls z gerade, y gerade und $D = 2^2 \cdot D_1$ [$D_1 \equiv -1 \pmod 4$] ist, so gilt für jedes p_i bzw. für $p_i = 2$ die Bedingung

$$p_i - \left(\frac{3D'}{p_i}\right) \equiv 0 \pmod 3\,^{30)}.$$

Daran schließt sich der nachstehende *Zusatz,* der nur für ungerade p gilt[31]:

Besteht für eine ungerade Primzahl p, welche in D in gerader Potenz auftritt, die Beziehung

$$p - \left(\frac{3D'}{p}\right) \not\equiv 0 \pmod 3,$$

so ist in der Gleichung

$$z^3 - y^2 = Dt^6$$

z zu p teilerfremd[30].

Dieser erlaubt also sofort einzusehen, was für Primfaktoren z nicht besitzt.

Beispiele für die beiden Sätze:

1) $5^3 - 10^2 = 25 = 5^2$, $D \equiv 7 \pmod 9$, $p_i = 5$, $\left(\frac{3D'}{p_i}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = -1$;

$$p_i - \left(\frac{3D'}{p_i}\right) = 5 + 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

---

[29]) $d = 4 \cdot 3^3 \cdot t^6 \cdot 3D$: C. M. H. II, 1, S. 82.

[30]) I. D., S. 79.

[31]) Für $p = 2$ besteht immer die Kongruenz: $p - \left(\frac{3D}{p}\right) \equiv 0 \pmod 3$ (J. D., S. 80).

2) $31^3 - 171^2 = 550 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11$, $D \equiv 1 \pmod 9$, $p_i = 5, \left(\frac{3D'}{p_i}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) = 1$;

$$p_i - \left(\frac{3D'}{p_i}\right) = 5 - 1 \not\equiv 0 \pmod 3;$$

folglich kann z niemals 5 als Faktor enthalten.

Weil in diesem Kriterium Faktoren der Ringklassenanzahl zum Führer

$$f = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r \text{ [32]}$$

in $k(\sqrt{3\,D})$ auftreten, liegt die Vermutung nahe, nachzuweisen, daß auch diese Zahl durch 3 teilbar ist. Da wir jedoch in $k(\sqrt{3\,D})$ einen reellen Körper haben, ist dies nicht ohne weiteres zu entscheiden.

Immerhin haben wir nun, wenigstens falls $D \equiv 5$ oder $\equiv 7 \pmod 9$, für jede rationale Lösung y, z der diophantischen Gleichung $z^3 - y^2 = D$ eine *notwendige Lösungsbedingung* gefunden. — Beim Aufsuchen hinreichender Kriterien stößt man vorläufig auf noch nicht überwundene Schwierigkeiten. Doch ist z. B. für $D \equiv 7 \pmod 9$ empirisch einzusehen, daß der Satz von Herrn Fueter bis zu ca. $D = 200$ auch umgekehrt werden darf.

[32]) p_i, $i = 1, 2, \ldots r$, durchläuft die in diesem Abschnitt genannten Faktoren p.

(Eingegangen den 19. Juli 1934.)