

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 6 (1934)

Artikel: Die Untergruppen der freien Gruppen.
Autor: Locher, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7580>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Untergruppen der freien Gruppen

Von L. LOCHER, Winterthur

Daß jede Untergruppe (die nicht nur aus dem Einheitselement besteht) einer freien Gruppe bei geeigneter Erzeugendenwahl selbst eine freie Gruppe ist, bewies allgemein zuerst *O. Schreier*¹⁾, nachdem schon *I. Nielsen*²⁾ den Satz für gewisse Fälle bewiesen hatte. Das Schreier'sche Beweisverfahren wurde wesentlich vereinfacht von *W. Hurewicz*³⁾. Beim Aufbau der Überlagerungstheorie der Streckenkomplexe erweist sich der Satz als fast selbstverständlich, wie *K. Reidemeister* in seinem Buche: Einführung in die kombinatorische Topologie (Vieweg 1932) zeigt. Ein schöner und elementarer Beweis stammt ferner von *F. Levi*⁴⁾. Dieser erlaubt aber keinen anschaulichen Einblick in den Satz. Deshalb dürfte es von Interesse sein, einen sehr anschaulichen und vollständig elementaren Beweis zu haben, der ohne Vorkenntnisse der Theorie der Streckenkomplexe auskommt. Einen solchen möchte ich im folgenden darlegen.

\mathcal{S} sei die von den Elementen S_1, S_2, \dots, S_r erzeugte freie Gruppe. Jedem Produkt $\prod_1^n S_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}$ ($\varepsilon_i = \pm 1$) aus \mathcal{S} sei ein Punkt $P(\prod_1^n S_{\alpha_i}^{\varepsilon_i})$ zugeordnet. Dabei sollen Potenzprodukte, welche durch triviale Umformung (Streichen oder Zu- und Zwischenfügen von Ausdrücken der Gestalt SS^{-1}) auseinander hervorgehen, also dasselbe Element der Gruppe darstellen, denselben Punkt liefern. Aber zwei Produkten, die verschiedene Elemente von \mathcal{S} bedeuten, sollen auch verschiedene Punkte zugeordnet sein. Der Einheit entspricht der Punkt $P(1)$. Die Punkte und Gruppenelemente entsprechen sich umkehrbar eindeutig.

Ferner werde dieses Punktsystem nach folgender rekursiver Vorschrift Träger eines Streckenkomplexes $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$:

Vom Punkte $P(\prod_1^n S_{\alpha_i}^{\varepsilon_i})$ ziehe man die Strecke s_λ nach dem Punkte $P(\prod_1^n S_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} S_\lambda)$, die Strecke s_λ^{-1} nach dem Punkte $P(\prod_1^n S_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} S_\lambda^{-1})$; ist im

¹⁾ *O. Schreier*: Die Untergruppen der freien Gruppen. Abhandl. aus dem math. Sem. der Hamb. Universität. Bd. 5 (1927), pag. 161—183.

²⁾ *I. Nielsen*: Om Regning med ikke-kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppenteorien. Matematisk Tidsskrift 1921, pag. 77—94.

³⁾ *W. Hurewicz*: Zu einer Arbeit von Otto Schreier. Abhandl. aus dem math. Sem. der Hamb. Universität. Bd. 8 (1930), pag. 307—314.

⁴⁾ *F. Levi*: Über die Untergruppen freier Gruppen. Mathematische Zeitschrift Bd. 32 (1930), pag. 315—318.

letztern Falle $S_{\alpha_n}^{\varepsilon_n} = S_\lambda$, so falle die Strecke s_λ^{-1} in die Strecke s_λ , die vom Punkte $P(\prod_1^{n-1} S_{\alpha_i}^{\varepsilon_i})$ nach dem Punkte $P(\prod_1^n S_{\alpha_i}^{\varepsilon_i})$ führt. Von jedem Punkte des Systems gehen so genau $2r$ Strecken aus, nämlich $s_1^{\pm 1}, s_2^{\pm 1}, \dots, s_r^{\pm 1}$.

Jedem Potenzprodukt $\prod_1^n S_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}$ ordnen wir nun umkehrbar eindeutig einen Weg w zu. w führe vom Punkte $P(1)$ über die Strecke $s_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}$ zum Punkte $P(S_{\alpha_1}^{\varepsilon_1})$, von diesem über $s_{\alpha_2}^{\varepsilon_2}$ zum Punkt $P(S_{\alpha_1}^{\varepsilon_1} S_{\alpha_2}^{\varepsilon_2})$ usw. bis schließlich zum Punkt $P(\prod_1^n S_{\alpha_i}^{\varepsilon_i})$. Wir gebrauchen die Schreibweise

$$w = \prod_1^n s_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}.$$

Unter dem Produkt $w_1 w_2$ zweier Wege

$$w_1 = \prod_1^n s_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}, \quad w_2 = \prod_1^{\bar{n}} s_{\alpha_i}^{\bar{\varepsilon}_i}$$

verstehen wir den Weg

$$w_1 w_2 = \prod_1^n s_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} \prod_1^{\bar{n}} s_{\alpha_i}^{\bar{\varepsilon}_i}.$$

Der zum Weg $w = \prod_1^n s_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}$ inverse Weg w^{-1} sei $w^{-1} = \prod_n^1 s_{\alpha_i}^{-\varepsilon_i}$.

Umgekehrt entspricht jedem in $P(1)$ beginnendem Weg eindeutig ein Potenzprodukt. Ein Weg heißt reduziert, wenn das zugeordnete Potenzprodukt sich nicht kürzen läßt. Die reduzierten Wege und die Elemente von \mathfrak{S} entsprechen sich umkehrbar eindeutig. Die so definierten Wege bilden nach der angegebenen Multiplikation eine mit \mathfrak{S} einstufig isomorphe Gruppe. Unter der Länge des reduzierten Weges $w = \prod_1^n s_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}$ verstehen wir die Zahl $e(w) = n$.

Der Komplex $C_{\mathfrak{S}}$ ist ein Baum. Denn andernfalls gäbe es einen Punkt P , zu dem vom Punkt $P(1)$ aus zwei verschiedene reduzierte Wege $w_1 = f_1(s)$, $w_2 = f_2(s)$ führen würden. Der geschlossene Weg $w_1 w_2^{-1}$ entspricht dem die Einheit darstellenden Potenzprodukt $f_1(S) f_2^{-1}(S)$, welches sich demnach allein durch Streichen von Gliedern SS^{-1} auf 1 reduzieren lassen muß, d. h. es wäre $f_1(S)$ gliedweise identisch mit $f_2(S)$ gegen die Annahme.

Jeder geschlossene Weg in C_S läßt sich also durch Weglassen der Wegstücke, die zuerst im einen Sinne und im entgegengesetzten durchlaufen werden, auf den „leeren Weg“ 1 reduzieren. Die Länge eines leeren Weges sei Null.

\mathfrak{G} sei nun eine beliebige Untergruppe von S , die nicht einzig aus dem Einheitselement bestehe. Ich untersuche die ihr entsprechende Wegegruppe in C_S . $P(E_1^{\pm 1}), P(E_2^{\pm 1}), \dots$ seien diejenigen Punkte aus $P(\mathfrak{G})$, für welche die zu ihnen führenden in $P(1)$ beginnenden reduzierten Wege $e_1^{\pm 1}, e_2^{\pm 2}, \dots$ keine weiteren Punkte aus $P(\mathfrak{G})$ enthalten.

Diese „Elementarwege“ bzw. die entsprechenden Elemente bilden ein Erzeugendensystem von \mathfrak{G} . Wäre nämlich w ein reduzierter Weg aus \mathfrak{G} , der sich nicht durch die Elementarwege darstellen ließe, so betrachte man den kürzesten Teilweg w' von w , der ebenfalls in \mathfrak{G} liegt und dieselbe Eigenschaft hat. w' kann auch mit w identisch sein. Ferner sei e der längste Teilweg von w' , der sich durch die Elementarwege erzeugen läßt. Ist $w' = ew''$, so enthält $w'' = e^{-1}w'$ nach Reduktion keinen Punkt $P(\mathfrak{G})$ im Innern, also ist w'' mit einem Elementarweg identisch, etwa mit e_i^{ε} . Demnach ließe sich $w' = ee_i^{\varepsilon}$ doch durch die Elementarwege darstellen, was gegen die Annahme spricht.

Das System sämtlicher Elementarwege, der *Stern* (mit Mittelpunkt $P(1)$) von \mathfrak{G} , werde mit $(e)^*$ bezeichnet. Heften wir $(e)^*$ an jeden seiner Endpunkte, indem wir die einzelnen Wege von $(e)^*$ auf die aus den s_i gleich zusammengesetzten, im betr. Punkt beginnenden Wege legen, und setzen das Anheften unbegrenzt fort, so erhalten wir also alle Wege der Gruppe \mathfrak{G} .

Die Erzeugenden e_i sind im allgemeinen nicht frei. Denn beginnen e_{μ}^{ε} ($\varepsilon = \pm 1$) und e_{ν}^{η} ($\eta = \pm 1$) mit derselben Strecke $s_{\lambda}^{\pm 1}$, so stellt auch das Produkt $e_{\mu}^{-\varepsilon} e_{\nu}^{\eta}$ einen Weg dar, der keinen Punkt $P(\mathfrak{G})$ im Innern enthält, da sonst e_{μ}^{ε} oder e_{ν}^{η} selbst einen solchen enthalten würde. Also ist $e_{\mu}^{-\varepsilon} e_{\nu}^{\eta}$ ein Elementarweg, etwa e_{λ} , und es besteht die Relation:

$$e_{\lambda}^{-1} e_{\mu}^{-\varepsilon} e_{\nu}^{\eta} = 1.$$

Die Gesamtheit der bestehenden Relationen $R_i(e) = 1$ von der Gestalt

$$e_{\lambda}^{-1} e_{\mu}^{\pm 1} e_{\nu}^{\pm 1} = 1$$

bildet ein definierendes Relationssystem von \mathfrak{G} . D. h. es existiert zwischen den Elementarwegen keine Relation, die nicht Folgerelation der $R_i(e) = 1$ wäre.

Beweis: Des besseren Überblicks wegen ziehe man von $P(1)$ nach den Endpunkten $P(E_1^{\pm 1}), P(E_2^{\pm 1}), \dots$ je eine gerichtete Strecke, Bilder der Elementarwege $e_1^{\pm 1}, e_2^{\pm 1}, \dots$. Ferner werde *jeder* Punkt $P(E_\mu^\varepsilon)$ mit *jedem* anderen Punkt $P(E_\nu^\eta)$, der auf *demselben* Ast liegt (d. h. e_μ^ε und e_ν^η beginnen mit derselben Strecke $s_\lambda^{\pm 1}$) durch eine gerichtete Strecke verbunden. Die Strecke von $P(E_\mu^\varepsilon)$ nach $P(E_\nu^\eta)$ ist Bild des Elementarweges $e_\lambda = e_\mu^{-\varepsilon} e_\nu^\eta$, dieselbe Strecke in entgegengesetzter Richtung durchlaufen Bild des inversen Elementarweges $e_\lambda^{-1} = e_\nu^{-\eta} e_\mu^\varepsilon$. In der Figur 1

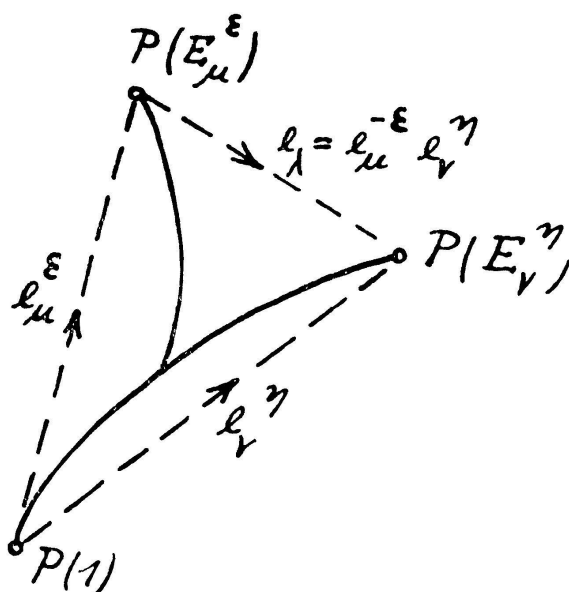


Fig. 1.

ist dies angedeutet. Dieses neue Streckensystem enthält alle im Stern $(e)^*$ liegenden Beziehungen, welche zwischen den Elementarwegen bestehen und hat für die Anschauung den Vorteil, daß verschiedene Elementarwege, die aber mit derselben Strecke $s_\lambda^{\pm 1}$ beginnen, hier auch getrennt auftreten. Wir können unter $(e)^*$ (mit Mittelpunkt $P(1)$) direkt auch das System dieser Strecken verstehen. In dieser neuen Auffassung besteht $(e)^*$ aus einer Anzahl von Polygonen (im allgemeinen mit unendlich vielen Ecken), in denen sämt-

liche Diagonalen gezogen wurden. Die Anzahl $2m$ ($m \leq r$) derselben ist gleich der Anzahl derjenigen Äste, welche überhaupt Punkte $P(\mathfrak{G})$ tragen. Hefte ich nun diesen Stern analog wie oben erklärt wurde an jeden seiner Eckpunkte, indem entsprechende Strecken identifiziert werden, und setze das Anheften unbegrenzt fort, so erhalte ich einen Streckenkomplex, der seiner gruppentheoretischen Struktur nach mit der Wegegruppe \mathfrak{G} identisch ist⁵⁾.

Einer Relation $R_i(e) = 1$ entspricht ein in $P(1)$ beginnender und wieder in $P(1)$ endender geschlossener Weg. Vom trivialen Fall eines Produktes, das durch Kürzen von Gliedern $e_i^\varepsilon e_i^{-\varepsilon}$ auf 1 reduziert werden kann, sehen wir dabei ab. Zunächst betrachte ich einen Weg w , der vollständig in einem Ast des Sternes $(e)^*$ verläuft und der in $P(1)$ mit verschiedenen Elementarstrecken $e_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}, e_{\alpha_n}^{\varepsilon_n}$ beginnt und endet. Er ent-

⁵⁾ Der konstruierte Streckenkomplex ist übrigens das Gruppenbild von \mathfrak{G} mit den Erzeugenden e_1, e_2, \dots und den zugehörigen Relationen.

spricht einer Relation $\prod_1^n e_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} = 1$. Ich denke mir das Produkt in den e reduziert. Ferner möge w einen Eckpunkt $P(E)$ nicht zweimal antreffen. w ist also ein einfaches geschlossenes Polygon $P_1 P_2 P_3 \dots P_{n-1} P_1$ in $(e)^*$ mit $P_1 = P(1)$. Nun stellen wir w durch Einfügen inverser Wegstücke in der Form

$$(P_1 P_2 P_3 P_1) (P_1 P_3 P_4 P_1) (P_1 P_4 P_5 P_1) \dots (P_1 P_{n-2} P_{n-1} P_1)$$

dar. Jeder Klammer $P_1 P_h P_{h+1} P_1$ ($h = 2, 3, \dots, n-2$) entspricht eine bestimmte Relation $R_{\alpha_h}^{\varepsilon_h}$. Also ist

$$\prod_1^n e_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} = \prod_2^{n-2} R_{\alpha_h}^{\varepsilon_h}$$

eine Folgerelation der R_i . Es ist jetzt leicht zu erkennen, daß sich jeder geschlossene Weg \bar{w} in \mathfrak{G} aus solchen einfachen geschlossenen Polygonen w_1, w_2, \dots in der Form

$$\bar{w} = \prod f_i(e) \cdot w_i^{\varepsilon_i} f_i(e)^{-1}$$

darstellen läßt. Für geschlossene Wege \bar{w} , die vollständig in $(e)^*$ verlaufen, ist dies klar. Für allgemeinere endliche geschlossene Wege \bar{w} beachte man folgendes: Verläßt \bar{w} den Stern $e^*(M)$ (d. h. mit Mittelpunkt M) im Punkte M_1 , so tritt \bar{w} auch wieder bei M_1 in den Stern $e^*(M)$ ein. Denn träte er im Punkte $M' \neq M_1$ wieder in $e^*(M)$ ein, so würden von M_1 zwei verschiedene Wege in C_Σ nach M führen, was aber gegen die Tatsache, daß C_Σ ein Baum ist, widerspricht. Verläßt also \bar{w} den Stern $e^*(M)$ in M_1 und verläuft weiter in $e^*(M_1)$ und verläßt \bar{w} den Stern $e^*(M_1)$ zum erstenmal in M_2 , so tritt \bar{w} wieder in M_2 in $e^*(M_1)$ ein.

$e^*(M_{v_1})$ sei nun der erste Stern, aus dem \bar{w} nur einmal austritt. Ein solcher muß existieren, denn würde \bar{w} aus jedem Stern zweimal austreten, so wäre \bar{w} nicht endlich. Tritt \bar{w} bei P_{v_1} ein, so verläuft \bar{w} weiter innerhalb $e^*(M_{v_1})$ und tritt wieder bei P_{v_1} aus. Dieses Wegstück läßt sich durch die R_i darstellen und darf⁶⁾ gestrichen werden. Es bleibe \bar{w}' .

Dadurch ist auch die Anzahl der Austrittsstellen aus dem benachbarten Stern um eins verkleinert worden. Es gibt wieder einen ersten

⁶⁾ Ist nämlich z. B. $R \equiv AB = 1$ und $R_1 = 1$, so läßt sich auch die linke Seite der Relation $AR_1B = 1$ durch R und R_1 erzeugen: $AR_1B = AR_1A^{-1}R$.

Stern $e^*(M_{v_2})$, aus dem \bar{w}' nur einmal austritt, also läßt sich wieder ein Wegstück streichen usw. bis \bar{w} ganz aufgezehrt ist. Also läßt sich \bar{w} ganz durch die R_i erzeugen; was zu beweisen war.

Um nun aus den e_i ein freies Erzeugendensystem zu gewinnen, haben wir gewisse unter ihnen zu eliminieren. Dazu ordne man die Elementarwege ihrer Länge nach — sonst beliebig — in eine Reihe:

$$e_1, e_2, e_3, \dots$$

Es ist also jedenfalls $l(e_k) \geq l(e_i)$, wenn $k > i$. Aus dieser Reihe wähle ich eine Teilfolge

$$g_1 = e_1, g_2, g_3, g_4, \dots$$

von der Art aus, daß sich kein g_l in der Form $e_i^{\pm 1} e_k^{\pm 1}$ (ev. auch e_i^2 oder e_i^{-2}) aus den vorhergehenden e darstellen läßt. Es läßt sich dann auch kein g_i in dieser Gestalt durch die nachfolgenden g ausdrücken. Denn wäre

$$g_i = g_k^\varepsilon g_l^\eta$$

mit $\varepsilon, \eta = \pm 1$ und $k, l > i$, so wäre auch für

$$l > k: \quad g_l^\eta = g_k^{-\varepsilon} g_i,$$

$$l < k: \quad g_k^\varepsilon = g_i g_l^{-\eta},$$

also g_l bzw. g_k ließe sich in der oben ausgeschlossenen Form durch vorhergehende e ausdrücken. Für $l = k$ wäre $g_i = g_k^2$ oder g_k^{-2} und $g_i = g_k^{\pm 2}$ würde vor g_k stehen. Dies ist aber unmöglich, da $l(g_k^{\pm 2}) > l(g_k)$ ist.

Zwischen den g besteht also keine der Relationen R_i , demnach bestehen überhaupt keine Relationen. Denn ist $\prod g_i^{\varepsilon_i} = \prod e_{\alpha_i}^{\varepsilon_i} = 1$ so läßt sich das Produkt durch triviale Umformungen in die Gestalt

$$\prod f(e) R^\varepsilon(e) f(e)^{-1}$$

setzen. Da aber zwischen den $g_i = e_{\alpha_i}$ keine Relation R_i besteht, muß sich $\prod g_i^{\varepsilon_i}$ schon durch Kürzen in den g_i selbst auf 1 reduzieren lassen.

Die Elementarwege g_1, g_2, \dots bilden ein freies Erzeugendensystem von \mathfrak{G} . Es ist nur noch zu beweisen, daß die g_i wirklich ein Erzeugendensystem von \mathfrak{G} bilden. Dazu habe ich zu zeigen, daß jedes e durch die g ausdrückbar ist. Gäbe es ein e_k , für das dies nicht der Fall wäre, so gäbe es in der obigen Reihe e_1, e_2, \dots auch ein erstes, etwa e_i , von dieser Eigenschaft. Da e_i kein g ist, läßt sich aber e_i durch die vorhergehenden e ausdrücken, letztere sind aber, und damit auch e_i selbst, durch die g darstellbar⁷⁾.

Das eben beschriebene Auswahlverfahren läßt sich Schritt für Schritt geometrisch verfolgen. Dazu denke man sich wieder den Stern $e^*(P(1))$ in der Polygonform. Es handelt sich darum, im System seiner Strecken $e_1^{\pm 1}, e_2^{\pm 1}, \dots$ gewisse so zu eliminieren, daß ein Teilsystem $g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}, \dots$ mit folgenden beiden Eigenschaften übrig bleibt:

1. Es gibt nach dem Streichen der herausgeworfenen e_i kein geschlossenes Teilpolygon mehr.

2. Jeder Eckpunkt ist noch mit dem Mittelpunkt $P(1)$ verbunden. Die erste Eigenschaft besagt, daß sich kein g_i durch die anderen ausdrücken läßt; die zweite, daß die g_i noch immer ein Erzeugendensystem bilden. In Fig. 2 ist z. B. die Elimination von e_3 (punktiert) angedeutet.

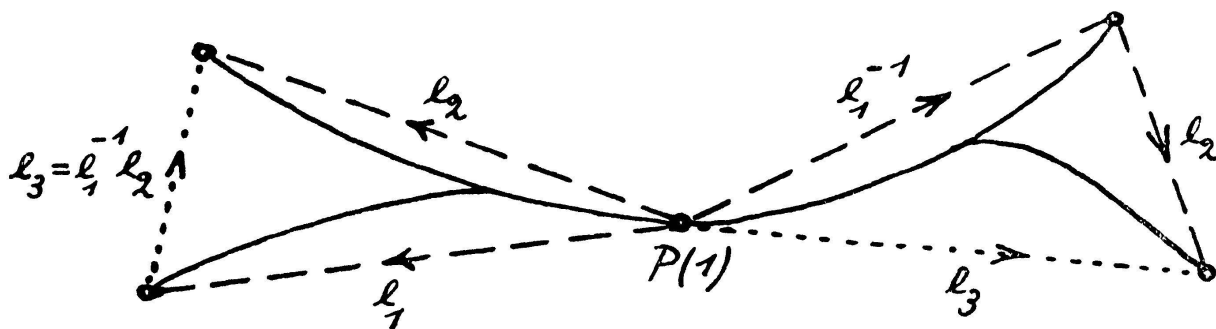


Fig. 2.

Der Beweis gilt unverändert auch für eine unendliche Menge von Erzeugenden. Da ein Auswahlverfahren verwendet wird, muß die Menge nur wohlordnungsfähig sein.

(Eingegangen den 28. Januar 1933)

⁷⁾ Diese Schlußweise kommt auch beim Beweis von *F. Levi* a. a. O. vor.

