Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 6 (1934)

Artikel: Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour N premier de la forme 6n + 1.

Autor: Bays, S. / Belhote, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-7578

Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour N premier de la forme $6n+1$

par S. BAYS et G. BELHÔTE, Fribourg

Les systèmes cycliques de triples différents pour chaque d diviseur de $3n$

Leurs nombres pour $N = 61$ et $N = 73$

1. Cette étude est encore une suite immédiate aux mémoires parus sur le même sujet dans les volumes précédents des Comm. Math. Helv.

Le mémoire principal (chap. I à VI) est dans les vol. 2, fasc. IV (1930), vol. 3, fasc. I, II et IV (1931)[1]. Dans le chap. IV de ce mémoire, j'ai montré comment on peut obtenir les systèmes de caractéristiques *différents* appartenant à chaque diviseur d de $3n$, dans les cas suivants qui épuisent toutes les possibilités:

1° $d = 1$ et $d = 3$;

2° d est diviseur de n, $< n$ et > 3;

3° $d = n$ et $d = 3n$;

4° d et n ont un p. g. c. d. $\delta > 1$, $< d$ et n.

Les systèmes de caractéristiques différents suffisent pour obtenir les systèmes cycliques de triples *différents* (vol. 3, fasc. II, § 45). Il ne restait donc plus qu'à résoudre la question suivante:

Etant donné un système de caractéristiques Σ qui appartient à d, trouver les systèmes cycliques de triples différents qu'il détermine et les diviseurs du groupe métacyclique que possèdent ces systèmes (vol. 3, fasc. II, § 46 et note 44).

Soit $\dfrac{3n}{d} = 2^a n_1$, n_1 impair. Soit $\mu_1' = 1$, μ_2', μ_3', ..., $\mu_k' = n_1$, les diviseurs de n_1. Dans le chapitre V du même mémoire, j'ai établi une

[1]) Avec la répartition suivante:

Vol. 2, Fasc. IV:	Avant-propos et chapitre I,	§§ 1 à 16, chiffres 1 à 13, notes 1 à 26,
Vol. 3, Fasc. I:	Chapitres II et III,	§§ 17 à 33, chiffres 14 à 30, notes 27 à 40,
Vol. 3, Fasc. II:	Chapitres IV et V,	§§ 34 à 51, chiffres 31 à 54, notes 41 à 46.
Vol. 3, Fasc. IV:	Chapitre VI,	§§ 52 à 59, chiffres 55 à 69, notes 47 à 52,

équation indéterminée dont les coefficients sont μ_i', $i = 1, 2, \ldots, k$, et l'inconnue x_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, est le nombre des systèmes de triples différents déterminés par Σ qui possèdent le diviseur métacyclique $\left\{ |x, 1+x|, |x, \alpha^{\omega_i} x| \right\}$, $\omega_i = 2\mu_i\, d = 2^{a+1} \mu_i' d$, $\mu_i = 2^a \mu_i'$. Pour $d = 1$, $\frac{3n}{d} = 3n = 2^a n_1$ est à remplacer par $n = 2^a n_1'$, n_1' impair, et la suite des diviseurs μ_i' de n_1, par celle plus courte des diviseurs de n_1': $\mu_1' = 1$, μ_2', μ_3', $\ldots$, $\mu'_{k'} = n_1'$. Ainsi l'équation indéterminée est la même dans les deux cas $d = 1$ et $d = 3$.

Dans le vol. 4 (1932) des Comm. Math. Helv., p. 183, sous le titre: *Les systèmes cycliques de triples différents dans les cas $d = 1$ et $d = 3$*, j'ai établi quelques résultats concernant les cas $d = 1$ et $d = 3$. *La solution* $(x_1, x_2, \ldots, x_{k'})$ de l'équation est *la même* dans les deux cas $d = 1$ et $d = 3$; quel que soit n, on a $x_1 \gtreqless 1$ et $x_{k'} \gtreqless 1$; dans le cas $n = 2^a p$, p premier impair, l'équation qui n'a que deux termes a pour solution

$$x_1 = 2^{2^a - a - 1}, \; x_2 = \frac{2^{n-1} - 2^{2^a - 1}}{n}.$$

Soit S un système de triples déterminé par Σ. Si $\left\{ |x, 1+x|, |x, \alpha^{\omega_i} x| \right\}$ est le diviseur du groupe métacyclique d'ordre le plus élevé qui laisse S invariant, nous dirons que S est de *la classe* ω_i. x_i est ainsi le nombre des systémes S différents de la classe ω_i. Grâce à une idée heureuse de l'un de mes élèves, *nous sommes maintenant en état de donner aisément, quel que soit le système de caractéristiques Σ dans chacun des cas ci-dessus, le nombre x_i pour chaque classe ω_i.*

Nous désignerons par P. le mémoire principal, par C. le mémoire du vol. 4. Les références de paragraphes, chiffres et notes, données dans le texte, se rapportent exclusivement à ces deux mémoires, sauf celles qui sans autre indication se rapportent au texte actuel. Pour faciliter la lecture, nous avons préféré garder strictement à chaque lettre le sens qui lui a été fixé jusqu'ici, à l'inconvénient de compliquer parfois un peu notre notation et de ne pouvoir, par exemple, employer au § 5 pour la fonction de Möbius la lettre habituelle μ, déjà introduite dans P. avec un autre sens.

2. Une colonne cyclique de triples (P. chap. I) sera désignée par:

A, si elle est quelconque,
B, si sa caractéristique est principale (P. § 31),
C, si sa caractéristique n'est pas principale.

Théorème 1. *La première puissance positive de* $t = |x, \alpha x|$ *qui change une colonne* A *en elle-même, est* t^{2n} *ou* t^{6n}, *selon que* A *est une colonne* B *ou une colonne* C.

Preuve. La série des colonnes déduites de A par les puissances successives de t, se présente de la façon suivante:

$$A = A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{\frac{\eta}{2}-1},\ A_0',\ A_1',\ \ldots,\ A'_{\frac{\eta}{2}-1},\ A_0,\ A_1,\ \ldots, \qquad (1)$$

la colonue A_i' désignant la conjuguée de A_i et η étant la première puissance positive de t qui change A en elle-même. Les raisons en sont exactement celles qui ont fait écrire la série (16), P. § 23, troisième alinéa; il est inutile de les reproduire ici.

1^er^ cas. Si A est une colonne B, on ne peut avoir $\eta < 2n$, sinon une puissance de $\tau = |\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ inférieure à n changerait la caractéristique de cette colonne en elle-même, ce qui n'est pas (P. § 31). D'autre part t^{2n} change une colonne B en elle-même, puisque τ^n change une caractéristique principale en elle-même.

2^ème^ cas. Si A est une colonne C, on ne peut avoir $\eta < 6n$, sinon une puissance de $\tau = |\underline{x}, \underline{\alpha x}|$ inférieure à $3n$ changerait la caractéristique de cette colonne en elle-même, ce qui n'est pas (P. § 32). D'autre part t^{6n} qui est l'identité, change chaque colonne de triples en elle-même.

3. Soit un système de triples S de la classe ω[2]), déterminé par le système de caractéristiques Σ qui appartient à d. ω est donc la première puissance positive de t qui change S en lui-même et des systèmes de triples déterminés par Σ, $2\mu = \frac{\omega}{d}$ sont équivalents à S, S inclus (P. § 46).

Théorème 2. *Le nombre* x *des systèmes* S *différents de la classe* ω, *déterminés par* Σ, *est:*

$$x = \frac{2^q - M}{2\mu} \qquad (2)$$

où M *désigne le nombre des systèmes* S *déterminés par* Σ, *d'une classe* δ, $\delta < \omega$ *et diviseur de* ω, *et* q *est un exposant qui est fixé dans la suite.*

Preuve. Rappelons que η est $2n$ ou $6n$, selon que A est une colonne B ou une colonne C. ω est diviseur de $6n$ (P. § 23, théorème 7); il peut

[2]) Nous supprimons l'indice i; nous ne le reprendrons que là où il nous paraîtra utile de le remettre.

être diviseur de $2n$. Pour $\eta = 2n$, nous admettons que nous sommes dans le cas où ω est diviseur de $2n$.

Les puissances $t^0, t^\omega, t^{2\omega}, \ldots, t^{\left(\frac{\eta}{\omega}-1\right)\omega}, t^{\frac{\eta}{\omega}\omega}, t^{\eta+\omega}, \ldots$, changent S en lui-même et A en un cycle de colonnes, qui sont toutes contenues dans S:

$$A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{\frac{\eta}{\omega}-1}, A_0, A_1, \ldots \tag{3}$$

Les $\frac{\eta}{\omega}$ colonnes de ce cycle sont différentes entre elles puisqu'elles font partie de la série (1), et il n'y en a pas deux conjugées entre elles puisqu'elles appartiennent toutes au système S.

Les substitutions du groupe $\{t^\omega\}$ répartissent donc les colonnes du système S en cycles du type (3) de $\frac{\eta}{\omega}$ colonnes chacun.

Soit A' la conjugée de la colonne A et S_1 un système de triples déterminé par Σ qui contient A'. Si S_1 est de la classe ω, S_1 contient le cycle entier:

$$A' = A_0', A_1', A_2', \ldots, A'_{\frac{\eta}{\omega}-1}, A_0', A_1', \ldots, \tag{4}$$

des colonnes respectivement conjuguées à celles du cycle (3). La raison en est toujours la même: une substitution $|x, \beta x|$ change deux colonnes conjuguées en deux colonnes conjuguées (P. § 45, second alinéa).

D'autre part, il est évident que si nous remplaçons dans S un ou plusieurs des cycles (3) par le ou les cycles (4) correspondants, constitués des colonnes conjuguées correspondantes, nous obtenons un système que la substitution t^ω transforme en lui-même.

En faisant ce remplacement de toutes les manières possibles, nous obtenons donc *tous* les systèmes de triples déterminés par Σ, qui sont invariants par le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^\omega x|\}$, ou par un diviseur métacyclique plus étendu qui contient ce dernier, et donc d'ordre multiple de l'ordre de ce dernier; autrement dit, *qui sont de la classe* ω, *ou d'une classe* δ, $\delta < \omega$ *et diviseur de* ω. Soit q le nombre total des cycles (3) de colonnes B et C contenus dans S. Le nombre des systèmes en question est:

$$\binom{q}{0} + \binom{q}{1} + \binom{q}{2} + \ldots + \binom{q}{q} = 2^q.$$

Désignons par M le nombre de ceux d'entre eux qui sont d'une classe inférieure δ, $\delta < \omega$ et diviseur de ω. Le nombre x cherché des systèmes

S différents de la classe ω, déterminés par Σ, est bien celui de la formule (2), ce qui était à démontrer.

4. Nous distinguerons maintenant les deux cas:

1^er cas. ω *est diviseur de* $2n$. Dans ce cas, si la colonne A du cycle (3) est une colonne B, le cycle contient $\frac{\eta}{\omega} = \frac{2n}{\omega}$ colonnes; si elle est une colonne C, le cycle contient $\frac{\eta}{\omega} = \frac{6n}{\omega}$ colonnes. Soit b le nombre des caractéristiques principales de Σ; S contient b colonnes B qui se répartissent en $\frac{b\omega}{2n}$ cycles du type (3). Il reste dans S $n-b$ colonnes C qui se répartissent en $\frac{(n-b)\omega}{6n}$ cycles du type (3). On a donc $q = \frac{b\omega}{2n} + \frac{(n-b)\omega}{6n} = \frac{\omega}{6} + \frac{b\omega}{3n}$ et l'expression (2) prend la forme définitive:

$$x = \frac{2^{\frac{\omega}{6}+\frac{b\omega}{3n}} - M}{2\mu} \tag{5}$$

2^ème cas. ω *n'est que diviseur de* $6n$. Dans ce cas, dans le raisonnement du § précédent, η *ne représente que* $6n$. S peut encore contenir des colonnes B comme dans le cas précédent. Une colonne B de S est changée en elle-même par t^{2n}, t^{4n}, t^{6n}, ... (théorème 1), et uniquement par ces puissances de t; mais dans les puissances t^{ω}, $t^{2\omega}$, $t^{3\omega}$, ..., qui *seules* changent S en lui-même, seule intervient t^{6n}, puisque $2n$, et par suite $4n = 6n - 2n$, ne sont pas multiples de ω. Donc, que A dans S soit une colonne B ou une colonne C, le cycle (3) contient $\frac{\eta}{\omega} = \frac{6n}{\omega}$ colonnes et les n colonnes de S se répartissent en $\frac{n\omega}{6n} = \frac{\omega}{6}$ cycles pareils. L'expression (2) prend dans ce cas la forme plus simple:

$$x = \frac{2^{\frac{\omega}{6}} - M}{2\mu} \tag{6}$$

5. Nous ferons encore les remarques suivantes de portée générale:

1°. Si ω est diviseur de $2n$, chaque δ, $\delta < \omega$ et diviseur de ω, est diviseur de $2n$. Donc pour ω et pour tous ses diviseurs propres[3]) δ, la forme de l'expression de x est la même, la forme (5).

[3]) Nous entendrons par diviseur propre d'un nombre, un diviseur plus petit que ce nombre.

Il est évident d'autre part que si ω n'est que diviseur de $6n$, dans ses diviseurs propres δ, il peut y en avoir qui sont diviseurs de $2n$.

2°. On a $\frac{3n}{d} = 2^a n_1$, $6n = 2^{a+1} n_1 d$, $2n = 2^{a+1} \frac{n_1 d}{3}$,

$$\omega = 2\mu d = 2^{a+1} \mu' d \text{ où } \mu' \text{ est diviseur de } n_1,$$

$\frac{2n}{\omega} = \frac{n_1 d}{3\mu' d} = \frac{n_1}{3\mu'}$, d'où n_1 est multiple de 3 si ω est diviseur de $2n$. Donc, lorsque n_1 ne contient pas le facteur 3, aucun ω ne peut être diviseur de $2n$. La forme de l'expression de x est la même pour tous les ω, soit la forme (6).

3°. Les valeurs possibles de ω sont $\omega_i = 2\mu_i d = 2^{a+1}\mu_i' d$, $i = 1, 2 \ldots, k$, $\mu_i = 2^a \mu_i'$, $\mu_1' = 1$, μ_2', μ_3', ..., $\mu_k' = n_1$ étant l'ensemble des diviseurs de n_1, dans $\frac{3n}{d} = 2^a n_1$ (§ 1, 4ème alinéa). Pour $d = 1$ cet ensemble, qui serait dans ce cas celui des diviseurs de n_1, dans $3n = 2^a n_1$, est à remplacer par celui plus restreint des diviseurs de n_1' dans $n = 2^a n_1'$. Les diviseurs μ_i' sont ainsi les mêmes dans les deux cas $d = 1$ et $d = 3$ (même alinéa).

Les diviseurs propres δ de ω, dont il est question sous 1° et dans l'énoncé et la démonstration du théorème 2, sont donc uniquement de la forme $\delta = 2^{a+1}\mu'' d$ où μ'' diviseur de n_1 (ou de n_1'), est en même temps diviseur propre de μ'.

4°. Les valeurs μ_i et ω_i ne dépendent que de n et d. Donc, *pour tous les systèmes de caractéristiques Σ appartenant à d, les classes ω_i sont les mêmes.* L'exposant q dans la forme (5) ne dépend que de b, en plus de ω. Donc, puisque les termes qui constituent M se calculent par les mêmes expressions (5) ou (6), *pour tous les systèmes de caractéristiques Σ appartenant à d et formés avec le même nombre de caractéristiques principales, les nombres x_i correspondants aux classes ω_i sont les mêmes.*

5°. Dans le cas où la forme de l'expression de x à employer est la même pour ω et tous ses diviseurs propres δ, on peut calculer M dans l'expression de x correspondante à ω au moyen de la formule dénommée *inversion de Möbius.* Reprenons l'expression générale de x (2), du théorème 2:

$$2\mu x = 2^q - M, \text{ c'est-à-dire, } 2^{a+1}\mu' x = 2^q - M, \tag{7}$$

où M est le nombre des systèmes S des classes δ, $\delta < \omega$ et diviseur de ω. Le nombre des systèmes S de la classe δ, δ diviseur propre de ω, est $\frac{\delta}{d}\, x(\delta) = 2^{a+1}\mu''\, x(\delta)$, μ'' diviseur propre de μ', $x(\delta)$ étant la valeur de x correspondante à δ. L'égalité (7) devient ainsi:

$$2^{a+1}\mu' x(\omega) = 2^q - \sum_{\mu''/\mu'}{}' 2^{a+1}\mu'' x(\delta) \quad \text{ou} \quad \sum_{\mu''/\mu'} \mu'' x(\delta) = 2^{q-a-1}. \qquad (8)$$

Dans la sommation Σ', μ'' parcourt les diviseurs propres de μ'; dans la sommation Σ, μ'' parcourt les diviseurs de μ', μ' inclus[4]).

δ est fonction de μ'' seul, a et d étant fixés, et q est fonction de ω et par suite de μ' seul, le système Σ et donc b étant fixés. Dans la seconde égalité (8) nous écrirons $x(\mu'')$ au lieu de $x(\delta)$ et $q(\mu')$ au lieu de q. L'égalité devient, $F(\mu'')$ étant la fonction $\mu'' x(\mu'')$ et $G(\mu')$, la fonction $2^{q(\mu')-a-1}$:

$$\sum_{\mu''/\mu'} F(\mu'') = G(\mu').$$

La formule d'inversion précitée donne alors:

$$F(\mu') = \sum_{\mu''/\mu'} \lambda(\mu'')\, G\left(\frac{\mu'}{\mu''}\right), \qquad (9)$$

en notant par $\lambda(\mu'')$ la fonction dite de Möbius et dont le sens est le suivant:

$\lambda(\mu'') = 1$ pour $\mu'' = 1$,

$\lambda(\mu'') = (-1)^r$ si μ'' est le produit de r ($r \geqq 1$) facteurs premiers différents,

$\lambda(\mu'') = 0$ si μ'' est divisible au moins par un facteur premier au carré.

On a donc:
$$\mu' x(\mu') = \sum_{\mu''/\mu'} \lambda(\mu'')\, 2^{q\left(\frac{\mu'}{\mu''}\right)-a-1}. \qquad (10)$$

Ainsi la valeur de $x(\mu')$ est complètement déterminée par μ' et ses diviseurs.

---

4) L'équation indéterminée (50), P. § 46, que nous avons rappelée au § 1, 4ème alinéa, est le cas particulier de cette équation (8) correspondant à $\mu' = n_1$. En effet pour $\mu' = n_1$, $\omega = 2\mu d = 2^{a+1}\mu' d = 2^{a+1} n_1 d = 6n$; ω n'étant pas diviseur de $2n$, on a $q = \frac{\omega}{6} = n$ et la seconde forme de l'égalité (8) revient à: $\mu_1' x_1 + \mu_2' x_2 + \ldots + \mu'_k x_k = 2^{n-a-1}$, les diviseurs de n_1 étant $\mu_1', \mu_2', \ldots, \mu'_k$.

6. *Les cas $d = 1$ et $d = 3$.*

Pour $d = 1$, $\omega_i = 2\mu_i = 2^{a+1}\mu_i'$, μ_i' parcourant les diviseurs de n_1' dans $n = 2^a n_1'$. On a $2n = 2^{a+1} n_1'$. Donc *chaque ω est diviseur de $2n$.* Pour chaque ω la forme de l'expression de x correspondante est la forme (5), qui devient, puisque pour le système des caractéristiques principales $b = n$:

$$x = \frac{2^{\frac{\omega}{2}} - M}{2\mu} = \frac{2^{\mu} - M}{2\mu}. \tag{11}$$

Ainsi $q(\mu') = \frac{\omega}{2} = \mu = 2^a\mu'$. La formule (10) nous donne pour le nombre x des systèmes de triples S différents de la classe ω, déterminés par le système des caractéristiques principales:

$$x = \frac{1}{\mu'} \sum_{\mu''/\mu'} \lambda(\mu'')\, 2^{2^a \frac{\mu'}{\mu''} - a - 1}. \tag{12}$$

Pour $d = 3$, $\omega_i = 6\mu_i = 3 \cdot 2^{a+1}\mu_i'$, μ_i' parcourant les mêmes diviseurs de $n_1' = n_1$, dans ce cas $\frac{3n}{3} = n = 2^a n_1 = 2^a n_1'$. $\omega_1 = 3 \cdot 2^{a+1}$ est diviseur de $2n = 2^{a+1} n_1$ lorsque n_1 et donc n est multiple de 3; $\omega_k = 3 \cdot 2^{a+1} n_1 = 6n$ n'est que diviseur de $6n$. Donc lorsque n est multiple de 3, les deux formes de l'expression de x, (5) et (6), pourraient intervenir. Mais pour un système de caractéristiques appartenant à $d = 3$, on a $b = 0$ (P. § 38, dernier alinéa). Les deux expressions prennent ainsi la même forme:

$$x = \frac{2^{\frac{\omega}{6}} - M}{2\mu} = \frac{2^{\mu} - M}{2\mu}. \tag{13}$$

Ici $q(\mu') = \frac{\omega}{6} = \mu = 2^a\mu'$. L'expression de x correspondante à (12) sera évidemment la même que (12). D'ailleurs l'identité des deux derniers membres de (11) et (13) établit déjà l'identité des x_i correspondants aux mêmes μ_i' dans les deux cas $d = 1$ et $d = 3$; c'est ce qui a été trouvé déjà dans C. théorème 1, p. 184 (rappelé au § 1, 5ème alinéa).

Nous exprimerons encore une fois l'ensemble du résultat: *Soit Σ_1 le système des caractéristiques principales et Σ_2 un système de caractéristiques appartenant à $d = 3$. A chaque système de triples S déterminé par Σ_1*

possédant le diviseur métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^{2\mu}x|\}$, *correspond un système de triples* S' *déterminé par* Σ_2 *possédant le diviseur métacyclique* $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^{6\mu}x|\}$ *et inversement;* $\mu = 2^a\mu'$; μ' *est chaque diviseur de* n_1, n_1 *étant le produit de tous les facteurs premiers impairs de* n.

On a dans (12) $x \gtreqless 0$, donc

$$\sum_{\mu''/\mu'} \lambda(\mu'')\, 2^{2^a \frac{\mu'}{\mu''} - a - 1} \gtreqless 0. \tag{14}$$

Pour $\mu' = 1$, cette somme est $\lambda(1)\, 2^{2^a - a - 1} = 2^{2^a - a - 1}$, c'est-à-dire $x_1 = 2^{2^a - a - 1} > 0$.

Pour $\mu' = n_1 = \frac{n}{2^a}$, cette somme est $\sum_{\mu''/n_1} \lambda(\mu'')\, 2^{\frac{n}{\mu''} - a - 1}$. D'après C., théorème 2, p. 184, elle est > 0, puisque $x_{k'} = \frac{1}{n_1} \sum_{\mu''/n_1} \lambda(\mu'')\, 2^{\frac{n}{\mu''} - a - 1} > 0$.
Il est probable que cette même somme (14) est > 0 pour chaque μ', autrement dit qu'il existe des systèmes de triples S déterminés par Σ_1 ou Σ_2 *de chaque classe* ω_i.

Il en est ainsi déjà pour $n = 2^a p^r$, c'est-à-dire dans le cas où n_1 est puissance d'un seul nombre premier. En effet, on a dans ce cas $\mu' = p^s$, $0 \lesseqgtr s \lesseqgtr r$, $\mu'' = p^t$, $0 \lesseqgtr t \lesseqgtr s$, $\lambda(\mu'') = 1, -1, 0$, selon que $t = 0$, $t = 1$, $t > 1$, et par suite:

$$x = \frac{1}{p^s} \sum_{t=0,1} \lambda(p^t)\, 2^{2^a p^{s-t} - a - 1} = \frac{1}{p^s} \left\{ 2^{2^a p^s - a - 1} - 2^{2^a p^{s-1} - a - 1} \right\} > 0.\text{[5]}$$

Nous retrouvons pour $r = 1$, les résultats du théorème 3, C., p. 184 (rappelés au § 1, 5ème alinéa).

7. *Les cas* $d = 3n$, $\frac{3n}{2}$ *et* n.

Les cas $d = 3n$ et $\frac{3n}{2}$ sont simples et ont été déjà traités (P. § 47, 1° et 2°).

---

[5]) Pour $s = 0$, le second terme de la parenthèse est à laisser de côté.

Pour $d = n$, $\frac{3n}{d} = 3$; $a = 0$, $n_1 = 3$.

Les diviseurs μ_i' de n_1 sont $\mu_1' = 1$, $\mu_2' = 3$.

Les valeurs de ω_i sont $\omega_1 = 2n$ et $\omega_2 = 6n$.

Les systèmes de caractéristiques appartenant à $d = n$ contiennent $l = n - 3m$ caractéristiques principales (P. § 40). On a donc, ω_1 étant diviseur de $2n$ et ω_2 diviseur de $6n$ seulement:

$$x_1 = \frac{2^{\frac{n}{3}+\frac{2l}{3}}}{2} = \frac{2^{n-2m}}{2} = 2^{n-1-2m} = 2^{l+m-1}$$

$$x_2 = \frac{2^n - 2^{n-2m}}{6} = \frac{2^{n-1} - 2^{n-1-2m}}{3} = \frac{2^{n-1} - 2^{l+m-1}}{3}.$$

On a $m > 0$, sinon le système est celui des caractéristiques principales. On a donc $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$. *Ainsi il existe des systèmes de triples des deux classes possibles* $\omega_1 = 2n$ *et* $\omega_2 = 6n$. *Le nombre de ces systèmes dépend de* l *(ou de* m*), c'est-à-dire du nombre des caractéristiques principales (ou non principales) que contient* Σ. *Conformément à ce qui a été dit au § 5, 4°, tous les systèmes de caractéristiques appartenant à* n, *qui ont le même nombre de caractéristiques principales, déterminent les mêmes nombres de systèmes de triples différents des deux classes.*

8. *Le cas où* d *et* n *ont un p. g. c. d.* $\delta > 1$, $< d$ *et* n.[6])

On a dans ce cas $d = 3\delta$, $n = n'\delta$, 3 et n' premiers entre eux (P. § 44, 1er alinéa); $\frac{3n}{d} = \frac{3n}{3\delta} = \frac{n}{\delta} = n' = 2^a n_1$. Puisque n' et 3 sont premiers entre eux, n_1 ne contient pas le facteur 3; donc aucun ω ne peut être diviseur de $2n$ (§ 5, 2°).

On aura dans ce cas, d'après le § 5, 5° et la formule (10), puisque $\omega = 2\mu d = 6\mu\delta$ et $q(\mu') = \frac{\omega}{6} = \mu\delta = 2^a\mu'\delta$:

$$\mu' x(\mu') = \sum_{\mu''/\mu'} \lambda(\mu'')\, 2^{2^a \frac{\mu'}{\mu''}\delta - a - 1} \tag{15}$$

[6]) Le cas $d = \frac{3n}{2}$, vu au § précédent, est contenu à nouveau dans notre hypothèse. En effet dans ce cas n est pair, $\delta = \frac{n}{2}$, $\frac{n}{\delta} = 2$, $a = 1$, $n_1 = 1$, $\mu_1' = \mu'_k = 1 = n_1$, $\omega_1 = \omega_k = 4d = 6n$, et la formule (15) redonne immédiatement ce qui a été trouvé déjà (P. § 47, 2°):

$$x_1 = \lambda(1)\, 2^{2^a \frac{n}{2} - a - 1} = 2^{2\delta - 1 - 1} = 2^{n-2}.$$

Les mêmes observations faites à la fin du § 6 sont à faire ici sur la valeur *positive* ou *nulle* de $x(\mu')$, sauf qu'il n'a pas été établi jusqu'ici que x_k ou $x(n_1)$, correspondant au plus grand diviseur $\mu' = n_1$, est effectivement > 0. La formule (15) et la valeur de $x(\mu')$ qu'elle donne ne diffèrent d'ailleurs de la formule (12) et de la valeur de $x(\mu')$ dans les cas $d = 1$ et 3, que par l'adjonction du facteur δ au premier terme de l'exposant de 2.

9. *Le cas où d est diviseur de n, $< n$ et > 3.*

Dans ce cas $\frac{n}{d}$ est entier, $3\frac{n}{d} = 2^a n_1$ est multiple de 3. Donc n_1 contient le facteur 3 et ω peut être diviseur de $2n$ (§ 5, 2°). $\frac{2n}{\omega} = \frac{n_1}{3\mu'}$. Si $\frac{n_1}{\mu'}$ contient encore le facteur 3, ω est diviseur de $2n$, sinon pas.

1er cas. $\frac{n_1}{\mu'}$ contient le facteur 3; ω est diviseur de $2n$. Dans ce cas, en vertu du § 5, 1° et 4°, $x(\mu')$ est encore donné par la formule (10). Un système de caractéristiques appartenant à d, d diviseur de n, $< n$ et > 3, est formé de $l\frac{n}{d}$ caractéristiques principales et $3m\frac{n}{d}$ caractéristiques non principales, avec $3m + l = d$ (P. § 42). On a:

$$q(\mu') = \frac{\omega}{6} + \frac{b\omega}{3n} = \frac{\omega}{6} + \frac{l\omega}{3d} = \frac{2\mu d}{6} + \frac{2\mu l}{3}$$

$$= \frac{\mu}{3}(d + 2l) = \frac{2^a\mu'}{3}(d + 2l) = 2^a\mu'(d - 2m) = 2^a\mu'(l + m).$$

Donc
$$\mu' x(\mu') = \sum_{\mu''/\mu'} \lambda(\mu'')\, 2^{2^a \frac{\mu'}{\mu''}(l+m) - a - 1}. \tag{16}$$

2ème cas. $\frac{n_1}{\mu'}$ ne contient plus le facteur 3; ω ne divise que $6n$. Ce cas est le seul où nous ne pouvons plus donner pour $x(\mu')$ une expression complète de sa valeur. Dans les diviseurs μ'' de μ', au moins l'un, $\mu'' = 1$, donne un diviseur δ de ω qui est diviseur de $2n$; en effet, $\frac{2n}{\delta} = \frac{n_1}{3}$ et n_1 contient le facteur 3. Par conséquent, les termes qui entrent dans la somme $M = \sum_{\mu''/\mu'}' 2^{\alpha+1} \mu'' x(\delta)$ des expressions (7) et (8), dans lesquelles, ω ne divisant que $6n$, $m = \frac{\omega}{6}$, se calculent en partie avec la forme (5), en partie avec la forme (6) de l'expression de x. Nous ne pouvons donc pas nous servir sans autre de la formule d'inversion utilisée au § 5, 5° . Il ne nous reste qu'à calculer de proche en proche chaque $x(\delta)$ au moyen des $x(\delta')$ préalablement obtenus, $\delta' = 2^{\alpha+1} \mu''' d$ où μ''', diviseur de n_1, est en même temps diviseur propre de μ''.

10. Nous donnerons en terminant, les résultats qu'a obtenus G. Belhôte dans cette recherche des systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour les deux cas $N = 61$ et $N = 73$.

Cette recherche des systèmes cycliques de triples de Steiner différents par la méthode que nous avons exposée dans P., a été effectuée jusqu'ici pour les nombres N de la forme $6n + 1$ jusqu'à $N = 43$ inclus, et pour ceux de la forme $6n + 3$ jusqu'à $N = 33$ inclus. Nous avons donné dans P. § 59, les tableaux complets des résultats obtenus pour ces premières valeurs de N. Cette méthode a été établie pour le cas de $N = 6n + 1$ *premier* et elle s'y applique immédiatement. Elle s'applique moins immédiatement au cas de $N = 6n + 1$ puissance de nombre premier et au cas de $N = 6n + 3$ où $2n + 1$ est premier ou puissance d'un nombre premier, et encore bien moins au cas de $N = 6n + 1$ ou $N = 6n + 3$ composé quelconque (voir P. § 5).

Après 43, les deux nombres de la forme $6n + 1$ qui se présentent sont 49 et 55; le premier est puissance de nombre premier, le second est composé, produit de deux facteurs premiers différents. C'est la raison pour laquelle nous avons passé au cas du nombre *premier* 61; le cas du nombre premier 73 a été pris ensuite, avant 67, parce que $n = 12$, à l'encontre de $n = 10$ et $n = 11$, contient déjà un plus grand nombre de diviseurs. Une partie des résultats de G. Belhôte, dans l'obtention des systèmes de caractéristiques pour $N = 61$, ont été vérifiés par mes propres résultats; c'est un garant de plus qu'il ne s'est pas trompé ailleurs. La méthode d'ailleurs comporte en elle-même, dans une certaine mesure, sa propre vérification (P. § 43, premier alinéa).

11. $\boldsymbol{N = 61}$ ($n = 10$, $n - 1 = 9$, $3n = 30$, $\alpha = 2$).

Les $n(3n-2) = 280$ caractéristiques se répartissent en une colonne de $n = 10$ caractéristiques qui est le système des caractéristiques principales et $n - 1 = 9$ colonnes de 30 caractéristiques (P. § 33).

I. Systèmes de caractéristiques différents.

Diviseurs d de $3n$: 1, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

Les exposants de $\alpha = 2$ dans les caractéristiques de tête des 9 colonnes, peuvent être choisis:[7])

$$016,\ 022'',\ 032',\ 048'',\ 079',\ 01'4',\ 03'7',\ 05'3'',\ 06'5''. \tag{17}$$

$\boxed{d=3}$ *Deux* des triples (17), $022''$ et $03'7'$, réduits (mod 3), donnent 012 (P. § 38).

$\boxed{d=5}$ C'est le cas de d diviseur de n, $< n$. (P. § 42).

Cinq des triples (17), réduits (mod 5), n'ont pas d'élément répété; ils donnent trois fois la colonne 023 et deux fois la colonne 014. On a $3m + l = 5$; à part le système des caractéristiques principales ($m = 0$, $l = 5$), la seule possibilité est $m = 1$, $l = 2$. On a donc immédiatement *5 systèmes* de caractéristiques différents, représentés:

trois par 023 (triple), 1, 4 (éléments),

deux par 014 (triple), 2, 3 (éléments).

$\boxed{d=6}$ C'est le cas où d et n ont un p. g. c. d. $\delta > 1$, $< d$ et n. (P. § 44).

$\delta = 2$. Cinq encore des triples (17) réduits (mod 6) n'ont pas d'élément répété; ils donnent les colonnes suivantes, dans l'ordre des triples (17):

$$024,\ 025,\ 015,\ 035 \text{ (cette dernière deux fois).} \tag{18}$$

Il y a deux constructions possibles (P. § 44, I et II). Dans la première, le système réduit est formé de $\delta = 2$ triples des colonnes (18) contenant les 6 éléments 0, 1, ..., 5. On trouve immédiatement, à côté des deux systèmes appartenant à 3 déjà connus, *3 systèmes* appartenant à 6. Dans la seconde construction, on a $m + l = 2$; la seule possibilité, en dehors des systèmes déjà trouvés, est $m = 1$, $l = 1$. On a *1 système* représenté par: 135 (triple), 0 (élément).

$\boxed{d=10=n}$ Nous savons déjà que les $n-1 = 9$ triples (17), réduits (mod $n = 10$), donnent $n-2 = 8$ colonnes réduites avec triples à éléments différents, sur lesquelles deux seulement sont la même colonne

[7]) Les entiers 0, 1, 2, ..., 10, 11, ..., 20, 21, ..., 29 sont notés 0, 1, ..., $0'$, $1'$, ..., $0''$, $1''$, ..., $9''$.

(P. § 40, second alinéa). On a $3m+l=10$. Les possibilités, en dehors du cas $m=0$, $l=10$, sont:

$$1^{\circ}\ m=1,\ l=7,$$
$$2^{\circ}\ m=2,\ l=4,$$
$$3^{\circ}\ m=3,\ l=1.$$

Dans le cas 1°, on a sans autre $n-2=8$ *systèmes* de caractéristiques différents appartenant à 10 (P. § 41, A, 2° et 3° lettre a).

Dans le cas 2°, la recherche exige un temps très court. La méthode est restée en principe celle employée déjà pour les valeurs précédentes de N (P., chap. VI, en particulier § 57, $d=15$, § 58, $d=9$), avec certaines simplifications de détail apportées par G. Belhôte. Elle consiste à chercher successivement les systèmes réduits *différents* sans élément répété, contenant:

1° le triple de tête de la 1ère col. et un triple pris dans les 8 col.,
2° „ „ „ „ „ 2ème „ „ „ „ „ „ 7 dernières col.,
3° „ „ „ „ „ 3ème „ „ „ „ „ „ 6 „ „,

et ainsi de suite. On obtient, à côté des 5 systèmes appartenant à 5 déjà trouvés, *90 systèmes* appartenant à 10.

Dans le cas 3°, la recherche exige un temps un peu plus long. Avec le triple de tête de la 1ère colonne, entrent deux triples pris dans les 8 colonnes; avec le triple de tête de la 2ème colonne, deux triples pris dans les 7 dernières colonnes, et ainsi de suite. On obtient *81 systèmes* appartenant à 10.

$\boxed{d=15=\frac{3n}{2}}$ Le cas $d=\frac{3n}{2}$ rentre dans le cas où d et n ont un p. g. c. d. $\delta>1$, $<d$ et n; $\delta=\frac{n}{2}$ (note 6).

Les 9 triples (17), réduits (mod 15), donnent 8 colonnes réduites avec triples à éléments différents. Ces 8 colonnes sont différentes entre elles. Dans la première construction, les systèmes réduits sont formés de $\delta=5$ triples pris dans ces 8 colonnes réduites. La recherche est plus longue. On obtient, à côté des deux systèmes de caractéristiques qui appartiennent à 3, *114 systèmes* qui appartiennent à 15.

Dans la seconde construction, on a $m+l=5$. Les possibilités, en dehors des systèmes déjà trouvés, sont:

1° $m = 1$, $l = 4$; systèmes avec 8 caractéristiques principales,
2° $m = 2$, $l = 3$; „ „ 6 „ „ ,
3° $m = 3$, $l = 2$; „ „ 4 „ „ ,
4° $m = 4$, $l = 1$; „ „ 2 „ „ .

On trouve dans le cas 1°, *o système*; dans le cas 2°, *1 système* appartenant à 15; dans le cas 3°, *1 système* appartenant à 15, à côté des 5 systèmes appartenant à 5; dans le cas 4°, *23 systèmes* appartenant à 15.

$\boxed{d = 30 = 3n}$ Il s'agit maintenant des 9 colonnes (17) de 30 triples chacune, plus la colonne de 10 triples correspondant aux caractéristiques principales (P. § 43), et d'obtenir dans ces 10 colonnes tous les ensembles différents[8]) de 10 triples, sans élément répété. La recherche théoriquement pourrait se faire, en procédant comme nous l'avons fait jusqu'ici. Pratiquement, elle devient à peu près impossible en raison du temps qu'elle exigerait et aussi sans doute de l'espace qu'il faudrait pour écrire le nombre déjà considérable de systèmes que l'on trouverait (P. § 43, dernier alinéa).

II. Systèmes cycliques de triples différents.

$\boxed{d = 1 \text{ et } 3}$ $n = 10 = 2.5$. Nous sommes dans le cas du dernier alinéa du § 6, avec $a = 1$, $r = 1$, $s = 0$ et 1. On a, correspondant à:

$$\mu_1' = 1,\ \omega_1 = 2\mu_1 = 2^{a+1}\mu_1' \text{ pour } d = 1,\ \omega_1 = 6\mu_1 = 3.2^{a+1}\mu_1' \text{ pour } d = 3,\quad x_1 = \mathbf{1};$$

$$\mu_2' = 5,\ \omega_2 = 2\mu_2 = 2^{a+1}\mu_2' \text{ pour } d = 1,\ \omega_2 = 6\mu_2 = 3.2^{a+1}\mu_2' \text{ pour } d = 3,\quad x_2 = \mathbf{51}.$$

On a donc pour $d = 1$, *52 systèmes* cycliques de triples différents,
pour $d = 3$, *104 systèmes* „ „ „ „ .

$\boxed{d = 5}$ Le nombre des caractér. principales $b = 4$ pour les 5 systèmes:

$$\frac{3n}{d} = \frac{30}{5} = 6 = 2.3;\ a = 1,\ n_1 = 3,\ \mu_1' = 1,\ \mu_2' = 3,$$

$$\omega_1 = 2\mu_1 d = 2^{a+1}\mu_1' d = 20, \qquad \omega_2 = 2\mu_2 d = 2^{a+1}\mu_2' d = 60.$$

[8]) c'est-à-dire non déductibles l'un de l'autre par une substitution du groupe $\{(012\ldots\overline{3n-1})\}$.

Dans ce cas de d diviseur de n, $< n$, on doit avoir les deux cas du § 9; en effet, ω_1 est diviseur de $2n$, ω_2 ne l'est pas. On a:

$$\text{Avec la forme (5)}: \ x_1 = \frac{2^{\frac{\omega_1}{6}+\frac{b\omega_1}{3n}} - M}{2\mu_1} = \frac{2^6 - 0}{4} = 2^4 = 16,$$

$$\text{Avec la forme (6)}: \ x_2 = \frac{2^{\frac{\omega_2}{6}} - M}{2\mu_2} = \frac{2^{10} - 2^6}{12} = \frac{2^8 - 2^4}{3} = 80.$$

On a donc pour $d = 5$, *480 systèmes* cycliques de triples différents.

$\boxed{d=6}$ Dans ce cas où d et n ont un p. g. c. d. $\delta > 1$, $< d$ et n, le fait que le système de caractéristiques contienne des caractéristiques principales ou non, n'importe pas (§ 8). $\frac{3n}{d} = \frac{30}{6} = 2^0.5$. Nous sommes encore dans le cas du dernier alinéa du § 6 (§ 8, dernier alinéa), avec $a = 0$, $r = 1$, $s = 0$ et 1. On a, correspondant à:

$$\mu_1' = 1, \quad \omega_1 = 2\mu_1 d = 2^{a+1}\mu_1' d = 12,$$

$$x_1 = \frac{1}{p^0} 2^{2^a p^0 \delta - a - 1} = 2^{2^0 . 2 - 0 - 1} = 2,$$

$$\mu_2' = 5, \quad \omega_2 = 2\mu_2 d = 2^{a+1}\mu_2' d = 60,$$

$$x_2 = \frac{1}{p^1}\left\{2^{2^a p^1 \delta - a - 1} - 2^{2^a p^0 \delta - a - 1}\right\} = \frac{1}{5}\left\{2^9 - 2^1\right\} = 102.$$

On a donc pour $d = 6$: $4 \times 104 =$ *416 systèmes* cycliques de triples différents.

$\boxed{d = 10 = n}$ Les nombres x_1 et x_2 ne dépendent que du nombre des caractéristiques principales que contient le système de caractéristiques (§ 7):

Cas 1°, $l + m - 1 = 7$, $\quad x_1 = 2^7 = 128$, $\quad x_2 = \frac{2^9 - 2^7}{3} = 128$,

Cas 2°, $l + m - 1 = 5$, $\quad x_1 = 2^5 = 32$, $\quad x_2 = \frac{2^9 - 2^5}{3} = 160$,

Cas 3°, $l + m - 1 = 3$, $\quad x_1 = 2^3 = 8$, $\quad x_2 = \frac{2^9 - 2^3}{3} = 168$.

On a donc pour $d = 10$: $8 \times 256 + 90 \times 192 + 81 \times 176 =$ *33584 systèmes* cycliques de triples différents.

$\boxed{d = 15 = \frac{3n}{2}}$ Chaque système de caractéristiques appartenant à $d = \frac{3n}{2}$ détermine 2^{n-2} systèmes cycliques de triples différents de la classe $6n$ (note 6). On a ainsi pour $d = 15$: $139 \times 256 =$ *35584 systèmes* cycliques de triples différents.

12. $\boldsymbol{N = 73}$ ($n = 12$, $n - 1 = 11$, $3n = 36$, $\alpha = 5$).

Diviseurs d de $3n$: 1, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

I. Systèmes de caractéristiques différents.

Nous ne donnerons plus que les résultats en séparant simplement les cas et en indiquant si les systèmes s'obtiennent immédiatement, c'est-à-dire guère avec plus de temps qu'il n'en faut pour les écrire, ou avec une recherche plus ou moins longue. Par le nombre des colonnes réduites, nous entendrons naturellement seules celles dont les triples ont trois éléments différents.

$\boxed{d = 3}$ *3 systèmes* immédiats.

$\boxed{d = 4}$ Cas de d diviseur de n, $< n$. $3m + l = 4$. Seule possibilité: $m = 1$, $l = 1$. 5 colonnes réduites, donc *5 systèmes* immédiats.

$\boxed{d = 6}$ Cas de d diviseur de n, $< n$. $3m + l = 6$. 7 colonnes réduites dont 3 seulement sont différentes.

1° $m = 1$, $l = 3$; *7 systèmes* appartenant à 6, immédiats,

2° $m = 2$, $l = 0$; *6 systèmes* appartenant à 6, immédiats, à côté des 3 systèmes appartenant à 3 déjà trouvés.

$\boxed{d = 9}$ Cas où d et n ont un p. g. c. d. $\delta > 1$, $< d$ et n.

$\delta = 3$. 8 colonnes réduites dont 2 paires de colonnes identiques. Première construction: 3 triples dans les 8 colonnes réduites. La recherche n'est pas longue. On trouve, à côté encore des 3 systèmes qui appartiennent à 3, *18 systèmes* qui appartiennent à 9.
Seconde construction: $m + l = 3$. Cas $m = 2$, $l = 1$, *2 systèmes* presque immédiats; cas $m = 1$, $l = 2$, *0 système* (immédiat).

$\boxed{d = 12 = n}$ Ici la recherche devient longue, sauf pour certains systèmes qui s'écrivent immédiatement. C'est le dernier d d'ailleurs, pour $N = 73$, pour lequel la recherche complète peut encore s'aborder. Il s'agit donc de $n-2 = 10$ colonnes réduites de 12 triples. On a $3m + l = 12$:

1° $m = 1$, $l = 9$; *10 systèmes* appartenant à 12, immédiats.

2° $m = 2$, $l = 6$; *224 systèmes* appartenant à 12, à côté des 7 systèmes appartenant à 6 du cas 1° ci-dessus.

3° $m = 3$, $l = 3$; *810 systèmes* appartenant à 12, à côté des 5 systèmes qui appartiennent à 4.

4° $m = 4$, $l = 0$; *103 systèmes* appartenant à 12, à côté des 6 systèmes appartenant à 6 du cas 2° ci-dessus et des 3 systèmes qui appartiennent à 3.

Le procédé est toujours le même (voir les cas 2° et 3° pour $d = 10 = n$ du § précédent). Le fait que nous retrouvons les systèmes appartenant aux diviseurs d inférieurs, en nombre exact et à leur place, constitue la vérification dont nous parlions au § 10.

II. Systèmes cycliques de triples différents.

$\boxed{d = 1 \text{ et } 3}$ $n = 12 = 2^2 . 3$. Rien de nouveau par rapport au même cas du § précédent, sauf que $a = 2$. On trouve $x_1 = 2$, $x_2 = 170$. Donc pour $d = 1$, *172 systèmes*; pour $d = 3$, *516 systèmes.*

$\boxed{d = 4}$ $b = 3$ pour les 5 systèmes. $\frac{3n}{d} = 2^0 . 9$, $a = 0$, $n_1 = 9$;

$$\mu_1' = 1, \; \mu_2' = 3, \; \mu_3' = 9; \quad \omega_1 = 8, \; \omega_2 = 24, \; \omega_3 = 72.$$

ω_1 et ω_2 sont diviseurs de $2n$, ω_3 ne l'est pas (conforme au § 9). x_1 et x_2 se calculent par la formule (16), qui dans le cas où $n_1 = p^r$, reprend la forme donnée à la fin du § 6, avec l'adjonction seulement du facteur $(l + m)$ au premier terme de l'exposant de 2. On trouve $x_1 = 2$, $x_2 = 10$.

Pour x_3, la forme (6) donne $2\mu_3 x_3 = 2^{\frac{\omega_3}{6}} - (2\mu_1 x_1 + 2\mu_2 x_2)$, d'où $x_3 = 224$.
On a ainsi $5 (2 + 10 + 224) = $ *1180 systèmes.*

$\boxed{d = 6}$ $b = 6$ pour les 7 systèmes du cas 1° ; $b = 0$ pour les 6 systèmes du cas 2°.

$\frac{3n}{d} = 2 \cdot 3, \; a = 1, \; n_1 = 3; \; \mu_1' = 1, \; \mu_2' = 3; \; \omega_1 = 24 = 2n; \; \omega_2 = 72 = 6n.$

Formule (5) pour ω_1

$$\begin{cases} b = 6, \; x_1 = \dfrac{2^{\frac{\omega_1}{6} + \frac{6\omega_1}{3n}} - 0}{2\mu_1} = \dfrac{2^8}{4} = 64 \\[2ex] b = 0, \; x_1 = \dfrac{2^{\frac{\omega_1}{6}} - 0}{2\mu_1} = \dfrac{2^4}{4} = 4. \end{cases}$$

Formule (6) pour ω_2

$$\begin{cases} b = 6, \; x_2 = \dfrac{2^{\frac{\omega_2}{6}} - 256}{2\mu_2} = \dfrac{2^{12} - 2^8}{12} = 320 \\[2ex] b = 0, \; x_2 = \dfrac{2^{\frac{\omega_2}{6}} - 16}{2\mu_2} = \dfrac{2^{12} - 2^4}{12} = 340. \end{cases}$$

On a ainsi $7\,(320 + 64) + 6\,(340 + 4) = 4752$ *systèmes.*

$\boxed{d = 9}$ $\frac{3n}{d} = 2^2 \cdot 1, \quad a = 2, \quad n_1 = 1, \quad \mu_1' = 1, \quad \mu_1 = 4, \quad \omega_1 = 72.$

Avec la formule (15) on a: $x_1 = 2^{2^a \delta - a - 1} = 2^{2^2 \cdot 3 - 2 - 1} = 2^9 = 512.$
On a ainsi $20 \times 512 = 10240$ *systèmes.*

$\boxed{d = 12 = n}$ 1° $\quad l + m - 1 = 9, \quad x_1 = 2^9 = 512, \quad x_2 = \dfrac{2^{11} - 2^9}{3} = 512$

2° $\quad l + m - 1 = 7, \quad x_1 = 2^7 = 128, \quad x_2 = \dfrac{2^{11} - 2^7}{3} = 640$

3° $\quad l + m - 1 = 5, \quad x_1 = 2^5 = 32, \quad x_2 = \dfrac{2^{11} - 2^5}{3} = 672$

4° $\quad l + m - 1 = 3, \quad x_1 = 2^3 = 8, \quad x_2 = \dfrac{2^{11} - 2^3}{3} = 680.$

Total:
$10 \times 1024 + 224 \times 768 + 810 \times 704 + 103 \times 688 = 823376$ *systèmes.*

(Reçu le 24 janvier 1933)