

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 6 (1934)

**Artikel:** Sur l'unicité du développement d'une fonction en série de fonctions de Bessel.  
**Autor:** Junod, V.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-7581>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur l'unicité du développement d'une fonction en série de fonctions de Bessel

par V. JUNOD, Zurich

Le problème d'unicité pour les séries des fonctions de Bessel d'ordre zéro a déjà été traité par C. Arnold<sup>1)</sup> et M. Plancherel<sup>2)</sup>. Nous nous proposons, dans ce travail, de le traiter pour les séries de fonctions de Bessel d'ordre  $\nu \geq -\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire pour les séries de la forme:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n x)$$

où:

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left[ 1 - \frac{x^2}{2(2\nu+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)} - \dots \right].$$

$J_\nu(x)$  est une solution de l'équation différentielle de Bessel:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

$\lambda_n$  désigne la  $n^{\text{ème}}$  racine positive de l'équation:

$$(I) \quad \frac{x}{H} J_\nu'(x) + J_\nu(x) = 0.$$

$H$  est une constante.

Nous serons naturellement conduits à distinguer le cas particulier où  $H = \infty$ . Nous ne spécifierons rien tant que les propriétés dont nous aurons à parler seront communes aux deux cas.

Les formules:

$$\int_0^1 x J_\nu(\lambda_m x) J_\nu(\lambda_n x) dx = 0 \quad n \neq m$$

et

$$(2) \quad \int_0^1 x J_\nu^2(\lambda_n x) dx = \frac{(\lambda_n^2 - \nu^2) J_\nu^2(\lambda_n) + \lambda_n^2 J_\nu'^2(\lambda_n)}{2 \lambda_n^2} = \frac{1}{N_n}$$

<sup>1)</sup> Arnold: loc. cit.

<sup>2)</sup> Plancherel: loc. cit. 2.

montrent que les fonctions  $\sqrt{N_n} x J_\nu(\lambda_n x)$  forment un système de fonctions orthogonales, normées dans l'intervalle  $(0, 1)$ .

Nous appellerons conséquemment  $n^{\text{ième}}$  coefficient de Bessel d'une fonction  $f(x)$ ,  $x^{1+\nu} f(x)$  étant supposée intégrable, la quantité :

$$a_n = N_n \int_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx.$$

La série  $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n x)$ ,  $a_n$  ayant la valeur indiquée sera la série de Bessel de la fonction  $f(x)$ , et  $f(x)$  sa fonction génératrice.

Notons que le système orthogonal  $\sqrt{x} J_\nu(\lambda_n x)$  n'est pas fermé si  $H + \nu \leq 0$ . Pour le fermer il faut y adjoindre  $x^{\frac{1+\nu}{2}}$  lorsque  $H + \nu = 0$  et  $\sqrt{x} I_\nu(\lambda_0 x)$  si  $H + \nu < 0$ ,  $I_\nu(x)$  désignant la fonction  $e^{-1/2\nu\pi i} J_\nu(x e^{1/2\pi i})$  et  $\pm i\lambda_0$  les deux racines imaginaires que possède l'équation (1) dans ce cas.

Il sera donc nécessaire dans ces cas de faire précéder la série d'un terme initial, à savoir de :

$$C_1 x^\nu, \quad \text{si } H + \nu = 0,$$

de

$$C_2 I_\nu(\lambda_0 x), \quad \text{si } H + \nu < 0,$$

$C_1$  et  $C_2$  étant des constantes qui se déterminent comme les  $a_n$ .

Nous supposons dans notre travail que  $H + \nu > 0$ ; les autres cas ne nécessiteraient que des transformations insignifiantes que nous indiquerons en note.

*Remarques:* 1. Dans le cas particulier où  $H = \infty$ ,  $\frac{1}{N_n}$  prend la forme plus simple :

$$\frac{1}{N_n} = \frac{J_{\nu+1}^2(\lambda_n)}{2}.$$

2. Nous réserverons la dénomination : *série de Bessel* à une série possédant une fonction génératrice. Une série quelconque  $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n x)$  sera appelée *série de fonctions de Bessel*.

# Chapitre I

## § 1. Ordre de grandeur des coefficients de Bessel d'une fonction

*Théorème I: Si  $x^{1/2+s} f(x)$  est intégrable dans  $(0, 1)$  on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{1/2+s}} = 0$  ( $0 \leq s \leq \nu + \frac{1}{2}$ ;  $\nu \geq -\frac{1}{2}$ ).*

Pour la démonstration nous faisons intervenir la formule asymptotique :

$$(4) \quad J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[ x - \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right] + O \left( |x|^{-\frac{3}{2}} \right)$$

et la formule :

$$(5) \quad \frac{\lambda_n}{\pi} = \left( \frac{1}{2} \nu + \sigma_\nu + \frac{1}{4} \right) + n + \frac{\alpha(n)}{n}$$

où  $\sigma_\nu$  est un entier fixe et  $\alpha(n)$  de la forme:  $c + \frac{1}{n} \alpha_1(n)$ ,  $c$  étant une constante et  $\alpha_1(n)$  une fonction bornée de  $n$ .

Une conséquence immédiate de la formule (5) est que :

$$(6) \quad N_n = O(\lambda_n) = O(n).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} a_n &= N_n \int_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx \\ |a_n| &= O \left| \lambda_n \int_0^1 x f(x) J_\nu(\lambda_n x) dx \right| = \\ &= O \left| \lambda_n^{1/2+s} \int_0^1 x^{1/2+s} f(x) (\lambda_n x)^{1/2-s} J_\nu(\lambda_n x) dx \right| \end{aligned}$$

Le théorème sera évidemment démontré si nous arrivons à prouver que

$$J = \int_0^1 x^{1/2+s} f(x) (\lambda_n x)^{1/2-s} J_\nu(\lambda_n x) dx$$

tend vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

---

<sup>3)</sup> Watson: loc. cit. p. 77 et 597.



A cet effet posons  $\lambda_n x = \xi$ . Le facteur  $\xi^{1/2-s} J_\nu(\xi)$  reste borné autour de  $\xi = 0$  car  $J_\nu(\xi)$  se comporte comme  $\xi^\nu$  et  $s \leq \nu + \frac{1}{2}$ . Décomposons :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 x^{1/2+s} f(x) \xi^{1/2-s} J_\nu(\xi) dx \\ &= \int_0^\varepsilon \dots + \int_\varepsilon^1 \dots = J_1 + J_2 \end{aligned}$$

Il résulte de l'intégrabilité de  $x^{1/2+s} f(x)$  que  $J_1$  tend vers zéro avec  $\varepsilon$ , d'une façon plus précise : étant donné un  $\delta$  arbitrairement petit, nous pouvons déterminer un  $\varepsilon(\delta)$  tel que  $|J_1| < \delta$ . Quant à  $J_2$  le point 0 étant exclu de l'intervalle d'intégration, nous pourrions l'étudier en y remplaçant  $J_\nu(\xi)$  par la formule asymptotique (4), puisque  $\xi$  tend vers l'infini avec  $n$ . Le facteur de  $\cos \left[ \xi - \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right]$  étant intégrable, le lemme de Riemann-Lebesgue<sup>4)</sup> nous montrera que  $\lim_{n=\infty} J_2 = 0$ . Autrement dit, à partir d'une certaine valeur  $N(\varepsilon, \delta)$  nous aurons  $|J_2| < \delta$ , d'où :  $|J| < 2\delta$ . Indiquons quelques cas particuliers de ce théorème qui nous seront utiles dans la suite :

Prenant  $s = \frac{1}{2} + \nu$ , ou  $s = \frac{1}{2}$ ,  $\nu \geq 0$  ou  $s = 0$  nous obtenons :

Ia Si  $x^{1+\nu} f(x)$  est intégrable dans  $(0,1)$  on a :  $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{1+\nu}} = 0 \left( \nu \geq -\frac{1}{2} \right)$ .

Ib Si  $\nu \geq 0$  et si  $x^{1+\nu} f(x)$  est intégrable dans  $(0,1)$  on a :  $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .

Ic Si  $\sqrt{x} f(x)$  est intégrable dans  $(0,1)$  on a :  $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$ .

## § 2. Le paramètre généralisé de Beltrami sur le cône

Nous verrons plus loin que les fonctions  $J_\nu(x)$  sont en relation étroite avec le problème de l'intégration de l'équation  $\Delta u + \lambda^2 u = 0$  sur la surface du cône de révolution d'ouverture  $\frac{2\pi}{\nu}$ ,  $\Delta u$  désignant le paramètre de Beltrami du 2<sup>ème</sup> ordre de cette surface.

<sup>4)</sup> Lebesgue: Loc. cit. p. 61.

Se donner une fonction continue uniforme d'un point de la surface du cône de révolution d'ouverture  $\frac{2\pi}{\nu}$  revient, en développant la surface sur un plan et en introduisant des coordonnées polaires  $(r, \varphi)$  ayant comme pôle le point du plan correspondant au sommet du cône, à se donner une fonction continue  $f(r, \varphi)$  non nécessairement uniforme dans le plan, mais ayant relativement à  $\varphi$  la période  $\frac{2\pi}{\nu}$ . Le paramètre de Beltrami  $\Delta u$  sur le cône n'est autre que le laplacien dans le plan. Nous pourrions donc définir le paramètre généralisé de Beltrami sur le cône, en y transposant la définition du laplacien généralisé dans le plan.<sup>5)</sup> Soient  $(r, \varphi)$ ,  $(r', \varphi')$  deux points,  $\omega$  leur distance. Formons la différence :

$$(7) \quad \Delta_h f(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\omega=h} f(r', \varphi') ds' - f(r, \varphi)$$

entre la valeur moyenne de la fonction sur le cercle de centre  $(r, \varphi)$  et de rayon  $h$  et la valeur au centre. Dans cette expression  $ds'$  représente l'élément d'arc au point  $(r', \varphi')$  du cercle.

Les limites supérieures et inférieures du quotient  $\frac{4 \Delta_h f(r, \varphi)}{h^2}$  lorsque  $h$  tend vers zéro, seront des nombres finis ou infinis que nous appellerons les *paramètres généralisés supérieur et inférieur de Beltrami de  $f(r, \varphi)$* . Nous les désignerons par :

$$(8) \quad \begin{aligned} \overline{\Delta^*} f(r, \varphi) &= \overline{\lim}_{h=0} \frac{4 \Delta_h f(r, \varphi)}{h^2} \\ \underline{\Delta^*} f(r, \varphi) &= \lim_{h=0} \frac{4 \Delta_h f(r, \varphi)}{h^2} \end{aligned}$$

Dans le cas de leur égalité nous appellerons leur valeur commune « *paramètre généralisé de Beltrami* » de  $f(r, \varphi)$  et la désignerons par  $\Delta^* f(r, \varphi)$ . La raison de cette dénomination sera bientôt évidente. Considérons en particulier une fonction de la forme :  $f(r) \cdot \cos \nu \varphi$  nous avons :

$$\Delta_h (f(r) \cos \nu \varphi) = \frac{1}{2\pi h} \int_{\omega=h} f(r') \cos \nu \varphi' ds' - f(r) \cdot \cos \nu \varphi.$$

<sup>5)</sup> Plancherel 1 et 2.

Soient  $P$  le point de coordonnées  $(r, \varphi)$ , ou centre du cercle,  $P'$  celui de coordonnées  $(r', \varphi')$  et  $O$  le point correspondant au sommet du cône. Nous désignerons par  $\psi$  l'angle  $\varphi' - \varphi$  et par  $\delta$  l'angle formé par les deux directions  $\overrightarrow{OP}$  et  $\overrightarrow{PP'}$ . Nous aurons :

$$\Delta_h (f(r) \cos \nu \varphi) = \cos \nu \varphi \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r') \cos \nu \psi d\delta - f(r) \right] \\ - \frac{\sin \nu \varphi}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r') \sin \nu \psi d\delta.$$

La valeur de cette expression pour  $\varphi = 0$  sera ce que nous entendrons par  $\Delta_h f(r)$ , autrement dit :

$$(9) \quad \Delta_h f(r) = \left[ \Delta_h (f(r) \cos \nu \varphi) \right]_{\varphi=0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r') \cos \nu \psi d\delta - f(r).$$

Les limites supérieure et inférieure du quotient  $\frac{4 \Delta_h f(r)}{h^2}$  seront des nombres finis ou infinis que nous appellerons les *paramètres généralisés supérieur et inférieur de Beltrami* de  $f(r)$  et que nous désignerons par  $\overline{\Delta}^* f(r)$  et  $\underline{\Delta}^* f(r)$ . Dans le cas où ces limites sont égales leur valeur commune est le « *paramètre généralisé de Beltrami* » de  $f(r)$  que nous désignerons par  $\Delta^* f(r)$ .

Ces expressions joueront dans notre travail le rôle qu'ont joué la dérivée seconde généralisée et les paramètres généralisés de Beltrami sur la sphère dans l'étude des séries trigonométriques et des séries de polynômes de Legendre. L'analogie se montrera clairement dans les propriétés d'extremum de ce paramètre que nous indiquerons à la fin de ce paragraphe et dans les propriétés de convexité qui interviendront dans les premiers théorèmes du chapitre II.

*Théorème II: Si la fonction  $f(r, \varphi)$  possède une différentielle totale seconde au point  $(r_0, \varphi_0)$ ,  $\Delta^* f(r, \varphi)$  existe en ce point et y est égale au laplacien  $\Delta f(r, \varphi)$*

Supposons le cône développé et introduisons des coordonnées cartésiennes. Pour les points du cercle suivant lequel nous devons intégrer pour obtenir  $\Delta_h f(x, y)$  nous avons  $x - x_0 = h \cos \delta$ ,  $y - y_0 = h \sin \delta$

$h$  étant le rayon du cercle et  $\delta$  ayant la même signification que dans la formule 9. Dès lors :

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + h \left[ \cos \delta \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \delta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \\ & + \frac{h^2}{2!} \left[ \cos^2 \delta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2 \sin \delta \cos \delta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \sin^2 \delta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right] \\ & + h^2 \varepsilon \end{aligned}$$

où  $\varepsilon$  tend uniformément vers zéro avec  $h$ . Un calcul élémentaire fournit alors :

$$\Delta^* f(x_0, y_0) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]_{x_0, y_0}$$

ou en coordonnées polaires :

$$\Delta^* f(r, \varphi) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad \text{c. q. f. d.}$$

*Corollaire: En tout point  $r \neq 0$ , où  $f(r)$  possède une dérivée seconde,  $\Delta^* f(r)$  existe et est égal à :*

$$(10) \quad \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{v^2}{r^2} f.$$

### ***Application aux fonctions de Bessel***

Une transformation simple de l'équation différentielle de Bessel montre que :

$$(11) \quad \frac{d^2 J_v(\lambda r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d J_v(\lambda r)}{dr} - \frac{v^2}{r^2} J_v(\lambda r) = -\lambda^2 J_v(\lambda r)$$

d'où d'après le corollaire du théorème II

$$(11 \text{ bis}) \quad \Delta^* J_v(\lambda r) = -\lambda^2 J_v(\lambda r).$$

Nous pouvons obtenir ce résultat d'une manière différente qui nous fournira en même temps une formule nouvelle et très utile dans la suite en

remarquant que d'après la formule (11) la fonction  $u = J_\nu(\lambda r) \cos \nu \varphi$  est une solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0.$$

Par définition :

$$\Delta^* J_\nu(\lambda r) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 \Delta_h J_\nu(\lambda r)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 [\Delta_h (J_\nu(\lambda r) \cos \nu \varphi)]_{\varphi=0}}{h^2}$$

or :

$$\Delta_h [J_\nu(\lambda r) \cos \nu \varphi] = \frac{1}{2\pi h} \int_{\omega=h} J_\nu(\lambda r') \cos \nu \varphi' ds' - J_\nu(\lambda r) \cos \nu \varphi.$$

Une généralisation connue de la formule de la moyenne aux solutions de l'équation  $\Delta u + k^2 u = 0$ <sup>6)</sup> montre que le premier terme du second membre est égal à  $J_\nu(\lambda r) \cos \nu \varphi \cdot J_0(\lambda h)$ . Dès lors :

$$(12) \quad \begin{aligned} \Delta_h [J_\nu(\lambda r) \cos \nu \varphi] &= J_\nu(\lambda r) \cos \nu \varphi [J_0(\lambda h) - 1] \\ \Delta_h [J_\nu(\lambda r)] &= J_\nu(\lambda r) [J_0(\lambda h) - 1]. \end{aligned}$$

Par suite, puisque  $J_0(\lambda h) - 1 = -\frac{\lambda^2 h^2}{2!} + \dots$  nous retrouvons :

$$\Delta^* J_\nu(\lambda r) = -\lambda^2 J_\nu(\lambda r).$$

On établirait de même que

$$\Delta^* I_\nu(\lambda r) = \lambda^2 I_\nu(\lambda r)$$

formule qui sera utile dans le cas où dans l'équation (1)  $H + \nu$  serait négatif.

Des définitions données résulte que si  $f(r, \varphi)$  a un maximum au point  $(r_0, \varphi_0)$ ,  $\Delta_h f(r_0, \varphi_0)$  est pour  $h$  suffisamment petit  $\leq 0$ . (Il serait  $\geq 0$  dans le cas d'un minimum.) Si  $\Delta^* f(r_0, \varphi_0)$  existe, il sera  $\leq 0$  dans le cas du maximum,  $\geq 0$  dans le cas du minimum. Si nous savons de  $f(r)$  qu'elle passe par un maximum en un point  $r_1$ ,  $f(r) \cos \nu \varphi$  passera par un maximum en un point  $(r_1, 0)$  et nous pourrons assurer, d'après ce qui précède que  $\bar{\Delta}^* f(r) \leq 0$ . De même si  $f(r)$  est minimum en  $r_1$ ,  $\underline{\Delta}^* f(r_1) \geq 0$ .

<sup>6)</sup> voir p. ex. pour cette généralisation de la formule de la moyenne de Gauss: *F. Pockels: Ueber die partielle Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$*  (Teubner 1891) p. 217, formule 66.

### § 3. La série associée à la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu (\lambda_n r)$

Nous laissant guider par la définition de Riemann dans le cas des séries trigonométriques et par celle de M. Plancherel dans le cas des séries de polynômes de Legendre, nous définirons, à cause de l'équation (11 bis), comme série associée de :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu (\lambda_n r)$$

la série : 
$$F(r) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2} J_\nu (\lambda_n r)$$

si dans l'équation (1)  $H + \nu \geq 0$ .<sup>7)</sup>

Nous allons étudier les propriétés de cette série associée en faisant sur  $a_n$  les hypothèses :

1.  $\sum \frac{|a_n|}{n^{5/2}}$  converge

ou 2.  $\lim \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$ .

Pour  $r \neq 0$   $J_\nu (\lambda_n r)$  est de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ . Par conséquent si  $\sum \frac{|a_n|}{n^{5/2}}$  converge la série associée converge absolument pour  $0 < r \leq 1$ . La convergence est uniforme dans tout intervalle tel que  $0 < r_1 \leq r \leq 1$ .  $F(r)$  est donc continue pour  $0 < r \leq 1$ .

De plus :  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{N_n} \left[ \frac{a_n}{\lambda_n} \right]^2$  (voir pour  $\frac{1}{N_n}$  les formules (2)) converge puisque  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n^{5/2}}$  converge. D'après le théorème de Riesz-Fischer,  $\sqrt{r} F(r)$  est de carré sommable dans  $(0, 1)$  et :

$$\frac{1}{N_n} \int_0^1 r F(r) J_\nu (\lambda_n r) = - \frac{a_n}{\lambda_n^2}.$$

<sup>7)</sup> Dans le cas  $H + \nu < 0$  il faudrait prendre comme série associée

$$F(r) = \frac{c_2 I_\nu (\lambda_0 r)}{\lambda_0^2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n J_\nu (\lambda_n r)}{\lambda_n^2}$$

$c_2$  ayant la même signification qu'à la page 2.

La série associée est alors une série de Bessel (la somme est la fonction génératrice).

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$ , nous pouvons, pour  $\nu \geq 0$ , assurer encore la convergence de la série associée pour  $r = 0$  en nous basant sur ce que  $J_\nu(\lambda_n r)$  est bornée et de plus énoncer (quelque soit  $\nu$ ) le théorème suivant:

*Théorème III: Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$  et si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h [F(r)]}{h} = 0$  sauf peut-être pour  $r = 0$ , on a en tout point de convergence de  $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n r)$ :*

$$\Delta^* F(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n r).$$

A cause de l'uniformité de la convergence nous pouvons écrire:

$$\Delta_h F(r) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2} \Delta_h [J_\nu(\lambda_n r)],$$

ou d'après la formule (12):

$$\Delta_h F(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2} J_\nu(\lambda_n r) [1 - J_0(\lambda_n h)].$$

Nous devons montrer que pour  $r \neq 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n r) \frac{1 - J_0(\lambda_n h)}{\lambda_n^2 h} = 0$$

et que lorsque  $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n r)$  converge:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{n=\infty} 4 a_n J_\nu(\lambda_n r) \frac{1 - J_0(\lambda_n h)}{\lambda_n^2 h^2} = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n r).$$

En vertu de la formule (4) et de l'hypothèse  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$ ,  $a_n J_\nu(\lambda_n r)$  tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ .

Il nous suffira donc pour établir la première proposition de montrer que

$$R(h) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left| \frac{1 - J_0(\lambda_n h)}{\lambda_n^2 h} \right|$$

est une fonction bornée de  $h$  dans le voisinage de  $h = 0$ .

Pour la seconde, nous reconnaissons en appliquant au premier membre la transformation d'Abel qu'il suffit d'établir que :

$$S(h) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left| \frac{1 - J_0(\lambda_n h)}{\lambda_n^2 h^2} - \frac{1 - J_0(\lambda_{n+1} h)}{\lambda_{n+1}^2 h^2} \right|$$

est une fonction bornée de  $h$  dans le voisinage de  $h = 0$ .

Ces deux expressions sont les mêmes que celles qui se sont présentées dans l'étude des développements de fonctions en séries de fonctions de Bessel d'ordre zéro faite par M. Arnold. La seule différence est que, dans les calculs de M. Arnold,  $\lambda_n$  désigne les racines de  $J_0'(x) = 0$  au lieu de celles de l'équation (1). En réalité ces racines se répartissent, à peu de chose près, de la même manière. Nous pourrions répéter mot par mot les calculs de M. Arnold et c'est pourquoi nous nous permettons de renvoyer à sa thèse.

Le théorème précédent présente une analogie complète avec un théorème classique de Riemann sur les séries trigonométriques.

*Théorème IV: Soit  $a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) une suite quelconque de nombres tels que:  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|a_n|}{n^{5/2}}$  converge et soient  $S_n(r)$ ,  $\sigma_n(r)$ ,  $F(r)$  les fonctions:*

$$S_n(r) = \sum_{p=1}^{p=n} a_p J_v(\lambda_p r)$$

$$\sigma_n(r) = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}{n}$$

$$F(r) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2} J_v(\lambda_n r).$$



Il existe une constante  $M$  indépendante de  $r$ , telle que pour  $0 < r < 1$

$$|\underline{\Delta}^* F(r)| \leq M \overline{\lim}_{n=\infty} |\sigma_n(r)|$$

$$|\bar{\Delta}^* F(r)| \leq M \overline{\lim}_{n=\infty} |\sigma_n(r)|.$$

Nous pouvons nous borner à démontrer le théorème dans le cas où  $\overline{\lim}_{n=\infty} |\sigma_n(r)|$  est finie au point  $r$ .  $r$  étant intérieur à  $(0, 1)$  on peut prendre  $h$  assez petit pour que la série  $F(r)$  converge uniformément sur le petit cercle de rayon  $h$ , de centre  $(r, 0)$  et pouvoir intégrer terme à terme.

Nous aurons alors :

$$\Delta_h F(r) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2} \Delta_h J_v(\lambda_n r)$$

$$\begin{aligned} \frac{4 \Delta_h F(r)}{h^2} &= 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_v(\lambda_n r) \frac{1 - J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 h^2} = \\ &= 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n \sigma_n(r)}{h^2} \left[ \frac{1 - J_0(\lambda_n h)}{\lambda_n^2} - 2 \frac{1 - J_0(\lambda_{n+1} h)}{\lambda_{n+1}^2} + \frac{1 - J_0(\lambda_{n+2} h)}{\lambda_{n+2}^2} \right]. \end{aligned}$$

Décomposons la somme au second membre en :

$$\sum_{n=1}^{n=m} \dots + \sum_{n=m+1}^{n=\infty} \dots$$

Lorsque  $h$  tend vers zéro l'expression

$$t_n(h) = \frac{1 - J_0(\lambda_n h)}{\lambda_n^2 h^2} - 2 \frac{1 - J_0(\lambda_{n+1} h)}{\lambda_{n+1}^2 h^2} + \frac{1 - J_0(\lambda_{n+2} h)}{\lambda_{n+2}^2 h^2}$$

tend vers zéro et pour  $m$  fixe la première somme tend vers zéro. Nous avons par conséquent quelque soit  $m$  :

$$\underline{\Delta}^* F(r) = \lim_{h=0} \sum_{n=m+1}^{\infty} n \sigma_n(r) t_n(h)$$

(ainsi qu'une même relation pour  $\bar{\Delta}^* F(r)$  avec  $\overline{\lim}$  au second membre.)  
Tout revient à montrer que l'expression

$$T(h) = \sum_{n=1}^{\infty} n |t_n(h)|$$

est une fonction bornée dans  $0 < h \leq 1$ , car si  $M$  est la borne supérieure de cette fonction dans  $0 < h \leq 1$ ,  $m$  pouvant être pris aussi grand qu'on le veut, on aura :

$$|\underline{\Delta}^* F(r)| \leq M \overline{\lim}_{n=\infty} |\sigma_n(r)|$$

et pareillement

$$|\overline{\Delta}^* F(r)| \leq M \overline{\lim}_{n=\infty} |\sigma_n(r)|$$

ce qui démontre le théorème.

### **Etude de $T(h)$**

L'étude de  $T(h)$  ne présente des difficultés qu'au voisinage de  $h = 0$ ; nous allons maintenant montrer que cette fonction reste bornée pour les petites valeurs de  $h$ .

Nous nous appuierons constamment dans cette étude sur des propriétés des racines  $\lambda_n$  de l'équation (1). Toutes ces propriétés se déduisent immédiatement de la formule asymptotique de  $\lambda_n$  (formule 5).

Nous allons d'abord nous demander quand le signe « valeur absolue » qui figure dans la somme définissant  $T(h)$  est superflu. Rappelons à cet effet, qu'on appelle dérivée seconde généralisée d'une fonction  $f(x)$  la limite pour  $\alpha = 0$  du rapport :

$$\frac{\Delta^2 f}{\alpha^2} = \frac{f(x + \alpha) + f(x - \alpha) - 2f(x)}{\alpha^2}$$

toutes les fois qu'elle existe. Quand la dérivée seconde ordinaire existe, la dérivée seconde généralisée existe et lui est égale. De plus  $x - \alpha$ ,  $x + \alpha$  étant supposés contenus dans un intervalle où la dérivée seconde généralisée  $\varphi$  existe, le rapport  $\frac{\Delta^2 f}{\alpha^2}$  est compris entre les limites inférieure et supérieure de  $\varphi$  dans cet intervalle.

$t_n(h)$  peut s'écrire :

$$\left[ \frac{1 - J_0(\lambda_n h)}{\lambda_n^2 h^2} - 2 \frac{1 - J_0\left(\frac{\lambda_n + \lambda_{n+2}}{2} h\right)}{\left(\frac{\lambda_n + \lambda_{n+2}}{2}\right)^2 h^2} - \frac{1 - J_0(\lambda_{n+2} h)}{\lambda_{n+2}^2 h^2} \right] \\ + 2 \left[ \frac{1 - J_0\left(\frac{\lambda_n + \lambda_{n+2}}{2} h\right)}{\left(\frac{\lambda_n + \lambda_{n+2}}{2}\right)^2 h^2} - \frac{1 - J_0(\lambda_{n+1} h)}{\lambda_{n+1}^2 h^2} \right].$$

Le premier crochet n'étant autre que  $\Delta^2 \left( \frac{1 - J_0(x)}{x^2} \right)$ , le second qu'un accroissement ordinaire de la même fonction, nous pouvons assurer d'après ce qui précède que le signe « valeur absolue » est superflu sitôt que  $\lambda_n h$ ,  $\lambda_{n+1} h$ ,  $\lambda_{n+2} h$ , et par conséquent  $\frac{\lambda_n + \lambda_{n+2}}{2} h$ , sont contenus dans un intervalle où :

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1 - J_0(x)}{x^2} \right) \text{ et } \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1 - J_0(x)}{x^2} \right)$$

ont un même signe constant. Or,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1 - J_0(x)}{x^2} \right) = \frac{-2x}{2^2 4^2} \left[ 1 - \frac{4x^2}{2 \cdot 6^2} + \frac{6x^4}{2 \cdot 6^2 8^2} - \dots \right]$$

est certainement négatif pour  $0 < x < \sqrt{12}$  et

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1 - J_0(x)}{x^2} \right) = \frac{-2}{2^2 4^2} \left[ 1 - \frac{3 \cdot 4 x^2}{2 \cdot 6^2} + \frac{5 \cdot 6 x^4}{2 \cdot 6^2 8^2} - \dots \right]$$

l'est certainement aussi pour  $0 \leq x \leq \sqrt{6}$ ; à fortiori, tant que  $\lambda_{n+2} h \leq 1$ , les termes de notre série seront négatifs et le signe « valeur absolue » sera superflu.

Soit, pour une valeur fixe de  $h$ ,  $p(h)$  le nombre entier tel que :

$$\lambda_{p+2} \leq \frac{1}{h} < \lambda_{p+3}.$$

De ces inégalités et de la formule (5) résulte, d'une part que le produit  $hp$  est borné, d'autre part qu'il est supérieur à une constante positive.

Décomposons :

$$\Gamma(h) = \sum_{n=1}^{n=\infty} n |t_n(h)| = \sum_{n=1}^{n=p} n |t_n(h)| + \sum_{n=p+1}^{n=\infty} n |t_n(h)|$$

nous aurons :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=1}^{n=p} n |t_n(h)| = - \sum_{n=1}^{n=p} n t_n(h) = \\ &= p \left[ \frac{1 - J_0(\lambda_{p+1} h)}{\lambda_{p+1}^2 h^2} - \frac{1 - J_0(\lambda_{p+2} h)}{\lambda_{p+2}^2 h^2} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{1 - J_0(\lambda_1 h)}{\lambda_1^2 h^2} - \frac{1 - J_0(\lambda_{p+1} h)}{\lambda_{p+1}^2 h^2} \right] \end{aligned}$$

où la seconde parenthèse tendant vers zéro avec  $h$ , est bornée dans le voisinage de  $h = 0$ .

Quant à la première, nous l'écrivons sous la forme :

$$p \frac{J_0(\lambda_{p+2} h) - J_0(\lambda_{p+1} h)}{\lambda_{p+1}^2 h^2} + p \frac{1 - J_0(\lambda_{p+2} h)}{h^2} \left[ \frac{1}{\lambda_{p+1}^2} - \frac{1}{\lambda_{p+2}^2} \right].$$

Or  $J_0'(x) = -J_1(x)$  est bornée ( $|J_0'(x)| < 1$ )<sup>8)</sup>. Par conséquent :  $|J_0(\lambda_{p+2} h) - J_0(\lambda_{p+1} h)| \leq |(\lambda_{p+2} - \lambda_{p+1}) h|$ ,  $h$  étant quelconque. D'autre part :

$$\lambda_{p+2} - \lambda_{p+1} = O(1)$$

d'où :

$$\left| p \frac{J_0(\lambda_{p+2} h) - J_0(\lambda_{p+1} h)}{\lambda_{p+1}^2 h^2} \right| < \frac{a \cdot p \cdot h}{\lambda_{p+1}^2 h^2}$$

$a$  désignant une constante. Le second membre de cette inégalité est borné d'après ce que nous avons dit en définissant le nombre  $p$ .

La quantité :  $p \frac{|1 - J_0(\lambda_{p+2} h)|}{h^2} \left[ \frac{1}{\lambda_{p+1}^2} - \frac{1}{\lambda_{p+2}^2} \right]$  est plus petite ou égale à :

$$\frac{2p}{h^2} \frac{\lambda_{p+2}^2 - \lambda_{p+1}^2}{\lambda_{p+1}^2 \lambda_{p+2}^2} \quad \text{car } |J_0(\lambda_{p+2} h)| \leq 1 \quad 0 \leq h \leq 1.$$

Du moment que  $\lambda_{p+2}^2 - \lambda_{p+1}^2 = O(p)$ , ce terme se comportera comme  $\frac{1}{p^2 h^2}$ ; il est par conséquent borné.  $S_1$  est borné.

$$\begin{aligned} \text{Il ne nous reste qu'à étudier : } \sum_{p+1}^{\infty} n |t_n(h)| = \\ = \frac{1}{h^2} \sum_{p+1}^{\infty} p \left| \frac{2 J_0(\lambda_{n+1} h) - J_0(\lambda_n h) - J_0(\lambda_{n+2} h)}{\lambda_n^2} \right. \\ \left. + [1 - J_0(\lambda_{n+1} h)] \left[ \frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{2}{\lambda_{n+1}^2} + \frac{1}{\lambda_{n+2}^2} \right] \right. \\ \left. + [J_0(\lambda_{n+2} h) - J_0(\lambda_{n+1} h)] \left[ \frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \right] \right| \end{aligned}$$

<sup>8)</sup> Watson loc. cit. p. 31, formule (5).

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{h^2} \sum_{p+1}^{\infty} n \left| \frac{2 J_0(\lambda_{n+1} h) - J_0(\lambda_n h) - J_0(\lambda_{n+2} h)}{\lambda_n^2} \right| \\ &\quad + \frac{1}{h^2} \sum_{p+1}^{\infty} n \left| 1 - J_0(\lambda_{n+1} h) \right| \left| \frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{2}{\lambda_{n+1}^2} + \frac{1}{\lambda_{n+2}^2} \right| \\ &\quad + \frac{1}{h^2} \sum_{p+1}^{\infty} \left| J_0(\lambda_{n+2} h) - J_0(\lambda_{n+1} h) \right| n \left( \frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_{n+2}^2} \right) = S_2 + S_3 + S_4. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que ces différentes sommes sont bornées. Avant d'étudier  $S_2$  remarquons que  $J_0''(x) = -J_1'(x) = -\frac{1}{2}[J_0(x) - J_2(x)]$  est bornée et séparons  $S_2$  en :

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{h^2} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{n}{\lambda_n^2} \left| J_0(\lambda_n h) - 2 J_0(\lambda_{n+1} h) + J_0(\lambda_{n+2} h) \right| \\ &\leq \frac{1}{h^2} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{n}{\lambda_n^2} \left| J_0(\lambda_n h) - 2 J_0\left(\frac{\lambda_n + \lambda_{n+2}}{2} h\right) + J_0(\lambda_{n+2} h) \right| \\ &\quad + \frac{2}{h^2} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{n}{\lambda_n^2} \left| J_0(\lambda_{n+1} h) - J_0\left(\frac{\lambda_n + \lambda_{n+2}}{2} h\right) \right| = S_2' + S_2''. \end{aligned}$$

L'expression  $J_0(\lambda_n h) - 2 J_0\left(\frac{\lambda_n + \lambda_{n+2}}{2} h\right) + J_0(\lambda_{n+2} h)$  étant le numérateur du rapport servant à définir la dérivée seconde généralisée de  $J_0\left(\frac{\lambda_n + \lambda_{n+2}}{2} h\right)$  le « théorème des accroissements finis » (pour cette dérivée seconde) et les formules (4) et (5) nous permettent d'affirmer que si  $\frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{3/2}}$  est bornée  $S_2'$  le sera également. Or, pour évaluer

$$\sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \text{ nous n'avons (formule (6)) qu'à étudier } \sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ qui est inférieure}$$

$$\text{à } \int_p^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{p}}.$$

$S_2'$  sera donc inférieure à  $\frac{b}{\sqrt{ph}}$ ,  $b$  désignant une constante.  $S_2'$ , par conséquent, est bornée. Nous pouvons suivre, pour  $S_2''$  un raisonnement identique en faisant intervenir avec la formule (5), le théorème des accroissements finis ordinaire.  $S_2''$  et par suite  $S_2$  sont bornées pour  $h$  petit.

<sup>9)</sup> *Watson* loc. cit. p. 31, formule (5).

## Etude de $S_3$

Nous avons  $|J_0(\lambda_{n+1}h)| \leq 1$  d'où :

$$\begin{aligned} S_3 &\leq \frac{2}{h^2} \sum_{p+1}^{\infty} n \left| \frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{2}{\lambda_{n+1}^2} + \frac{1}{\lambda_{n+2}^2} \right| \\ &= \frac{2}{h^2} \sum_{p+1}^{\infty} n \left| \frac{\lambda_{n+2}^2 \lambda_{n+1}^2 - 2 \lambda_n^2 \lambda_{n+2}^2 + \lambda_n^2 \lambda_{n+1}^2}{\lambda_n^2 \lambda_{n+1}^2 \lambda_{n+2}^2} \right|. \end{aligned}$$

D'après la formule (6)  $\lambda_{n+2}^2 \lambda_{n+1}^2 - 2 \lambda_n^2 \lambda_{n+2}^2 + \lambda_n^2 \lambda_{n+1}^2 = O(n^2)$  ce qui ramène l'étude de  $S_3$  à celle de  $\sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ . Or :

$$\sum_{p+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \int_p^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2p^2}$$

d'où :  $S_3 < \frac{c}{h^2 p^2}$ ,  $c$  étant une constante  $S_3$  est donc bornée pour  $h$  petit.

L'étude de  $S_4$  ne présente maintenant plus aucune difficulté si l'on estime  $J_0(\lambda_{n+2}h) - J_0(\lambda_{n+1}h)$  comme on l'a fait pour  $S_1$  et  $n \left( \frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\lambda_{n+1}^2} \right)$  comme pour  $S_3$ . On arrive ainsi à montrer que  $S_4$  est bornée dans le voisinage de  $h = 0$ .

Notre proposition est établie.

## Chapitre II

### § 1. Fonctions harmoniques et corde harmonique d'un arc de courbe

Nous dirons d'une fonction  $f(r, \varphi)$  qu'elle est *harmonique* dans un domaine du cône d'ouverture  $\frac{2\pi}{\nu}$  et de génératrice de longueur 1, ne contenant pas le sommet du cône à son intérieur, lorsqu'elle possède une différentielle totale seconde en tout point intérieur du domaine et y vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0.$$

La valeur moyenne d'une telle fonction sur un petit cercle est égale à la valeur au centre d'où  $\Delta_h f(r, \varphi) = 0$  pour  $h$  suffisamment petit.

Si une fonction  $f(r)$  possède dans  $0 < a \leq x < b \leq 1$  une dérivée seconde et  $y$  satisfait à l'équation :

$$\frac{d^2 f}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d f}{d r} - \frac{\nu^2}{r^2} f = 0$$

$f(r) \cos \nu \varphi$  sera une fonction harmonique du cône et aura les propriétés que nous venons d'énoncer.  $\Delta_h f(r)$  sera nul pour  $h$  suffisamment petit.

Nous appellerons *fonction harmonique*<sup>10)</sup> dans un intervalle  $0 < a < r < b$  toute fonction  $u(r)$  satisfaisant à l'intérieur de cet intervalle à l'équation :

$$(14) \quad \frac{d^2 u}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d u}{d r} - \frac{\nu^2}{r^2} u = 0.$$

Une telle fonction sera donc de la forme  $c_1 r^\nu + c_2 r^{-\nu}$ .

Par *corde harmonique de l'arc*  $(a, b)$  ( $0 < a < b \leq 1$ ) de la courbe  $y = F(r)$  nous entendons l'arc de courbe de  $y = u(r)$  donné par la fonction harmonique qui pour  $r = a$  et  $r = b$  a les mêmes valeurs que  $F(r)$ .

Deux fonctions harmoniques  $u_1(r)$  et  $u_2(r)$  qui sont égales en un point  $a$  intérieur à l'intervalle  $(0, 1)$  ont une différence  $u_1(r) - u_2(r)$  qui est une fonction monotone de  $r$ . Il est en effet élémentaire d'établir que :

$$u_1(r) - u_2(r) = [u_1'(a) - u_2'(a)] a [a^{-\nu} r^\nu - a^\nu r^{-\nu}] \frac{1}{2 \nu}$$

est une fonction monotone croissante si  $u_1'(a) > u_2'(a)$  décroissante dans le cas contraire. Par conséquent si deux arcs  $y_1 = F_1(r)$ ,  $y_2 = F_2(r)$  ( $0 \leq r \leq b$ ,  $0 < a < b < 1$ ) ont la même extrémité gauche  $F_1(a) = F_2(a)$ , mais n'ont pas la même extrémité droite, leurs cordes harmoniques  $u_1(r)$ ,  $u_2(r)$  n'auront qu'un seul point commun. Si par exemple  $F_1(b) > F_2(b)$  on aura  $u_1(r) > u_2(r)$  pour  $r > a$  et  $u_1(r) < u_2(r)$  pour  $r < a$ . Plus généralement si les deux arcs de courbes sont tels que  $F_1(a) > F_2(a)$  et  $F_1(b) > F_2(b)$ , leurs cordes harmoniques seront telles que  $u_1(r) > u_2(r)$  pour  $a \leq r \leq b$ .

<sup>10)</sup> La signification habituelle du mot harmonique est différente. Il n'y aura cependant pas risque de confusion.

Ces propriétés rappellent celles des cordes, (au sens ordinaire du mot), d'un arc de courbe d'où cette dénomination de « cordes harmoniques ». Cette analogie s'étend aux propriétés de convexité ou concavité. Un arc de courbe est dit convexe ou concave, suivant que chaque portion de cet arc est situé au dessus ou en dessous de sa corde. La corde d'un arc  $(a, b)$  d'une courbe  $y = F(r)$  est la solution de l'équation  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$  qui pour  $r = a$  et  $r = b$  a les mêmes valeurs que  $F(r)$ . L'étude de la convexité se ramène à celle de la dérivée seconde.

Dans les travaux de J. de la Vallée Poussin sur les séries trigonométriques et dans ceux de M. Plancherel sur les séries de polynômes de Legendre ces propriétés jouent un rôle prépondérant. Les théorèmes établis dans le premier chapitre de ce travail nous ayant déjà indiqué que le paramètre généralisé de Beltrami doit jouer dans l'étude des séries de fonctions de Bessel le même rôle que la dérivée seconde dans l'étude des séries trigonométriques, l'introduction de ces cordes harmoniques était tout indiquée.

Introduisons maintenant pour poursuivre l'analogie, au lieu de la convexité habituelle, que nous pourrions appeler convexité par rapport aux cordes ordinaires ou aux solutions de l'équation  $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ , une convexité par rapport aux cordes harmoniques ou aux solutions de l'équation (14). Il est à prévoir que l'étude de cette « convexité » se ramènera à celle du paramètre généralisé de Beltrami comme celle de la convexité ordinaire se ramenait à l'examen de la dérivée seconde. C'est ce que montreront les théorèmes suivants que nous énoncerons sans démonstration car nous n'aurions qu'à répéter presque mot pour mot les démonstrations données par M. Plancherel dans ses mémoires sur les polynômes de Legendre :

*Théorème I: Si  $F(x)$  est continue dans l'intervalle  $a < r < b$  ( $a > 0$ ,  $b \leq 1$ ) et si en chaque point de  $a < r < b$ ,  $\bar{F}^* > 0$  alors, dans cet intervalle tout arc de la courbe  $y = F(r)$  est situé en dessous de sa corde harmonique. (Au contraire, il serait au-dessus, si  $\Delta^* F$  était négatif.)*

*Lemme I: Si  $F(r)$  est continue au point  $r_1$ , ( $0 < r_1 < 1$ ), et si la fonction harmonique  $u(r)$  est telle que  $u(r_1) = F(r_1)$ , de plus si dans un voisinage  $(r_1 - \varepsilon, r_1 + \varepsilon)$  de  $r_1$  on a  $F(r) \geq u(r)$  (respectivement  $F(r) \leq u(r)$ ) alors :*

$$\underline{\Delta}^* F(r_1) \geq 0 \quad \bar{\Delta}^* F(r_1) \leq 0.$$

*Théorème II: Si  $F(r)$  est continue dans l'intervalle  $a \leq r \leq b$ , ( $a > 0$ ,  $b \leq 1$ ) et si dans cet intervalle aucun arc de la courbe  $y = F(r)$  n'a de*



point au-dessus (en dessous) de sa corde harmonique alors, un arc quelconque de la courbe, s'il ne coïncide pas avec sa corde harmonique est en dessous (au-dessus) de cette corde et la courbe n'a en commun avec elle que les extrémités.

De plus en tout point intérieur de  $(a, b)$  nous aurons  $\underline{F}^* \geq 0$  dans la première supposition et  $\Delta^* F \leq 0$  dans la seconde.

## § 2. Tangentes harmoniques. La condition **K**.

Nous disons que la courbe  $y = F(r)$  possède au point  $r = \alpha$  une tangente harmonique à droite  $y = u_+(r)$  (à gauche  $y = u_-(r)$ ) lorsque  $u_+(r)$  ( $u_-(r)$ ) est la limite unique de la corde harmonique de l'arc  $(\alpha, \beta)$  de la courbe quand  $\beta$  tend vers  $\alpha + 0$ , ( $\alpha - 0$ ).

Si nous calculons  $\Delta_h F(\alpha)$  en supposant que  $F'_+(\alpha)$  et  $F'_-(\alpha)$  existent et soient finies nous obtenons :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h F(\alpha)}{h} = \frac{1}{\pi} [F'_+(\alpha) - F'_-(\alpha)],$$

en d'autres termes :

Lorsque  $F(r)$  possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche, toutes deux finies, la condition nécessaire et suffisante de leur égalité est que :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h F}{h}$  soit nulle en ce point, si ces dérivées sont différentes on a  $\Delta^* F = \pm \infty$ . D'ailleurs  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h F}{h}$  peut être nulle sans que  $F$  possède des dérivées à droite et à gauche.

Nous appelons « condition **K** » la condition  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h F(r)}{h} = 0$ . La condition **K** est certainement satisfaite en tout point où  $\underline{\Delta}^* F$  et  $\bar{\Delta}^* F$  sont finis.

*Lemme II :* Soit  $F(r)$  une fonction continue au point  $r_1$  ( $0 < r_1 < 1$ ) et dans son voisinage. Soient  $u_1(r)$  et  $u_2(r)$  deux fonctions harmoniques différentes ayant la même valeur que  $F(r)$  au point  $r_1$ . Si dans le voisinage de  $r$  on a :

$$\begin{aligned} &F(r) \leq u_1(r) \text{ et } F(r) \leq u_2(r) \\ \text{(ou } &F(r) \geq u_1(r) \text{ et } F(r) \geq u_2(r)) \end{aligned}$$

alors  $F(r)$  ne peut satisfaire à la condition **K** au point  $r_1$ .

*Lemme III: Si la fonction continue  $F(r)$  vérifie la condition  $K$  au point  $r_1$  ( $0 < r_1 < 1$ ) il ne peut exister au plus qu'une seule fonction harmonique  $u(r)$  telle que:*

$$u(r_1) = F(r_1) \text{ et que} \\ u(r) = F(r) \text{ au voisinage de } r_1$$

(ou  $u(r) \leq F(r)$ ).

*Théorème III: Soit  $F(r)$  une fonction continue dans l'intervalle  $a \leq r \leq b$  ( $a > 0$ ,  $b \leq 1$ ) et satisfaisant à la condition  $K$  à l'intérieur de cet intervalle. S'il y a des points de l'arc  $(a, b)$  de la courbe  $y = F(r)$  au-dessus (en dessous) de la corde harmonique de cet arc, l'ensemble des points de l'intervalle  $(a, b)$  pour lesquels  $\bar{\Delta}^* F(r) < 0$  ( $\underline{\Delta}^* F(r) > 0$ ) a la puissance du continu et contient un sous-ensemble parfait.*

*Théorème IV: Si  $F(r)$  est continue dans l'intervalle  $a \leq r \leq b$  ( $0 < a < b \leq 1$ ) et satisfait à la condition  $K$  à l'intérieur de cet intervalle, l'ensemble des points intérieurs de cet intervalle où  $\bar{\Delta}^* F < 0$  ( $\underline{\Delta}^* F > 0$ ) est nul ou contient un sous-ensemble parfait.*

*Théorème V: Si  $F(r)$  possède une dérivée  $F'(r)$  continue dans l'intervalle  $a < r < b$  ( $a > 0$ ,  $b \leq 1$ ) on a en tout point intérieur de cet intervalle:*

$$F'(r) \frac{1}{r} + \underline{D} F'(r) - \frac{\nu^2}{r^2} F(r) \leq \underline{\Delta}^* F \leq \bar{\Delta}^* F \leq \\ \leq F'(r) \frac{1}{r} + \bar{D} F'(r) - \frac{\nu^2}{r^2} F(r)$$

$\underline{D} F'(r)$  et  $\bar{D} F'(r)$  désignant les limites inférieure et supérieure de  $\frac{F'(r+h) - F'(r)}{h}$  lorsque  $h$  tend vers zéro.

**§ 3.** *Théorème VI: Soit  $f(r)$  une fonction intégrable dans l'intervalle  $(a, b)$  ( $a > 0$ ,  $b \leq 1$ ),  $\varepsilon$  étant une quantité positive arbitrairement petite et  $\alpha$  un point quelconque de l'intervalle  $(a, b)$  on peut construire:*

a) Une fonction  $\Phi_1$  continue dans  $a \leq r \leq b$  et telle que dans cet intervalle:

$$1^0 \quad 0 \leq \Phi_1(r) - \frac{1}{2} \left[ r^{\nu-1} \int_{\alpha}^r \xi^{1-\nu} f(\xi) d\xi + r^{-(\nu+1)} \int_{\alpha}^r \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right] \leq \varepsilon$$

2° en tout point de  $(a, b)$  où  $f(r)$  est finie:

$$\underline{D} \Phi_1(r) > f(r) + \frac{1}{2} \left[ (\nu-1) r^{\nu-2} \int_{\alpha}^r t^{1-\nu} f(t) dt - (\nu+1) r^{-(\nu+2)} \int_{\alpha}^r t^{1+\nu} f(t) dt \right].$$

b) Une fonction  $\Phi_2(r)$  continue dans  $a \leq r \leq b$  telle que dans cet intervalle :

$$1^0 \quad -\varepsilon \leq \Phi_2(r) - \frac{1}{2} \left[ r^{\nu-1} \int_{\alpha}^r \xi^{1-\nu} f(\xi) d\xi + r^{-(\nu+1)} \int_{\alpha}^r \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right] \leq 0$$

2° En tout point intérieur de  $(a, b)$  où  $f(r)$  est finie :

$$\bar{D} \Phi_2(r) < f(r) + \frac{1}{2} \left[ (\nu-1) r^{\nu-2} \int_{\alpha}^r t^{1-\nu} f(t) dt - (\nu+1) r^{-\nu+2} \int_{\alpha}^r t^{1+\nu} f(t) dt \right].$$

Nous savons, en effet, déterminer une fonction continue  $\varphi_1(r)$  par les conditions :

$$1^0 \quad 0 \leq \varphi_1(r) - \int_{\alpha}^r f(\xi) d\xi \leq \varepsilon \quad a \leq r \leq b.$$

2° En tout point intérieur de  $(a, b)$  où  $f(r)$  est finie :

$$\underline{D} \varphi_1(r) > f(r).$$

Nous savons également déterminer une fonction continue  $\varphi_2(r)$  par les conditions :

$$1^0 \quad -\varepsilon \leq \varphi_2(r) - \int_{\alpha}^r f(\xi) d\xi \leq 0 \quad a \leq r \leq b.$$

2° En tout point intérieur de  $(a, b)$  où  $f(r)$  est finie :

$$\bar{D} \varphi_2(r) < f(r).^{11)}$$

---

<sup>11)</sup> Voir à ce sujet : *Ch. de la Vallée-Poussin* : Cours d'Analyse 2 éd. tome I § 282 ou Intégrales de Lebesgue § 70.

Pour obtenir le théorème VI nous n'avons qu'à prendre :

$$\begin{aligned}\Phi_1(r) = \varphi_1(r) + \frac{1}{2} \left[ (\nu - 1) \int_{\alpha}^r \xi^{\nu-2} d\xi \int_{\alpha}^{\xi} t^{1-\nu} f(t) dt \right. \\ \left. - (\nu + 1) \int_{\alpha}^r \xi^{-(\nu+2)} d\xi \int_{\alpha}^{\xi} t^{1+\nu} f(t) dt \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(r) = \varphi_2(r) + \frac{1}{2} \left[ (\nu - 1) \int_{\alpha}^r \xi^{\nu-2} d\xi \int_{\alpha}^{\xi} t^{1-\nu} f(t) dt \right. \\ \left. - (\nu + 1) \int_{\alpha}^r \xi^{-(\nu+2)} d\xi \int_{\alpha}^{\xi} t^{1+\nu} f(t) dt \right].\end{aligned}$$

En effet si nous intégrons par parties :

$$\frac{1}{2} \left[ (\nu - 1) \int_{\alpha}^r \xi^{\nu-2} d\xi \int_{\alpha}^{\xi} t^{1-\nu} f(t) dt - (\nu + 1) \int_{\alpha}^r \xi^{-(\nu+2)} d\xi \int_{\alpha}^{\xi} t^{1+\nu} f(t) dt \right]$$

nous obtenons :

$$\Phi_1(r) - \frac{1}{2} \left[ r^{\nu-1} \int_{\alpha}^r \xi^{1-\nu} f(\xi) d\xi + r^{\nu+1} \int_{\alpha}^r \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right] = \varphi_1(r) - \int f(\xi) d\xi$$

équation qui ramène le cas qui nous occupe au cas déjà traité. De plus :

$$\underline{D}\Phi_1(r) = \underline{D}\varphi_1(r) + \frac{1}{2} \left[ (\nu - 1) r^{\nu-2} \int_{\alpha}^r t^{1-\nu} f(t) dt - (\nu + 1) r^{-(\nu+2)} \int_{\alpha}^r t^{1+\nu} f(t) dt \right]$$

d'où :

$$\underline{D}\Phi_1(r) > f(r) + \frac{1}{2} \left[ (\nu - 1) r^{\nu-2} \int_{\alpha}^r t^{1-\nu} f(t) dt - (\nu + 1) r^{-(\nu+2)} \int_{\alpha}^r t^{1+\nu} f(t) dt \right]$$

qui est la seconde condition que nous voulions imposer à  $\Phi_1(r)$ . On procéderait de même pour  $\Phi_2(r)$ .

*Théorème VII (Analogie du théorème de Schwarz): Soit  $F(r)$  une fonction continue dans l'intervalle  $a < r < b$  ( $a > 0, b \leq 1$ ). S'il existe une fonction  $f(r)$  finie à l'intérieur de l'intervalle  $(a, b)$  intégrable dans cet intervalle et telle que:  $\Delta^* F(r) \leq f(r) \leq \bar{\Delta}^* F(r)$  ( $a < r < b$ ) on a:*

$$F(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{r^\nu}{\nu} \int_{\alpha}^r \xi^{1-\nu} f(\xi) d\xi - \frac{r^{-\nu}}{\nu} \int_{\alpha}^r \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right] + c_1 r^\nu + c_2 r^{-\nu} \quad a \leq r \leq b.$$

Un changement de  $\alpha$  n'aurait comme conséquence qu'un changement des constantes  $c_1$  et  $c_2$ . Nous pouvons donc choisir  $\alpha$  et nous le prendrons égal à  $a$ . Remarquons également que l'expression indiquée pour  $F(r)$  dans l'énoncé et la suivante:

$$F(r) = \frac{1}{2} \left[ \int_{\alpha}^r \xi^{\nu-1} d\xi \int_{\alpha}^{\xi} t^{1-\nu} f(t) dt + \int_{\alpha}^r \xi^{-(\nu+1)} d\xi \int_{\alpha}^{\xi} t^{1+\nu} f(t) dt \right] + c_1 r^\nu + c_2 r^{-\nu}$$

sont équivalentes ainsi qu'on peut s'en rendre compte en intégrant par parties.

Construisons dans l'intervalle  $(a, b)$  les courbes:

$$y_1 = F(r) - \int_a^r \Phi_1(\xi) d\xi + \frac{2\nu^2}{a^2} (b-a) \varepsilon z(r)$$

$$y = F(r) - \frac{1}{2} \left[ \int_a^r \xi^{\nu-1} d\xi \int_a^{\xi} t^{1-\nu} f(t) dt + \int_a^r \xi^{-(\nu+1)} d\xi \int_a^{\xi} t^{1+\nu} f(t) dt \right]$$

$$y_2 = F(r) - \int_a^r \Phi_2(\xi) d\xi - \frac{2\nu^2}{a^2} (b-a) \varepsilon z(r)$$

où  $\Phi_1(r)$  et  $\Phi_2(r)$  sont les fonctions relatives à  $f(r)$  et dont nous avons indiqué les propriétés dans le théorème VI. Quant à  $z$  c'est une fonction de  $r$  définie comme suit:

$$1^0 \quad z = \frac{1}{\nu^2 - 4} [r^2 - a^{2-\nu} r^\nu] \text{ si } \nu \neq 2$$

$$2^0 \quad z = \frac{1}{4} r^2 \lg \frac{a}{r} \text{ si } \nu = 2.$$

Dans les deux cas  $z$  est nulle pour  $r = a$ , négative dans le reste de l'intervalle,  $\Delta^* z$  existe et est égal à  $-1$ .

Puisque :

$$\Phi_2(\xi) \leq \frac{1}{2} \left[ \xi^{(v-1)} \int_a^\xi t^{1-v} f(t) dt + \xi^{-(v+1)} \int_a^\xi t^{1+v} f(t) dt \right] \leq \Phi_1(\xi)$$

nous aurons pour  $a \leq r \leq b$  :  $y_1 \leq y \leq y_2$ .

$$\text{Mais : } y_2 - y_1 = \int_a^r [\Phi_1(\xi) - \Phi_2(\xi)] d\xi - \frac{4v^2}{a^2} (b-a) \varepsilon z.$$

L'intégrale intervenant ci-dessus étant  $\leq 2(b-a)\varepsilon < 2\varepsilon$  nous pouvons écrire :  $y_2 - y_1 < k\varepsilon$ ,  $k$  étant fini.

Pour  $a \leq r \leq b$  nous aurons :

$$0 \leq y - y_1 < k\varepsilon \qquad 0 \leq y_2 - y < k\varepsilon.$$

Pour  $r = a$  nous avons  $y_1 = y = y_2$ . Si  $v_1, v, v_2$  désignent les cordes harmoniques de ces trois arcs de courbe dans  $(a, b)$  nous aurons à l'extrémité  $r = b$  :

$$\begin{aligned} 0 &\leq v - v_1 = y - y_1 < k\varepsilon \\ 0 &\leq v_2 - v = y_2 - y < k\varepsilon. \end{aligned}$$

D'où nous déduisons que pour  $a \leq r \leq b$  :

$$v_1 \leq v \leq v_2 \qquad v - v_1 < k\varepsilon \qquad v_2 - v < k\varepsilon.$$

$$\text{Or : } \Delta_h y_1(r) = \Delta_h F(r) - \Delta_h \int_a^r \Phi_1(\xi) d\xi + \frac{2v^2}{a^2} (b-a) \varepsilon \Delta_h z.$$

Passant à la limite nous obtenons :

$$\underline{\Delta}^* y_1(r) \leq \underline{\Delta}^* F(r) - \underline{\Delta}^* \int_a^r \Phi_1(\xi) d\xi - \frac{2v^2}{a^2} (b-a) \varepsilon.$$

Par hypothèse :  $\underline{\Delta}^* F(r) \leq f(r)$  et d'après le théorème V :

$$\underline{\Delta}^* \int_a^r \Phi_1(\xi) d\xi \geq \Phi_1(r) \frac{1}{r} + \underline{D} \Phi_1(r) - \frac{v^2}{r^2} \int_a^r \Phi_1(\xi) d\xi$$

nous avons, si nous nous rappelons la définition de  $\Phi_1(r)$ :

$$\Phi_1(r) \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2r} \left[ r^{v-1} \int_a^r \xi^{1-v} f(\xi) d\xi + r^{-(v+1)} \int_a^r \xi^{1+v} f(\xi) d\xi \right]$$

$$\underline{D} \Phi_1(r) > f(r) + \frac{1}{2} \left[ (v-1) r^{v-2} \int_a^r t^{1-v} f(t) dt - (v+1) \int_a^r t^{1+v} f(t) dt \right]$$

D'où:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}^* y_1 &\leq f(r) - \Phi_1(r) \frac{1}{r} - \underline{D} \Phi_1(r) + \frac{v^2}{r^2} \int_a^r \Phi_1(\xi) d\xi - \frac{2v^2}{a^2} (b-a) \varepsilon < \\ &< -\frac{v}{2} \left[ r^{v-2} \int_a^r \xi^{1-v} f(\xi) d\xi - r^{-(v+2)} \int_a^r \xi^{1+v} f(\xi) d\xi \right] \\ &+ \frac{v^2}{r^2} \int_a^r \left[ \frac{1}{2} \xi^{v-1} \int_a^\xi t^{1-v} f(t) dt + \frac{1}{2} \xi^{-(v+1)} \int_a^\xi t^{1+v} f(t) dt \right] d\xi \\ &+ \frac{v^2}{r^2} \int_a^r \left[ \Phi_1(\xi) - \frac{1}{2} \xi^{v-1} \int_a^\xi t^{1-v} f(t) dt - \frac{1}{2} \xi^{-(v+1)} \int_a^\xi t^{1+v} f(t) dt \right] d\xi \\ &- \frac{2v^2}{a^2} (b-a) \varepsilon. \end{aligned}$$

La première ligne et la seconde du second membre se détruisent comme le montre une intégration par parties, la troisième est d'après les inégalités du théorème VI plus petit que:  $\frac{v^2}{a^2} (b-a) \varepsilon$ . Nous avons en définitive:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}^* y_1(r) &< -\frac{v^2}{a^2} (b-a) \varepsilon \\ \underline{\Delta}^* y_1(r) &< 0 \quad (a < r < b) \end{aligned}$$

et nous pourrions établir par un calcul analogue que:

$$\bar{\Delta}^* y_2(r) > 0 \quad (a < r < b.)$$

Si nous appliquons le théorème I nous reconnaissons que dans l'intervalle  $(a, b)$ ,  $y_1$  est au-dessus de sa corde harmonique et  $y_2$  en dessous de la sienne :

$$\begin{aligned} y_1 &> v_1 & y_2 &< v_2 & \text{pour } a < r < b & \text{d'où :} \\ v_1 &< y_1 \leq y \leq y_2 & & & & \\ v_1 &< y < v_2. & & & & \end{aligned}$$

Or à l'intérieur de  $(a, b)$  :  $v_1 \leq v \leq v_2$  ; nous avons donc à l'intérieur de cet intervalle :

$$|y - v| < v_2 - v_1 < k\varepsilon.$$

Pour  $r = a$  et  $r = b$  :  $y = v$ . Or  $y$  et  $v$  sont indépendants du nombre arbitraire  $\varepsilon$ , il s'en suit que  $y = v$  dans tout l'intervalle  $(a, b)$ .  $y$  est donc dans cet intervalle une fonction harmonique c'est à dire une fonction du type  $c_1 r^\nu + c_2 r^{-\nu}$  ce qui démontre le théorème.

Les résultats que nous avons obtenus dans ce théorème demeurent exacts si au lieu de supposer la fonction  $f(r)$  finie nous supposons qu'elle puisse devenir infinie sur un ensemble ne contenant pas de sous-ensemble parfait, pourvu que sur cet ensemble  $F(r)$  satisfasse à la condition  $K$  ce que nous allons énoncer ainsi :

*Théorème VIII: Soit  $F(r)$  une fonction continue dans l'intervalle  $a < r < b$ , ( $a > 0$ ,  $b \leq 1$ ). S'il existe une fonction  $f(r)$  intégrable dans  $(a, b)$  telle que :*

$$\underline{\Delta}^* F(r) \leq f(r) \leq \bar{\Delta}^* F(r) \quad a < r < b$$

*si de plus l'ensemble des points de  $(a, b)$  où  $f(r)$  est infinie ne contient pas de sous-ensemble parfait et si aux points de cet ensemble  $F(r)$  vérifie la condition  $K$  on a :*

$$\begin{aligned} F(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{r^\nu}{\nu} \int_a^r \xi^{1-\nu} f(\xi) d\xi - \frac{r^{-\nu}}{\nu} \int_a^r \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right] \\ + c_1 r^\nu + c_2 r^{-\nu} \quad (a \leq r \leq b). \end{aligned}$$

Nous concluerions en effet comme précédemment qu'en tout point intérieur de  $(a, b)$ , où  $f(r)$  est finie on aurait encore :

$$\underline{\Delta}^* y < 0 \quad \bar{\Delta}^* y > 0$$



On peut conclure de ces inégalités que pour tout point intérieur de  $(a, b)$ :

$$y_1 \geq v_1, \quad y_2 \leq v_2$$

car s'il existait par exemple un point où  $y_1 < v_1$  il résulterait du théorème III que  $\underline{\Delta}^* y_1$  serait positif pour un ensemble de points contenant un sous-ensemble parfait. Les seuls points où  $\underline{\Delta}^* y_1$  pourrait être positif sont ceux où  $f(r)$  est infinie et nous avons supposé que leur ensemble ne contient pas de sous-ensemble parfait.

## Chapitre III

### *Etude de la fonction*

$$G(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{r^\nu}{\nu} \int_{\alpha}^r \xi^{1-\nu} f(\xi) d\xi - \frac{r^{-\nu}}{\nu} \int_{\alpha}^r \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right]$$

$$\text{où: } 0 < \alpha \leq 1 \quad 0 < r \leq 1.$$

Nous ferons sur  $f(r)$  les hypothèses suivantes :

- 1) Si  $-\frac{1}{2} \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ , nous supposons que  $r^{1+\nu} f(r)$  est intégrable.
- 2) Si  $\nu \geq \frac{1}{2}$  nous supposons que  $r^{3/2} f(r)$  est intégrable.

Décomposons  $G(r)$  en :

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{r^\nu}{\nu} \int_1^r \xi^{1-\nu} f(\xi) d\xi - \frac{r^{-\nu}}{\nu} \int_0^r \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{r^\nu}{\nu} \int_{\alpha}^1 \xi^{1-\nu} f(\xi) d\xi + \frac{r^{-\nu}}{\nu} \int_0^{\alpha} \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right] \\ &= H(r) + c_1 r^\nu + c_a r^{-\nu}. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses que nous avons faites sur  $f(r)$ ,  $\sqrt{r} H(r)$  est intégrable dans  $(0,1)$ . De plus  $H(r)$  étant à variation bornée dans tout intervalle  $(a, b)$  tel que  $0 < a < b \leq 1$ , il résulte d'un critère de convergence des séries de Bessel<sup>12)</sup> que la série de Bessel de  $H(r)$  converge à l'intérieur de  $(0,1)$  vers  $H(r)$ .

<sup>12)</sup> *Watson*, loc. cit. p. 591.

Nous allons établir une relation entre  $\beta_n$ ,  $n^{\text{ième}}$  coefficient de Bessel de  $H(r)$  et  $\alpha_n$ ,  $n^{\text{ième}}$  coefficient de Bessel de  $f(r)$ , (relation qui peut d'ailleurs être prévue par la comparaison des théorèmes III du Chapitre I et VII du Chapitre II)

$$\begin{aligned}\beta_n &= N_n \int_0^1 r H(r) J_\nu(\lambda_n r) dr = \\ &= \frac{N_n}{2\nu} \left[ \int_0^1 r^{\nu+1} J_\nu(\lambda_n r) dr \int_1^r \xi^{1-\nu} f(\xi) d\xi - \int_0^1 J_\nu(\lambda_n r) r^{-(\nu-1)} dr \int_0^r \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right].\end{aligned}$$

Si nous intervertissons l'ordre des intégrations en remarquant que :

$$\int_0^1 dr \int_1^r \dots d\xi = - \int_0^1 d\xi \int_0^\xi \dots dr$$

et

$$\int_0^1 dr \int_0^r \dots d\xi = \int_0^1 d\xi \int_\xi^1 \dots dr$$

et que pour calculer les intégrales qui se présentent nous fassions usage des formules :

$$\begin{aligned}(15) \quad \int r^{\nu+1} J_\nu(\lambda_n r) dr &= \frac{1}{\lambda_n} r^{\nu+1} J_{\nu+1}(\lambda_n r) + c \\ \int r^{-(\nu-1)} J_\nu(\lambda_n r) dr &= \frac{-1}{\lambda_n} r^{-(\nu-1)} J_{\nu-1}(\lambda_n r) + c\end{aligned}$$

qui se déduisent aisément des formules connues :

$$\frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-\nu} J_\nu(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \quad \text{et de la relation :}$$

$$(16) \quad \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{N_n}{2\nu} \left[ \frac{-2\nu}{\lambda_n^2} \int_0^1 \xi f(\xi) J_\nu(\lambda_n \xi) d\xi + \frac{1}{\lambda_n} J_{\nu-1}(\lambda_n) \int_0^1 \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right] \\ &= -\frac{\alpha_n}{\lambda_n^2} + \frac{N_n}{2\nu} \frac{J_{\nu-1}(\lambda_n)}{\lambda_n} \int_0^1 \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Il est aisé d'établir (formules (15)) que le  $n^{\text{ième}}$  coefficient de Bessel de  $\frac{\nu-H}{\nu+H} r$  est précisément  $N_n \frac{J_{\nu-1}(\lambda_n)}{\lambda_n}$  d'où :

$$\beta_n = -\frac{\alpha_n}{\lambda_n^2} + n^{\text{ième}} \text{ coef. de } \frac{\int_0^1 \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi}{2\nu} \cdot \frac{\nu-H}{\nu+H} r^\nu.$$

Or de la convergence uniforme de la série  $\sum \beta_n J_\nu(\lambda_n r)$  et de celle de la série de  $\frac{\nu-H}{\nu+H} r^\nu$  résulte la convergence de la série  $\sum \frac{\alpha_n}{\lambda_n^2} J_\nu(\lambda_n r)$ , convergence qui est uniforme dans tout intervalle :  $0 < \delta \leq r \leq 1$ .

Nous aurons donc dans un tel intervalle :

$$H(r) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n^2} J_\nu(\lambda_n r) + c_1 r^\nu \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned}G(r) &= H(r) + c_1 r^\nu + c_2 r^{-\nu} = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\lambda_n^2} J_\nu(\lambda_n r) + a r^\nu + b r^{-\nu}\end{aligned}$$

$$0 < r < 1.$$

## Chapitre IV

### *La solution du problème d'unicité*

§ 1. Nous sommes maintenant en mesure de donner une réponse au problème d'unicité, nous devons cependant distinguer deux cas suivant que dans l'équation (1),  $H$  est infini ou non. La raison de cette distinc-

tion est que les coefficients de Bessel des fonctions  $r^\nu$  et  $r^{-\nu}$  se comportent différemment dans les deux cas. En effet ces coefficients sont:

$$\begin{aligned} \text{pour } r^\nu: & \quad N_n \frac{J_{\nu+1}(\lambda_n)}{\lambda_n} \\ \text{pour } r^{-\nu}: & \quad N_n \left[ -\frac{1}{\lambda_n} J_{\nu-1}(\lambda_n) + \lambda_n^{\nu-2} \right] \end{aligned}$$

ainsi qu'on l'établit aisément en partant des formules (15). Dans les deux cas  $N = o(n)$ , dans le cas où  $H = \infty$ :  $J_{\nu+1}(\lambda_n) = o(\lambda_n^{-1/2})$ ,  $J_{\nu+1}(\lambda_n) = o(\lambda_n^{-1/2})$ , par contre dans le cas général  $J_{\nu+1}(\lambda_n) = o(\lambda_n^{-3/2})$  et  $J_{\nu-1}(\lambda_n) = o(\lambda_n^{-3/2})$ . En effet l'équation (1) et (16) et

$$\begin{aligned} \frac{dJ_\nu}{dx} &= J_{\nu-1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) \text{ permettent d'établir que:} \\ J_{\nu+1}(\lambda_n) &= \frac{(3\nu+H) J_\nu(\lambda_n)}{\lambda_n} \end{aligned}$$

ce qui démontre notre assertion pour  $J_{\nu+1}$ . (On procède de même pour  $J_{\nu-1}$ ). Dans le cas où  $H = \infty$  les produits de ces coefficients, par  $n^{1-\nu}$  quand  $|\nu| \leq \frac{1}{2}$ , par  $\sqrt{n}$  quand  $\nu > \frac{1}{2}$ , ne tendent pas vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ . Dans le cas général le seul résultat que nous puissions énoncer simultanément pour les coefficients de  $r^\nu$  et de  $r^{-\nu}$  est que leur produit par  $n^{3/2}$  ne tend pas vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ . (Ce qui nous empêchera d'obtenir dans ce cas des résultats aussi généraux que dans le cas particulier est que le produit par  $n$  du  $n^{\text{ième}}$  coefficient de  $r^\nu$  tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ .)

## § 2. Le cas $H = \infty$

Soit  $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n r)$  une série quelconque de fonctions de Bessel,  $\lambda_n$  est ici la  $n^{\text{ième}}$  racine positive de  $J_\nu(x) = 0$ . Posons:

$$\begin{aligned} S_n(r) &= \sum_{p=1}^{p=\infty} a_p J_\nu(\lambda_p(r)) \\ \sigma_n(r) &= \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} \end{aligned}$$

$$\Psi_1(r) = \lim_{n=\infty} \sigma_n(r) \quad \text{et} \quad \Psi_2(r) = \overline{\lim}_{n=\infty} \sigma_n(r).$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant:

*Théorème IX: On peut affirmer que la série  $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n r)$  possède une fonction génératrice dès que toutes les conditions d'un des groupes suivants sont remplies:*

- I      1)  $-\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{1}{2}$   
           2)  $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{1+\nu}} = 0$   
           3)  $r^{1+\nu} \Psi_1$  et  $r^{1+\nu} \Psi_2$  intégrables dans  $(0, 1)$

*et finies dans  $0 < r < 1$*

- II      1)  $\nu \geq \frac{1}{2}$   
           2)  $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{3/2}} = 0$  et  $\sum \frac{|a_n|}{n^{5/2}}$  convergente  
           3)  $r^{3/2} \Psi_1(r)$  et  $r^{3/2} \Psi_2(r)$  intégrables dans  $(0, 1)$

*et finies dans  $0 < r < 1$*

- III     1)  $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt[n]{n}} = 0$   
           2)  $r^{1+\nu} \Psi_1(r)$  et  $r^{1+\nu} \Psi_2(r)$ , si  $-\frac{1}{2} \leq \nu < \frac{1}{2}$   
                $r^{3/2} \Psi_1(r)$  et  $r^{3/2} \Psi_2(r)$ , si  $\nu \geq \frac{1}{2}$

*intégrables dans  $(0, 1)$ , et l'ensemble des points de cet intervalle où  $|\Psi_1(r)| + |\Psi_2(r)|$  est infinie ne doit pas contenir de sous-ensemble parfait.*

Plaçons-nous dans le premier cas et posons:

$$\Phi(r) = \overline{\lim_{n=\infty}} |\sigma_n(r)|.$$

Pour chaque valeur de  $r$ ,  $\Phi(r)$  est égale à la plus grande des deux valeurs  $|\Psi_1(r)|$  et  $|\Psi_2(r)|$ ,  $r^{1+\nu} |\Psi_1(r)|$ ,  $r^{1+\nu} |\Psi_2(r)|$  (ou  $r^{3/2} |\Psi_1(r)|$ ,  $r^{3/2} |\Psi_2(r)|$ ) sont intégrables dans  $(0, 1)$  puisque  $r^{1+\nu} \Psi_1(r) \dots$  le sont. Les hypothèses du théorème IX relatives aux fonctions  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  sont donc équivalentes aux mêmes hypothèses relatives à la fonction

$\Phi(r) \cdot r^{1+\nu} \Phi(r)$  (ou  $r^{3/2} \Phi(r)$ ) est donc sommable et finie dans  $(0, 1)$ . Nous pouvons appliquer le théorème IV du premier chapitre, car dans tous les cas considérés  $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{|a_n|}{n^{5/2}}$  converge, d'où:

$$-M\Phi(r) \leq \underline{\Delta}^* F(r) \leq \bar{\Delta}^* F(r) \leq M\Phi(r).$$

De ces inégalités nous déduisons la possibilité de déterminer une fonction  $f(r)$  finie dans  $0 < r < 1$ , telle que  $r^{1+\nu} f(r)$  (ou  $r^{3/2} f(r)$ ) soit sommable dans  $(0, 1)$  et que:

$$\underline{\Delta}^* F(r) \leq f(r) \leq \bar{\Delta}^* F(r) \quad 0 < r < 1$$

On pourrait prendre par exemple  $f(r) = \underline{\Delta}^* F(r)$  ou  $f(r) = \bar{\Delta}^* F(r)$ , ces expressions étant mesurables.

Nous pouvons appliquer le théorème VII:

$$F(r) = \frac{1}{2} \left[ \frac{r^\nu}{\nu} \int_{\alpha}^r \xi^{1-\nu} f(\xi) d\xi - \frac{r^{-\nu}}{\nu} \int_{\alpha}^r \xi^{1+\nu} f(\xi) d\xi \right] + c_1 r^\nu + c_2 r^{-\nu}$$

$$0 < \alpha \leq 1 \quad 0 < r \leq 1.$$

Par conséquent puisque  $r^{1+\nu} f(r)$  (ou  $r^{3/2} f(r)$ ) est sommable dans  $(0, 1)$  d'après le chapitre III

$$F(r) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2} J_\nu(\lambda_n r) + a r^\nu + b r^{-\nu} \quad 0 < r \leq 1$$

où:

$$a_n = N_n \int_0^1 r f(r) J_\nu(\lambda_n r) dr.$$

Mais par définition:

$$F(r) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^2} J_\nu(\lambda_n r) \quad 0 < r \leq 1$$

d'où:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n - a_n}{\lambda_n^2} J_\nu(\lambda_n r) = a r^\nu + b r^{-\nu} \quad 0 < r \leq 1.$$

La série du premier membre est telle que :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} N_n \left[ \frac{\alpha_n - a_n}{\lambda_n^2} \right]^2$$

converge, car ceci est vrai si  $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{3/2}} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n}{n^{3/2}} = 0$  et ces conditions se déduisent immédiatement de nos hypothèses et du premier théorème du Chapitre I.

D'après le théorème de Riesz-Fischer  $\frac{\alpha_n - a_n}{\lambda_n^2}$  est le  $n^{\text{ième}}$  coefficient de Bessel de  $ar^\nu + br^{-\nu}$ , mais le produit par  $n^{1-\nu}$  (ou par  $\sqrt[n]{n}$ ) de ce coefficient tend ici vers zéro. D'après les remarques faites au début de ce paragraphe nous devons avoir  $a = b = 0$  d'où :

$$a_n = \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

c'est-à-dire :

$$a_n = N_n \int_0^1 r f(r) J_\nu(\lambda_n r) dr ;$$

la série  $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n r)$  est une série de Bessel ayant  $f(r)$  comme fonction génératrice. c. q. f. d.

Dans le second cas les raisonnements précédents subsistent entièrement. Dans le troisième, il faut simplement faire intervenir le théorème VIII au lieu du théorème VII. Il est applicable, puisque nous supposons que  $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt[n]{n}} = 0$  et qu'alors le théorème III du chapitre I nous indique que  $F(r)$  satisfait à la condition  $K$  à l'intérieur de  $(0, 1)$ .

### § 3. $H$ fini

*Théorème X: Soit  $\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n J_\nu(\lambda_n r)$  une série quelconque de fonctions de Bessel ( $\lambda_n$  est la  $n^{\text{ième}}$  racine positive de  $\frac{x}{H} J'_\nu(x) + J_\nu(x) = 0$ ). Si nous supposons que  $\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\sqrt[n]{n}} = 0$ , il suffit pour qu'elle possède une fonction*

génératrice que  $\sqrt{r} \Psi_1(r)$  et  $\sqrt{r} \Psi_2(r)$  soient intégrables dans l'intervalle  $(0, 1)$  et que l'ensemble des points de cet intervalle où  $|\Psi_1(r)| + |\Psi_2(r)|$  est infinie ne contienne pas de sous ensemble parfait<sup>13</sup>).

La démonstration est identique à la précédente. Nous pourrions trouver une fonction  $f(r)$  telle que  $\sqrt{r} f(r)$  soit sommable dans  $(0, 1)$  et satisfasse à :

$$\underline{\Delta}^* f(r) \leq f(r) \leq \bar{\Delta}^* f(r)$$

nous aurons d'après le théorème I<sub>c</sub> du Chapitre I.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} = 0$  et nous nous appuierons sur le fait que le produit par  $n^{3/2}$  des coefficients de Bessel de  $r^\nu$  et  $r^{-\nu}$  ne tend pas vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ .

(Reçu le 17 juillet 1932)

## Bibliographie.

- C. Arnold*: Die Probleme von Cantor und von Du Bois-Reymond in der Theorie der Bessel'schen Reihen. Diss. Fribourg (1919). Cité sous *Arnold*.
- H. Lebesgue*: Leçons sur les séries trigonométriques. (Gauthier-Villars 1906). Cité sous *Lebesgue*.
- M. Plancherel*: 1. Les problèmes de Cantor et de Du-Bois-Reymond dans la théorie des séries de polynômes de Legendre. (Annales scientifiques de l'école normale supérieure 1914. 31.) Cité sous *Plancherel* 1.  
2. Sur l'unicité du développement d'une fonction en séries de polynômes de Legendre et en série de fonctions de Bessel. (Annales de l'Ecole normale supérieure 1922. 39.) Cité sous *Plancherel* 2.
- G. N. Watson*: A treatise on the theory of Bessel Functions. (Cambridge, University Press 1922.) Cité sous *Watson*.
- A. Zygmund*: 1. Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux I. (Studia mathematica. t. II, 1930, 97—170).  
2. Sur la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux II. (Prac Matematyczno-Fizycznych, t. XXXIX, 73—117).

<sup>13</sup>) Les résultats de ce mémoire ont été communiqués à M. le Prof. Plancherel en 1928 et ont fait l'objet de la thèse de doctorat que j'ai présentée en 1929 à l'Ecole polytechnique fédérale. Depuis lors, M. Zygmund a, dans deux mémoires que j'indique dans la Bibliographie, étudié le problème d'unicité de certaines séries de fonctions orthogonales, par une méthode qui ramène ce problème au problème correspondant des séries trigonométriques. A côté de résultats relatifs aux séries de fonctions de Sturm-Liouville, de Legendre, de Jacobi, il retrouve pour les séries de Bessel certains de nos résultats.