

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 6 (1934)

Artikel: Über die Existenz von Lösungen zu Variationsproblemen n-ter Ordnung.
Autor: Bähler, Fridolin
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-7577>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Existenz von Lösungen zu Variationsproblemen n -ter Ordnung

Von FRIDOLIN BÄBLER, Göttingen

§ 1. Einleitung

Während Variationsprobleme erster Ordnung in der Literatur sehr ausgiebig behandelt worden sind, beschränkte sich meines Wissens das Studium von Variationsproblemen höherer Ordnung selbst in nur einer Variablen auf solche Probleme, deren Euler-Lagrange'schen Differentialgleichungen linear sind. Mit der Entscheidung von Existenzfragen der Variationsrechnung erstrebt man nicht bloß:

1. Die bekannten Weierstraß'schen existenziellen Einwände wenigstens für die einfachsten Funktionale zu beheben, sondern auch
2. die Lösungen von den aus Variationsproblemen sich ableitenden Differentialgleichungen zu garantieren, die noch gewissen Randbedingungen genügen. Auch diese zweite Fragestellung scheint außer in dem genannten Falle kaum in Angriff genommen.

Ich behandle Variationsprobleme der Form

$$\int_0^1 F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx = \text{Min}; \quad n \geq 2$$

unter der Legendre'schen Nebenbedingung $F_{y^{(n)}}(x, y^{(n)}) > 0$ und beweise hauptsächlich den folgenden

Hauptsatz. Wenn die Menge der zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen $y(x)$; $0 \leq x \leq 1$ durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert ist;

1. $y(0) = a_0$ $y(1) = b_0$ ¹⁾
2. $y^{(i)}(0) = a_i$ $y^{(i)}(1) = b_i$; $i = 1, 2, \dots, n-1$; a_i, b_i fest.
3. $y^{(n)}(x)$ ist stückweise stetig und

$$|y^{(n)}(x)| \leq M;$$

¹⁾ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir später $a_0 = b_0 = 0$.

dann hat unter der Legendre'schen Nebenbedingung $F_{y^{(n)}y^{(n)}} > 0$ das Variationsproblem

$$\int_0^1 F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx = \text{Min}$$

immer mindestens eine Lösung $u(x)$ mit **stetiger** n -ter Derivierter, falls noch $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ als Funktion von $n+2$ freien Variablen $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ betrachtet stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung inklusive zuläßt und falls die Menge der konkurrenzfähigen Funktionen aus mehr als einer Funktion besteht.

Die Lösung $u(x)$ genügt überall da, wo nicht $|u^{(n)}(x)| = M$ ist, der dem Problem entsprechenden Euler-Lagrange'schen Differentialgleichung, wofür noch die partiellen Ableitungen von $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ bis zur n -ten Ordnung inklusive stetig sind.

Daß es eine $n-1$ mal stetig differentiierbare Lösung mit *fast überall* existierendem n -tem Differentialquotienten gibt, ist eine *selbstverständliche* Folgerung erstens aus der Tatsache, daß die $y^{(n-1)}(x)$ eine kompakte Funktionenmenge bilden und zweitens aus der aus $F_{y^{(n)}y^{(n)}} > \alpha > 0$

folgenden Halbstetigkeit von $\int_0^1 F dx$ (vgl. Tonelli, Lehrbuch der Variationsrechnung Bd. I, Kap. 10, 11).

Hier, wie allgemein in der Variationsrechnung, besteht aber das *Hauptproblem* gerade in der genaueren Untersuchung der Existenz und der Stetigkeit der im Variationsproblem auftretenden höchsten und eventuell noch der höheren Ableitungen der Lösungsfunktion. Mein Ergebnis enthält in nuce auch die Lösbarkeit des Randwertproblems sehr allgemeiner Klassen von Differentialgleichungen, die aus einem Variationsproblem entspringen. Denn sobald die Schranke M für $|y^{(n)}|$ in dem obigen Satz für irgendein M von der n -ten Ableitung der Lösung des Variationsproblems nicht erreicht wird, erhält man in dieser Lösungsfunktion eine Lösung der Euler-Lagrange'schen Differentialgleichung mit vorgeschriebenen Randwerten. Darauf soll jedoch hier nicht eingegangen werden.

Schon das Beispiel

$$\mathcal{J} = \int_0^\pi (y'^2 - y^4) dx \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

lehrt, daß man unter den obigen schwachen Voraussetzungen für F keinen Existenzsatz erwarten darf, dessen Voraussetzungen die zugelassenen

Funktionen hinsichtlich ihrer Ableitungen keinen Einschränkungen unterwerfen. Gebe ich nämlich eine beliebige negative GröÙe N_0 vor, so kann ich beliebig viele stetig differentiierbare Funktionen finden, welche den vorgeschriebenen Randbedingungen genügen und die, in den Integranden eingesetzt, den Wert des Funktional kleiner machen als N_0 . Diese Funktionen sind

$$y = \nu \sin x$$

für alle genügend großen ν .

Es ist nämlich für diese Funktionen

$$\mathcal{J} = \nu^2 \int_0^\pi \cos^2 x \, dx - \nu^4 \int_0^\pi \sin^4 x \, dx = \frac{\nu^2 \pi}{2} \left(1 - \frac{3\nu^2}{4} \right)$$

womit gezeigt ist, daß es Funktionen gibt, welche in unserem Problem konkurrenzfähig sind und die das Funktional beliebig klein machen.

Der zitierte Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von *H. Lewy*²⁾ betreffend Variationsprobleme erster Ordnung, die Beweismethode eine weitere Anwendung des für Variationsprobleme häufiger gebrauchten Differenzenverfahrens. Indem man dabei das Integral in bekannter Weise durch eine Summe annähert und die Differentialquotienten im Integranden durch Differenzenquotienten ersetzt, führt man die Existenz des Minimums des Funktional auf den Weierstraß'schen Satz über das Minimum einer stetigen Funktion im abgeschlossenen Bereich zurück und sucht dann solche gestaltlichen Eigenschaften der Lösung des diskreten Problems sicherzustellen, die die Konvergenz der Lösungen und ihre Differentialquotienten bis zum höchsten der im Variationsproblem vorkommenden bei Vermehrung der Interpolationsstellen gewährleisten.

Wesentlich für die Erreichung dieses Zieles ist die Aufstellung einer Ungleichung, welche die $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten der Lösungen der endlichen Probleme, unabhängig von der Feinheit des Interpolationsmaschennetzes beschränkt. Zu diesem Zwecke müssen die Lösungen des endlichen Problems solchen Variationen unterworfen werden, die mit den auferlegten Bedingungen insbesondere $|y^{(n)}| \leq M$ verträglich sind. Leider stößt die unmittelbare Uebertragung des Verfahrens der zitierten Arbeit dabei auf Schwierigkeiten. Schon bei dem Problem 1. Ordnung ist die

²⁾ *H. Lewy*: Ueber die Methode der Differenzengleichungen zur Lösung von Variations- und Randwertaufgaben. Math. Annalen, Bd. 98, pag. 107 und folgende.

Variation einer Stelle der Lösungsfunktion nicht möglich, wenn die sukzessiven ersten Differenzenquotienten, welche diesen Funktionswert enthalten, entweder beide $+M$ oder beide $-M$ sind. Aber hier ist gerade durch diese Beschaffenheit der ersten Differenzenquotienten unmittelbar eine Abschätzung der zweiten Differenzenquotienten gegeben. Bei einem Problem n^{ter} Ordnung, $n \geq 2$ gibt es entsprechend dem komplizierteren Bau der n -ten Differenzenquotienten viel mannigfaltigere Verteilungen der Werte dieser Differenzenquotienten, welche eine Variation *einer* Stelle der Lösungsfunktion verhindern und die man a priori für die Lösung des endlichen Problems als durchaus möglich gelten lassen muß. Man kann aber im Gegensatz zum einfachsten Fall daraus *unmittelbar* keinen Schluß ziehen, der eine Aussage über etwaige Beschränktheit der höheren Differenzenquotienten an der betreffenden Stelle darstellte. Aber auch in dem Fall, wo die Folge der in der Lösung auftretenden Differenzenquotienten höchster Ordnung diese Art Variation erlaubt, sind die Schwierigkeiten noch nicht ganz aus dem Wege geräumt. Entwickelt man nämlich nach dem Muster der zitierten Arbeit die Differenz der variierten und der nicht variierten Summe nach Taylor, so gelangt man zu Ungleichungen für die höchsten Differenzenquotienten, die einen weit komplizierteren Bau haben als diejenigen des Problems erster Ordnung und die dementsprechend schwieriger zu behandeln sind.

Von diesen Schwierigkeiten befreit man sich nun dadurch, daß man nicht nur Variationen einer Stelle, sondern gleich größerer passend auszuwählender Ketten solcher Werte der Lösungsfunktion vornimmt, die den Interpolationspunkten entsprechen.

Um solche Variationen im großen vornehmen zu können, ist es in erster Linie nötig, eine Uebersicht über die durch die Rand- und Einschränkungsbedingungen zugelassenen Funktionen zu erhalten. Diese Uebersicht gewinnen wir im nächsten Paragraphen.

Bezeichnungen: Für die folgenden Untersuchungen ist

$$x_0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq x_0 < 1,$$

N durchläuft die ganzen positiven Zahlen.

$$1. \quad l(N) = \frac{1}{N}.$$

$$2. \quad x_\nu(N) = \frac{\nu}{N} \quad \text{für } \nu = 1, 2 \dots N, \text{ ausgenommen § 2, Satz II.}$$

$$3. \quad \eta_\nu(N) \quad \text{ist eine } x_\nu(N) \text{ zugeordnete Größe.}$$

$$4. \eta_{\mu}^{(i)(N)} = \frac{\sum_{s=0}^i (-1)^s \binom{i}{s} \eta_{\mu}^{(N)} \left[\frac{i+1}{2} \right]_s}{l_{(N)}^i} \quad \text{für } i = 1, 2 \dots \text{ ist der zu } x_{\mu}(N)$$

gehörige i^{te} Differenzenquotient. Wir werden in Zukunft bei den Bezeichnungen 1, 2, 3, 4 die Größe N weglassen, nachdem wir hier ein für allemal festgestellt haben, daß die auf obige Weise definierten Größen l , x_{ν} , η_{ν} , $\eta_{\nu}^{(i)}$ Funktionen von N sind.

5. $F_{\mu}^{(i)} = \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} F(x, y, y' \dots y^{(k)})$ an der Stelle $x = x_{\mu}$, $y = \eta_{\mu}$, $y^{(i)} = \eta_{\mu}^{(i)}$ für $i = 1, 2, \dots k$; $k \geq 1$ ganz, sonst beliebig.

6. Unter einer den Randwertsystemen $a_0, a_1 \dots a_{\nu}$ bzw. $b_0, b_1 \dots b_{\nu}$ und den Argumentwerten x_0 bzw. x_1 zugehörigen Funktion verstehen wir eine Funktion von x , welche stückweise stetige absolut beschränkte $(\nu + 1)^{\text{te}}$ Abgeleitete hat, die für $x = x_0$ bzw. $x = x_1$ die Werte a_0 bzw. b_0 annimmt und deren i -te Abgeleitete, $i = 1, 2 \dots \nu$ für dieselben Werte des Arguments gerade a_i bzw. b_i wird.

In unseren Untersuchungen wird $x_1 = 1$ sein und x_0 ist entweder Null oder ein zwischen Null und eins gelegener Wert.

§ 2. Uebersicht über die zugelassenen Funktionen

a. Formulierung der Sätze I u. II.

Das Ziel dieses Paragraphen besteht darin, einen Ueberblick über die Funktionenmenge $\{F_k(x)\}$ der Funktionen $F_k(x)$ zu gewinnen, die im abgeschlossenen Intervall (x_0, x_1) definiert und durch folgende Forderungen näher bestimmt sind:

α) Die Funktionen $F_k(x)$ sind im abgeschlossenen Intervall $(k - 1)$ mal stetig differentiierbar. Die k^{ten} Differentialquotienten sind stückweise stetig und absolut kleiner oder gleich M .

β) In den Randpunkten x_0 bzw. x_1 des Intervalls haben die Funktionen selbst und ihre Differentialquotienten bis zum $(k - 1)^{\text{ten}}$ inkl. fest vorgegebene Werte.

Diese festen Randwerte und M denken wir uns so festgesetzt, daß die Menge $\{F_k(x)\}$ nicht leer ist. Dann bestehen bezüglich dieser Menge noch die folgenden beiden Möglichkeiten:

1. Sie besteht aus einer einzigen Funktion.
2. Sie umfaßt mehr als eine Funktion.

Der erste Fall tritt, wie wir zeigen werden, dann und nur dann ein, wenn eine Funktion der Menge einer Einteilung des Intervalls (x_0, x_1) in höchstens k echte Teilintervalle in folgendem Sinn entspricht: Der Wert

des k^{ten} Differentialquotienten dieser Funktion ist im Innern jedes Teilintervalls konstant und in den von links nach rechts aufeinanderfolgenden Teilintervallen abwechselnd $+M$ und $-M$.

Andernfalls gibt es in der Menge eine „größte“ und eine „kleinste“ Funktion $\overline{F_k(x)}$ bzw. $\underline{F_k(x)}$. Das heißt: Jede zulässige Funktion $F_k(x)$ ist im ganzen Intervall (x_0, x_1) immer kleiner oder gleich $\overline{F_k(x)}$ und größer oder gleich $\underline{F_k(x)}$. Diese beiden zur Menge gehörigen Funktionen sind dadurch charakterisiert, daß zu ihnen je eine Einteilung von (x_0, x_1) in genau $k+1$ echte Teilintervalle gehört, in dem Sinn, daß für jede von ihnen der k^{te} Differentialquotient im Innern eines jeden Teilintervalles konstant und absolut gleich M ist. Für $\overline{F_k(x)}$ nimmt er mit $+M$ beginnend in den von links nach rechts aufeinanderfolgenden Teilintervallen abwechselnd die Werte $+M$ und $-M$ an. Für $\underline{F_k(x)}$ ist er im ersten Teilintervall $-M$, im zweiten $+M$ usw.

Diesen Sachverhalt formulieren wir nun noch einmal präzise in den beiden folgenden Sätzen I und II. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $x_0 \geq 0$; $x_1 = 1$ annehmen.

Wir behaupten also bezüglich der Menge $\{F_k(x)\}$ der Funktionen $F_k(x)$ mit stetigen Differentialquotienten bis zum $(k-1)^{\text{ten}}$ incl. und stückweise stetigen k^{ten} Differentialquotienten und $|F_k^{(k)}(x)| \leq M$ für $x_0 \leq x \leq 1$; $F_k(x_0) = a_0$, $F_k(1) = b_0$, $F_k^{(i)}(x_0) = a_i$, $F_k^{(i)}(1) = b_i$ für $i = 1, 2, \dots, k-1$ die Gültigkeit der folgenden Sätze.

Satz I. $\{F_k(x)\}$ besteht dann und nur dann aus einer einzigen Funktion, wenn es ein $F_k = U(x)$ gibt, das den eben genannten Rand- und Beschränkungsbedingungen genügt und das überdies die folgenden Forderungen erfüllt:

a) Es gibt eine $U(x)$ zugeordnete Einteilung des Intervalls $(x_0, 1)$ mit den Teilungspunkten $x_0 = p_0 < p_1 < \dots < p_s = 1$, so daß

bzw.
$$\left. \begin{aligned} (-1)^i U^{(k)}(x) &= M \text{ für } p_i < x < p_{i+1} \\ (-1)^i U^{(k)}(x) &= -M \text{ für } p_i < x < p_{i+1} \end{aligned} \right\} i = 0, 1, 2, \dots, s-1 \text{ und}$$

b) $s \leq k$.

Satz II. In jedem anderen Falle gibt es eine „größte Funktion“ $\overline{F_k(x)}$ und eine „kleinste Funktion“ $\underline{F_k(x)}$ in folgendem Sinne:

1. $\overline{F_k(x)} > F_k(x)$ für $x_0 < x < 1$
 2. $\overline{F_k(x)} \geq F_k(x) \geq \underline{F_k(x)}$ für jedes $F_k(x)$ aus $\{F_k(x)\}$ und $x_0 \leq x \leq 1$.
 3. Es existieren zwei Einteilungen von $(x_0, 1)$
- $\alpha) x_0 = \bar{p}_0 < \bar{p}_1 < \dots < \bar{p}_{k+1} = 1$ bzw. $\beta) x_0 = \underline{p}_0 < \underline{p}_1 < \dots < \underline{p}_{k+1} = 1$,
so daß $(-1)^i \overline{F_k^{(k)}}(x) = M$ für $p_i < x < p_{i+1}$ } $i = 0, 1 \dots k$.
bzw. $(-1)^i \underline{F_k^{(k)}}(x) = -M$ für $p_i < x < p_{i+1}$ }

Bemerkung: Wir brauchen zur Herleitung unseres variationstheoretischen Resultates nur die Tatsache, daß, falls die Voraussetzungen a und b aus Satz I erfüllt sind, die Menge der zugelassenen Funktionen aus einer einzigen Funktion besteht. Satz II kann man in zwei Schritten beweisen.

1. Man zeigt mittels der Ungleichungen aus Hilfssatz 2, S. 9, daß Funktionen mit den Eigenschaften II 3 $_{\alpha}$ bzw. II 3 $_{\beta}$ „größte“ bzw. „kleinste“ Funktionen der Menge $\{F_k(x)\}$ sein müssen.

2. Durch vollständige Induktion beweist man, daß, falls $\{F_k(x)\}$ nicht aus einer einzigen Funktion besteht, es dann immer auch je eine Funktion mit den Eigenschaften II 3 $_{\alpha}$ bzw. II 3 $_{\beta}$ gibt.

Durch diese zwei Schritte ist Satz II bewiesen.

Daß die Bedingungen a und b in Satz I auch notwendig sind, kann man ebenfalls mittels vollständiger Induktion zeigen.

Die Beweise sind etwas lang und kompliziert, weshalb wir sie hier unterdrücken; wir beweisen nur, daß die Bedingungen a) und b) des Satzes I hinreichen. Dabei benutzen wir die beiden folgenden Hilfssätze:

Hilfssatz 1: Es sei $f_0(x)$ stückweise stetig für $x_0 \leq x \leq 1$, und es existieren $\rho_0 + 2$ Punkte P_i ; $x_0 = P_0 < P_1 < \dots < P_{\rho_0+1} = 1$, so daß die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$* \left\{ \begin{array}{l} (-1)^i f_0(x) \geq 0 \text{ für } P_i \leq x \leq P_{i+1}, i = 0 \dots \rho_0; (-1)^i f_0(x) > 0 \\ \quad \text{für } P_i < x < P_{i+1}, i = 1, 2 \dots \rho_0 \\ \text{und } f_0(x) > 0 \text{ für } x_0 \leq P_0 < x < P_1 \\ \text{bzw. } (-1)^i f_0(x) \leq 0, i = 0 \dots \rho_0 \text{ für } P_i < x < P_{i+1}; (-1)^i f_0(x) < 0 \\ \quad \text{für } P_i < x < P_{i+1}, i = 1, 2 \dots \rho_0 \\ \text{und } f_0(x) < 0 \text{ für } x_0 \leq P_0 < x < P_1. \end{array} \right.$$

Ferner sei $f_1(x) = \int_{x_0}^x f_0(x) dx$ und $f_1(1) = 0$.³⁾

Dann existiert eine zu $f_1(x)$ gehörige Einteilung des Intervalls $(x_0, 1)$ durch

³⁾ Völlig analog definieren wir $f_2(x) = \int_{x_0}^x f_1(x) dx$ usw.

$\rho_1 + 2 \leq \rho_0 + 1$ Punkte P_i' ; $x_0 = P_0' < P_1' < \dots < P_{\rho_1+1}' = 1$, so daß in den Teilintervallen bezüglich $f_1(x)$ Ungleichungen gelten, die den Ungleichungen (*) analog sind.

Dabei ist $f_1(x) \geq 0$ für $x_0 \leq x \leq P_1'$ falls $f_0(x) \geq 0$ für $x_0 \leq x \leq P_1$
bzw. $f_1(x) \leq 0$ für $x_0 \leq x \leq P_1'$ falls $f_0(x) \leq 0$ für $x_0 \leq x \leq P_1$

Beweis: Aus der Definition von $f_1(x)$ folgt in Verbindung mit den Ungleichungen (*) unmittelbar, daß $f_1(x)$ stetig und in den aufeinanderfolgenden abgeschlossenen Teilintervallen (P_i, P_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, \rho_0$ abwechselnd monoton nicht fallend und monoton nicht steigend ist. Wir

betrachten nun die Wertereihe $C_0, C_1, \dots, C_{\rho_0+1}$, wobei $C_i = \int_{x_0}^{P_i} f_0(x) dx$ bedeutet. Auf Grund der festgestellten Monotonie von $f_1(x)$ erkennen wir:

1. Im Innern eines Intervalls (P_i, P_{i+1}) liegt dann und nur dann ein der Funktion $f_1(x)$ zugeordneter Teilpunkt von $(x_0, 1)$, also ein P_k' , so daß

$f_1(x) \geq 0$ für $P_i \leq (x) \leq P_k'$ und $f_1(x) < 0$ für $P_k' < x \leq P_{i+1}$
bzw. $f_1(x) \leq 0$ für $P_i \leq (x) \leq P_k'$ und $f_1(x) > 0$ für $P_k' < x \leq P_{i+1}$,
wenn $C_i > 0$ und $C_{i+1} < 0$ bzw. $C_i < 0$ und $C_{i+1} > 0$ ist.

P_k' ist dann der einzige derartige Punkt im abgeschlossenen Intervall (P_i, P_{i+1}) .

2. Ein Teilpunkt P_i könnte nur dann auch ein Teilpunkt P_k' sein, wenn $C_i = 0$ ist. Gilt aber $f_1(x) \leq 0$ bzw. $f_1(x) \geq 0$ für $P_{i-1} \leq x \leq P_i$, so muß für $P_i \leq x \leq P_{i+1}$ gleichfalls gelten $f_1(x) \leq 0$ bzw. $f_1(x) \geq 0$. Das schließen wir auf Grund der abwechselnden Monotonie. Es besagt, daß P_i nicht Teilpunkt der $f_1(x)$ zugeordneten Einteilung ist. Die Anzahl der im Innern von $(x_0, 1)$ liegenden P_k' ist also genau gleich der Anzahl der Uebergänge von positiven zu negativen Werten in der Folge $C_0, C_1, \dots, C_{\rho_0+1}$. (Null hat kein Vorzeichen.) Da nach der Definition $C_0 = 0$ und nach Voraussetzung $C_{\rho_0+1} = 0$ ist, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel höchstens $\rho_0 - 1$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Ist speziell $\rho_0 = 1$, dann gilt:

$$\text{I} \begin{cases} f_1(x) \geq 0 \text{ für } x_0 \leq x \leq 1 \\ \text{bzw. } f_1(x) \leq 0 \text{ für } x_0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Gilt überall in $(x_0, 1)$, $f_0(x) \geq 0$, und für $x_0 \leq \pi_0 < x < \pi_0^* \leq 1$, $f_0(x) > 0$
bzw. überall in $(x_0, 1)$, $f_0(x) \leq 0$, und für $x_0 \leq \pi_0 < x < \pi_0^* \leq 1$, $f_0(x) < 0$

$$\text{II} \begin{cases} \text{so ist } f_1(x) > 0 \text{ für } \pi_0 < x \leq 1 \\ \text{bzw. } f_1(x) < 0 \text{ für } \pi_0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Hilfssatz 2: Es sei $f_i(x) = \int_0^x f_{i-1}(x) dx$, $i = 1; 2 \dots$ für irgend ein

$f_0(x)$, welches die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt. Wir behaupten, daß es dann nicht möglich ist, dieses $f_0(x)$ so zu bestimmen, daß die Gleichungen $f_i(1) = 0$ für $i = 1, 2, 3 \dots l > \rho_0$ gelten.

Beweis: Die Anzahl ρ_1 der inneren Teilpunkte des Intervalls $(x_0, 1)$ bezüglich $f_1(x)$ ist nach Hilfssatz 1 höchstens $\rho_0 - 1$. Nehmen wir nun an, es sei auch $f_2(1) = 0$, so sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 dem Sinne nach erfüllt, wenn wir dort $f_0(x)$ durch $f_1(x)$ und $f_1(x)$ durch $f_2(x)$ ersetzen. Die Anzahl ρ_2 der zu $f_2(x)$ gehörigen Teilpunkte ist also höchstens $\rho_1 - 1 \leq \rho_0 - 2$. So weiterschließend, sehen wir, daß für $h < \rho_0$ die Anzahl der zu $f_h(x)$ gehörigen inneren Teilpunkte höchstens $\rho_0 - h$ ist. Wir erkennen also, daß spätestens für $f_{\rho_0}(x)$ die Anzahl der inneren Teilpunkte Null ist. Nach der Bemerkung II am Schlusse des Beweises von Hilfssatz 1 ist sicher

$$\text{III} \left\{ \begin{array}{l} f_{\rho_0+1}(x) > 0 \text{ für } \pi_0 < x \leq 1, \text{ falls } f_0(x) > 0 \text{ für } \pi_0 < x < \pi_0^* \\ \text{bzw. } f_{\rho_0+1}(x) < 0 \text{ für } \pi_0 < x \leq 1, \text{ falls } f_0(x) < 0 \text{ für } \pi_0 < x < \pi_0^*. \end{array} \right.$$

Also wäre $f_{\rho_0+1}(1)$ jedenfalls $\neq 0$, was zu beweisen war⁴⁾ 5).

Nun sind wir imstande zu beweisen, daß die Voraussetzungen a) und b) des Satzes I S. 6 hinreichend sind. Wir nehmen an, es existiere außer der im Satz genannten Funktion $U(x)$ eine zweite Funktion $W(x)$, welche zur Menge $\{F_k(x)\}$ gehört. Nun setzen wir

$$\begin{aligned} f_0(x) &= U^{(k)}(x) - W^{(k)}(x) \\ f_i(x) &= U^{(k-i)}(x) - W^{(k-i)}(x) \quad i = 1, 2 \dots k-1 \\ f_k(x) &= U(x) - W(x) \end{aligned}$$

Auf diese Funktionen können wir die Hilfssätze 1 und 2 anwenden. Dabei ist das zu $f_0(x)$ gehörige ρ_0 höchstens $k-1$, was unmittelbar aus der

⁴⁾ Aus der Beweisführung folgt unmittelbar: Damit $f_i(1) = 0$ für $i = 1, 2 \dots \rho_0$, ist notwendig, daß $\rho_i - \rho_{i+1} = 1$ für $i = 0 \dots \rho_0 - 1$.

⁵⁾ $x_0 = P_0^v < \dots < P_{\rho_v+1}^v = 1$ seien die Teilpunkte der $f_v(x)$ im Sinne der Hilfssätze entsprechenden Einteilung von $(x_0, 1)$, und es gelte $\rho_i - \rho_{i+1} = 1$ für $i = 0, 1 \dots v-1$; dann ist wegen $1 - x_0 \leq 1$ und auf Grund der rekursiven Definition von $f_v(x)$.

$$\text{IV} \left\{ \begin{array}{l} \text{für } P_0^v \leq x \leq P_1^v, \text{ Max } |f_v(x)| \leq M_{v-1} \leq M_{v-2} \leq \dots \leq M_1 \leq M_0 \\ \text{wobei } M_i = \text{Max } |f_i(x)| \text{ für } P_0^i \leq x \leq P_1^i, \quad i = 0, 1, 2 \dots \end{array} \right.$$

Definition von $U^{(k)}(x)$ und derjenigen von $f_0(x)$ hervorgeht. Folglich ist nach Hilfssatz 2 das im Beweise dieses Hilfssatzes definierte

$$\varrho_{k-1} = 0.$$

Dann wäre aber

$$f_k(x) = U(x) - W(x) > 0 \text{ für } \pi_0 < (x) \leq 1, \text{ also } U(1) - W(1) > 0$$

$$\text{bzw. } f_k(x) = U(x) - W(x) < 0 \text{ für } \pi_0 < (x) \leq 1, \text{ also } U(1) - W(1) < 0$$

was im Widerspruch mit unseren Voraussetzungen steht.

§ 3. Abschätzung der $(N+1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten

a) *Festsetzungen und Definitionen.* Für $N > 0$ ganz, welches die Maschenweite des Punktgitters auf $(0, 1)$ bestimmt, werden im folgenden nur solche Werte $N > N_0$ in Betracht gezogen, für welche die dieses N enthaltenden speziellen Voraussetzungen erfüllt sind.

Die Gitterpunkte werden mit x_0, x_1, \dots, x_N bezeichnet.

$$\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}; \eta_{N-n+1}, \eta_{N-n+2}, \dots, \eta_N \text{ sind fest, so daß } \eta_0 = a_0, \eta_N = b_0,$$

$$\frac{1}{i!} \sum_{s=0}^i (-1)^s \binom{i}{s} \eta_{i-s} = a_i, \frac{1}{i!} \sum_{s=0}^i (-1)^s \binom{i}{s} \eta_{N-s} = b_i; i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Aus den $\eta_v^{(n)}$, welche der Lösung des N -ten endlichen Problems $v = N - \left[\frac{n+1}{2} \right]$

$\sum_{v=N-\left[\frac{n}{2} \right]} F(x_v, \eta_v \dots \eta_v^{(n)}) = \text{Min}$ entsprechen, wird durch lineare Interpolation $v = \left[\frac{n}{2} \right]$

eine in $(0, 1)$ stetige Funktion $V_N(x)$ bestimmt, wenn man noch festsetzt

$$V_N(x) = \eta_{\left[\frac{n}{2} \right]}^{(n)} \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\left[\frac{n}{2} \right]}{N}$$

$$V_N(x) = \eta_{N-\left[\frac{n+1}{2} \right]}^{(n)} \quad \text{für } 1 - \frac{\left[\frac{n+1}{2} \right]}{N} \leq x \leq 1.$$

Die unendliche Folge $V_{N_0}(x), V_{N_0+1}(x), \dots$ der so definierten, einem Variationsproblem zugeordneten Funktionen wird mit $\{V_N(x)\}$, irgend eine Funktion aus $\{V_N(x)\}$ mit $V_N(x)$ bezeichnet.

Jede unendliche Teilfolge aus $\{V_N(x)\}$ bezeichnet man mit $\{V_v(x)\}$, irgend ein Element aus $\{V_v(x)\}$ mit $V_v(x)$.

Jedes Teilintervall von $(0, 1)$, gleichgültig, ob echt oder unecht, wird

mit einem großen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Dieser lateinische Buchstabe zwischen Absolut = Striche gesetzt, bedeutet die Länge des Teilintervalls.

Liegt eine Reihe (Kette) von Teilintervallen vor, so werden letztere ihrer Aufeinanderfolge in der Richtung $\overrightarrow{01}$ gemäß fortlaufend mit den Indizes 1, 2 ... bzw. 0, 1, 2 ... versehen.

Gilt für $\xi_1 \leq (x) \leq \xi_2$ $V_v(x) = M$ bzw. $V_v(x) = -M$, so heißt das abgeschlossene Intervall (ξ_1, ξ_2) *Konstanzintervall* und wird mit K^+ bzw. K^- generell mit K bezeichnet.

Gilt für $\delta > 0$ beliebig und jedes x ; $\xi_1 \leq x < \xi_2$, $V_v(x + \delta) \geq V_v(x)$ bzw. $V_v(x + \delta) \leq V_v(x)$, so lange $x + \delta$ im Intervall (ξ_1, ξ_2) oder auf seinem Rande liegt und $|V_v(x)| \neq M$ für $\xi_1 < x < \xi_2$, so heißt das abgeschlossene Intervall (ξ_1, ξ_2) *Monotonieintervall* und wird mit \mathcal{J}^+ bzw. \mathcal{J}^- generell mit \mathcal{J} bezeichnet.

Bezüglich der Werte von $V_v(x)$ in den Gitterpunkten eines Monotonieintervalls gilt folgendes:

Es gibt mindestens zwei sukzessive Gitterpunkte x_i, x_{i+1} des Intervalls, so daß

$$|V_v(x_i) - V_v(x_{i+1})| \leq l \cdot \frac{2M}{d}$$

wobei d die Länge des Intervalls ist. Wäre dies nicht der Fall, so müßte nämlich

$$|V_v(\xi_1) - V_v(\xi_2)| > 2M$$

sein. Ist $d = \frac{\varepsilon}{2(n+3)}$, so bekommt die Ungleichung die Form

$$|V_v(x_i) - V_v(x_{i+1})| \leq \frac{4M(n+3)}{\varepsilon} \cdot l.$$

b) Klassifizierung der diskreten Lösungen.

Nun werden wir zeigen, daß man alle unsere Variationsprobleme hinsichtlich der Folgen $\{V_N(x)\}$ und im Hinblick auf die Abschätzung in drei Klassen einteilen kann. Nur für zwei dieser Klassen werden wir jedoch die Abschätzung vornehmen, für die dritte wird sie nicht nötig sein.

Die drei Klassen sind durch folgende Eigenschaften der zu einem Variationsproblem gehörigen Folgen $\{V_N(x)\}$ gekennzeichnet.

I. Es existiert ein festes $d > 0$ und dazu eine unendliche Teilfolge $\{V_\nu(x)\}$, so daß jede Funktion dieser Teilfolge mindestens ein Monotonieintervall \mathcal{J} besitzt mit $|\mathcal{J}| \geq d$.

II. Die in I ausgesprochenen Bedingungen sind nicht erfüllt, aber es existiert eine unendliche Teilfolge $\{V_\nu(x)\}$, deren Funktionen folgende Eigenschaften besitzen:

a) Jedes ihrer Monotonieintervalle \mathcal{J}^+ bzw. \mathcal{J}^- läßt sich als Glied einer Kette $\mathcal{J}_1^+ \mathcal{J}_2^- \mathcal{J}_3^+ \dots$ oder $\mathcal{J}_1^- \mathcal{J}_2^+ \mathcal{J}_3^- \dots$ von n **getrennten** in $(0, 1)$ von links nach rechts aufeinander folgenden Monotonieintervallen einordnen.

b) Es existiert ein festes (nicht von N abhängiges) $\delta > 0$, so daß für zwei beliebige sukzessive Monotonieintervalle einer solchen Kette in der Richtung von links nach rechts genommen der rechte Randpunkt des früheren vom linken Randpunkt des späteren um mindestens δ entfernt ist.

c) Das letzte \mathcal{J} der Kette endigt nicht in $1 - \frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{N}$.

III. Die $V_N(x)$ sind so beschaffen, daß nur eine einzige Vergleichskurve existiert.

Um zu beweisen, daß diese drei Klassen alle Möglichkeiten hinsichtlich der Verteilung und Beschaffenheit der Monotonieintervalle in den $V_N(x)$ unserer Variationsprobleme erschöpfen, nehmen wir zunächst eine andere Einteilung der Folgen $\{V_N(x)\}$ in vier Klassen vor:

Klasse 1.

Es existiert ein festes $d > 0$ und dazu eine ∞ Teilfolge $\{V_\nu(x)\}$, so daß jedes $V_\nu(x)$ mindestens ein Monotonieintervall \mathcal{J} mit $|\mathcal{J}| \geq d$ besitzt.

Klasse 2.

Die Forderungen bezüglich Klasse 1 sind nicht erfüllt; aber es gibt ein festes $\delta > 0$ und dazu eine unendliche Teilfolge $\{V_\nu(x)\}$, sodaß jedes $V_\nu(x)$ mindestens $r \geq 2n$ getrennte Konstanzintervalle K_i besitzt, so daß $|K_i| \geq \delta$ für $i = 1, 2 \dots r$. Die K_i denke ich mir, ihrer Aufeinanderfolge in $(0, 1)$ entsprechend von links nach rechts numeriert.

Klasse 2'.

Die Forderungen Klasse 1 und Klasse 2 betreffend sind nicht erfüllt, und wie klein ich auch $\delta > 0$ fest wähle, so gibt es doch keine unendliche Teilfolge $\{V_\nu(x)\}$, so daß alle $V_\nu(x)$ mehr als $r = r_1$; $0 \leq r_1 < 2n$ getrennte Konstanzintervalle K_i besitzen mit $|K_i| \geq \delta$ für $i = 1, 2 \dots r_1$;

aber es gibt ein $\delta > 0$ fest und eine unendliche Teilfolge $\{V_\nu(x)\}$ mit genau r_1 derartigen K_i ; ferner gilt

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{r_1} |K_i|\right) \rightarrow 0 \quad \text{mit } \nu \rightarrow \infty.$$

Klasse 2''.

Die Forderungen Klasse 2' betreffend sind erfüllt mit Ausnahme der letzten, und es existiert ein festes $\varepsilon > 0$, so daß für alle genügend großen ν der Folge

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{r_1} |K_i|\right) \geq \varepsilon \quad \text{ist.}$$

Die Klasse 1 fällt, wie man sofort sieht, genau mit der Klasse I zusammen.

Für die Klasse 2, 2', 2'' bezeichnen wir das zwischen K_i und K_{i+1} gelegene Teilintervall mit H_i ; und das eventuell zwischen dem rechten Endpunkt von K_r und $1 - \frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{N}$ gelegene mit H_r ⁶⁾.

Für die H_i gilt:

- a) ihre Anzahl ist mindestens $r - 1 \geq 2n - 1$ bzw. $r_1 - 1$.
- b) Es ist unmöglich, daß zwei sukzessive H_i, H_{i+1} beide nur Monotonieintervalle \mathcal{J}^+ oder nur \mathcal{J}^- enthalten.
- c) Enthält H_i nur \mathcal{J}^+ bzw. nur \mathcal{J}^- , so muß K_i ein K^- ; K_{i+1} ein K^+ bzw. K_i ein K^+ , K_{i+1} ein K^- sein.

Nun sind wir in der Lage zu zeigen, daß die Variationsprobleme der Klasse 2 zur Klasse II gehören. Enthalten alle H_i ; sowohl \mathcal{J}^+ als auch \mathcal{J}^- , so ist das unmittelbar klar. Enthält H_j nur \mathcal{J}^+ bzw. nur \mathcal{J}^- , so fassen wir nach rechts von H_{j+2} ab je zwei sukzessive H mit dem dazwischen liegenden K zu einem \bar{H} zusammen, so lange das möglich ist, und machen das Entsprechende von H_{j-2} ab nach links. Sämtliche \bar{H} enthalten nach b) sowohl \mathcal{J}^+ als auch \mathcal{J}^- ; ihre Anzahl ist mindestens $\frac{2n-6}{2} = n-3$. Zusammen mit H_{j-1}, H_j und H_{j+1} haben wir mindestens n getrennte H -Intervalle, der Art, daß wir das \mathcal{J} von H_j in eine Kette einordnen können, wie wir es in II forderten.

⁶⁾ Ferner das eventuell zwischen $\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{N}$ und dem linken Endpunkt von K_r gelegene Stück mit H_0 .

Bemerkung: Nehmen wir als bewiesen an, daß wir zu der Klasse II eine von ν unabhängige Abschätzung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten gewinnen können, daß es also ein festes C gibt mit der Eigenschaft

$$|\eta_{\mu}^{(n)} - \eta_{\mu+1}^{(n)}| \leq l C$$

für je zwei konsekutive η_i^n aus H_j , so resultiert daraus, daß das Monotonieintervall $|H_j| \geq \frac{2M}{lC} = d > 0$ ist, im Widerspruch mit den Voraussetzungen für Klasse 2. Mithin scheidet die Möglichkeit reiner Monotonieintervalle in Klasse 2 aus.

Die Folgen $\{V_\nu(x)\}$ und damit auch die Variationsprobleme der Klasse 2' zerfallen in zwei Mengen, von welchen die eine die Klasse III bildet; die andere in die Klasse II fällt. Um das zu sehen, stellen wir die Anzahl R der Fälle fest, für welche in der Kette der K , K_j ein K^+ ; K_{j+1} ein K^- oder K_j ein K^- ; K_{j+1} ein K^\pm ist, $j = 1, 2 \dots r_1 - 1$. Gibt es unter den $\{V_\nu(x)\}$ eine unendliche Teilfolge, so daß $R \leq n - 1$ ist, so existiert nur eine Vergleichskurve. Das sind genau die Probleme der Klasse III. Andernfalls schließen wir genau wie für die Klasse 2, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Für jede Folge der Klasse 2'' gibt es mindestens ein Intervall L der Länge $|L| = \frac{\varepsilon}{r_1 + 2}$, in welchem bei genügend kleiner Maschenweite die Monotonie- und die Konstanzintervalle unter jede beliebig vorgegebene Schranke herabsinken. Wir werden also von einem genügend großen ν an in jedem Teilintervall von L , welches die Länge $\frac{|L|}{2n+2}$ besitzt, \mathcal{F}^+ und \mathcal{F}^- erhalten. Für alle \mathcal{F} von L und a fortiori für diejenigen von $(0,1)$ lassen sich mithin die Forderungen von Klasse II erfüllen.

Sind die Rand- und Beschränkungsbedingungen nicht derart, daß nur eine einzige Kurve möglich ist, erweist sich also für die Klassen 2 und 3 die Annahme, ein H sei ein \mathcal{F}^+ bzw. ein \mathcal{F}^- als widerspruchsvoll, wenn man bewiesen hat, daß für die Klasse II eine von der Maschenweite unabhängige Abschätzung des $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten möglich ist.

C. Binomialformeln.

In den Rechnungen, welche zur Abschätzung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten führen, treten eine Reihe von Summen auf, deren Terme

Produkte von Binomialkoeffizienten sind. Sie alle können auf Grund dreier bekannter Relationen in einfache Form gebracht werden. Diese drei Relationen sind:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{p-s}{m} \binom{q}{s} = \binom{p-q}{p-m} \\ \text{II. } \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{q+s}{q} \binom{n}{p+s} = \sum_{s=0}^{\infty} \binom{q+s}{s} \binom{n}{p+s} \binom{n-q-1}{n-p} \\ \text{III. } \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n-s}{q} = \binom{n+1}{q+1} \end{array} \right\} \binom{0}{0} = 1$$

wobei man die p, q, m, n geeignet zu wählen hat und die Binomialkoeffizienten nur für positive ganze Zahlen inkl. 0 definiert sind. Die in unseren Rechnungen vorkommenden Ausdrücke ergeben sich durch spezielle Wahl der Größen p, q, m . Sie sollen nun zunächst zusammengestellt werden:

$$\text{Es sei } p = i + h; q = k, k \leq n; i \geq m = n - 2.$$

Dadurch nimmt die Formel I die Gestalt an

$$\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{i+h-s}{m} \binom{k}{s} = \binom{i+h-k}{i-(m-h)} = \binom{i+h-k}{m-k}$$

falls die letzten beiden Ausdrücke einen Sinn haben.

1. Die rechten Seiten haben keinen Sinn für

$$i = m \left\{ \begin{array}{ll} \text{I}_\alpha & h = 0 \quad k = m + 1 \\ \text{I}_\beta & h = 0 \\ \text{I}_\gamma & h = 1 \end{array} \right\} k = m + 2$$

Die linke Seite ist

$$1 \text{ für } \text{I}_\alpha; 1 \text{ für } \text{I}_\beta; -1 \text{ für } \text{I}_\gamma.$$

Für $h \geq 2; k = m + 2 = n; i \geq m$ und daher $i + h - m > i + h - k \geq 0$

$$\text{folgt 2. } \sum_{s=0}^{\infty} \left((-1)^s \right) \binom{i+h-s}{m} \binom{n}{s} = 0.$$

Für $h \geq 1$; $k = m + 1$; $i \geq m$ und daher $i + h - m > i + h - k \geq 0$

$$\text{folgt 3. } \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{i + h - s}{m} \binom{k}{s} = 0.$$

Für $h \geq 0$; $k \leq m$; $i \geq m$ und daher $i + h - k \geq i + h - m \geq 0$

$$\text{folgt 4. } \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{i + h - s}{m} \binom{k}{s} = \binom{i + h - k}{m - k}$$

$$\text{speziell für } h = k \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{i + k - s}{m} \binom{k}{s} = \binom{i}{m - k}.$$

Ferner ergibt sich

$$5. \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{n}{s} = 0 \text{ aus II für } p = q = 0.$$

$$6. C_h = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{n}{h + s} = \binom{n - 1}{h} \text{ aus II für } q = 0 \quad p = h \neq 0.$$

$$7. S_k = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h C_h \binom{\lambda_k + m - h}{m} = 0 \text{ aus I; } p = \lambda_k + m; q = m + 1; s = h \\ h, \lambda_k \neq 0.$$

$$8. c_{ih} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^s \binom{i + s}{i} \binom{n}{i + h + 1 + s} = \binom{n - i - 1}{h} \\ \text{aus II für } q = i; p = i + h + s.$$

$$9. a_{ik} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^h \binom{n - i - 1}{h} \binom{\lambda_k + m - h}{m} = \binom{\lambda_k + i - 1}{i - 1} \\ \text{aus I für } q = n - i - 1; p = \lambda_k + m^7).$$

d) *Charakterisierung des Variationsverfahrens und Abschätzung der $(n + 1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten.*

Die Abschätzung der $(n + 1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten beruht sowohl für die I. als auch für die II. Klasse auf der gleichzeitigen Variation ganzer Ketten $\eta_i, \eta_{i+1} \dots \eta_k$. (Def. 4, S. 5.)

⁷⁾ Hinsichtlich der Relationen I, II, III vergl. *Hagen, J. G.*: Synopsis der höheren Mathematik, Bd. I, S. 64 ff.

Wie diese Variation zu erfolgen hat, soll nun zunächst festgestellt werden.

a) Für die I. Klasse:

Wir werden hier nur ein Verfahren angeben zur Abschätzung der $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten, die dem Monotonieintervall $|\mathcal{J}| \geq d$ angehören. Es zeigt sich nämlich unmittelbar, daß man völlig analog mittels einer etwas abgeänderten Einteilung von \mathcal{J} jeden andern $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten abschätzen kann.

Man betrachte nur $V_\nu(x)$ für so große ν , daß die Maschenweite des Punktgitters kleiner ist als etwa $\frac{d}{(n+1)^3}$. x_μ sei ein innerer oder ein Randpunkt von \mathcal{J} . (Ist $\mathcal{J} = \left(\frac{\lambda}{N}, 1 - \frac{\left[\frac{n+1}{2} \right]}{N} \right)$, soll $\mu \leq N - n - \left[\frac{n+1}{2} \right]$ sein). $|\eta_\mu^{(n)} - \eta_{\mu+1}^{(n)}|$ soll abgeschätzt werden. Zu diesem Zweck trägt man von $x_\mu - \left[\frac{n}{2} \right]$ nach links und von $x_\mu + \left[\frac{n+1}{2} \right]$ nach rechts Intervalle L der Länge $\frac{d}{2(n+3)}$ ab und versieht sie fortlaufend mit negativen bzw. positiven Indizes. Diese Konstruktion wird nach beiden Seiten so lange fortgesetzt, als man mit ihr im Monotonieintervall bleibt. Das Intervall $(x_\mu - \left[\frac{n}{2} \right], x_\mu + \left[\frac{n+1}{2} \right])$ wird als \mathcal{J}_0 bezeichnet. Nun wählt man n Intervalle mit geraden Indizes — die Null werde als gerade betrachtet —, unter denen sich \mathcal{J}_0 befindet und numeriert sie von links nach rechts fortlaufend. \mathcal{J}_0 erhalte den Index k . Anstatt x_μ schreiben wir x_{ν_k} . Aus jedem der übrigen Intervalle greift man ein Paar konsekutiver Gitterpunkte $x_{\nu_i}; x_{\nu_i+1}$ heraus, für welche gilt:

$$|\eta^n(x_{\nu_i}) - \eta^n(x_{\nu_i+1})| = |V_\nu(x_{\nu_i}) - V_\nu(x_{\nu_i+1})| \leq \frac{l_4 M (n+3)}{d}$$

was nach Abschnitt 1 immer möglich ist. Durch die Punktreihe $x_{\nu_1 + \left[\frac{n+1}{2} \right]}, x_{\nu_2 + \left[\frac{n+1}{2} \right]} \dots x_{\nu_n + \left[\frac{n+1}{2} \right]}$ und die entsprechende Reihe $\eta_{\nu_1 + \left[\frac{n+1}{2} \right]} \dots \eta_{\nu_n + \left[\frac{n+1}{2} \right]}$ von Lösungswerten wird die Kette der gleichzeitig varierten Punkte und die Art der Variation bestimmt.

⁸⁾ Sollte x_μ linker Randpunkt des Monotonieintervalls sein, so ist

$$J_0 = \left(x_\mu, x_{\mu + \left[\frac{n+1}{2} \right]} \right)$$

b) Für die II. Klasse:

Wir bilden zu einem Paar $\eta_{\mu}^{(n)}, \eta_{\mu+1}^{(n)}$ eines \mathcal{F} eine Kette von n getrennten Monotonieintervallen, deren Existenz wir ja voraussetzen und setzen in jedem außer demjenigen, von welchem wir ausgingen, willkürlich einen Gitterpunkt x_{ν_i} fest, der nicht gerade rechter Randpunkt ist und erhalten mit $x_{\mu+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ zusammen die zwei Punktreihen:

$$x_{\nu_1+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}, x_{\nu_2+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdots x_{\mu+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = x_{\nu_h+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdots x_{\nu_n+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \text{ falls } h < n$$

$$\eta_{\nu_1+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdots \cdots \cdots \eta_{\mu+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = \eta_{\nu_h+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \cdots \eta_{\nu_n+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$$

mit derselben Bedeutung wie oben.

Unser Ziel ist, eine *zusammenhängende Kette* von η_i so zu variieren, daß

1. außer den Paaren $\eta_{\nu_1}^{(n)} \eta_{\nu_1+1}^{(n)}; \eta_{\nu_2}^{(n)} \eta_{\nu_2+1}^{(n)} \cdots \eta_{\nu_n}^{(n)} \eta_{\nu_n+1}^{(n)}$ keine n^{ten} Differenzenquotienten geändert werden.

2. für die Differenzenquotienten eines jeden Paares die Änderungen einander entgegengesetzt gleich sind.

Durch die Forderung 1. ist zunächst die Auszeichnung der Werte $\eta_{\nu_i+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}; \nu = 1, 2 \dots n$ in der Kette der variierten Punkte gerechtfertigt; denn diese Punkte treten zum ersten Mal in den $\eta_{\nu_i}^{(n)}$ auf.

Die Variation, welche die Forderungen 1 und 2 erfüllt, lautet nun:

$$\eta_{\nu_i+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor+k} \left| \eta_{\nu_i+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor+k} + \sum_{h=1}^i \binom{\nu_i - \nu_h + m + k}{m} \xi_h \right.$$

für alle $i = 1, 2 \dots n-1$ und $k < \nu_{i+1} - \nu_i$

$$\text{und } \eta_{\nu_n+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left| \eta_{\nu_n+\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} - \sum_{h=1}^n \binom{\nu_n - \nu_h + m}{m} \xi_h \right.$$

wobei $m = n-2$ und die $\xi_h, h = 1, 2 \dots n$ noch näher zu bestimmende Größen sind.

Daß bei dieser Art der Variationen die Forderungen 1 und 2 für alle $\eta^{(n)}(x_\nu)$ mit $x_{\nu_1} \leq x_i < x_{\nu_n}$ erfüllt sind, ergibt sich unmittelbar aus den Formeln $1_\alpha, 1_\gamma$ und 2 des vorigen Abschnittes und aus dem Ausdruck

der $\eta_{\nu}^{(n)}$ in den η_i . Für die $\eta^{(n)}(x_{\nu})$ mit $x_{\nu} < x_{\nu_1}$ und $x_{\nu} > x_{\nu_{n+n}}$ ist nichts zu beweisen, da kein in diesem Quotienten auftretendes η_{ν} variiert wird. Es bleibt also zu zeigen, daß die Freiheit, welche in den unbestimmten Größen $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ steckt, genügt, um die Forderungen 1 und 2 S. 18 auch für die $\eta^{(n)}(x_r)$, $r = \nu_n, \nu_{n+1} \dots \nu_{n+n}$ zu befriedigen.

Wir behaupten, daß die $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$ so wählbar sind, daß

$\alpha)$ $\xi_h \neq 0$ für $h = 1, 2 \dots n$, ja sogar $\left| \frac{\xi_k}{\xi_i} \right| < C_1$ fest, für beliebiges i und beliebiges k .

$\beta)$ $\frac{\xi_h}{\xi_{h+1}} < 0$ für jedes h .

$\gamma)$ $\text{sig } \xi_1$ und $|\xi_1| \neq 0$ beliebig.

Beweis: Der Beweis dieser Behauptungen steckt in der Existenz und den Eigenschaften der Lösungen eines Systems von n linearen homogenen Gleichungen in den n Variablen $\xi_1 \dots \xi_n$.

$$S) \quad \sum_{k=1}^n A_{ik} \xi_k = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \dots n \\ k = 1, 2 \dots n. \end{array}$$

Dabei ist

$$A_{ik} = (-1)^i \sum_{\sigma=0}^{n-i} (-1)^{\sigma} \binom{n}{i+\sigma} \binom{\lambda_k + m - \sigma}{m} \left\{ \begin{array}{l} k = 1, 2 \dots n-1 \\ i \neq 1 \end{array} \right. \quad \lambda_k = \nu_n - \nu_k$$

$$A_{1k} = \sum_{\sigma=0}^n (-1)^{\sigma} \binom{n}{\sigma} \binom{\lambda_k + m - \sigma}{m} - \sum_{\sigma=1}^{n-1} (-1)^{\sigma} \binom{n}{1+\sigma} \binom{\lambda_k + m - \sigma}{m} \quad k \neq n$$

$$A_{1n} = -\binom{n}{1} + \binom{n}{0} = -(n-1); \quad A_{in} = (-1)^i \binom{n}{i} \quad \text{für } i \neq 1.$$

Die erste Gleichung des Systems S drückt aus, daß $\eta_{\nu_n}^{(n)}$ und $\eta_{\nu_n+1}^{(n)}$ entgegengesetzt gleich geändert werden, während die übrigen die Invarianz von $\eta_{\nu_n+i}^{(n)}$; $i = 2, 3 \dots n$ gegenüber den Variationen zum Ausdruck bringen.

Notwendig und hinreichend für die Existenz eines nicht trivialen Lösungssystems ist

$$|A_{ik}| = 0.$$

Daß diese Bedingung erfüllt ist, ergibt sich sofort durch Addition der Zeilen der Determinante. Für die letzte Kolonne erhält man dabei genau die Formel 5 des vorigen Abschnittes. In den

$$\sum_{i=1}^n A_{ik}, \quad k = 1, 2 \dots n-1$$

sammelt man zunächst die Glieder mit $\binom{\lambda_k + m - h}{m}$, h fest, als Faktor und erhält

$$\begin{aligned} \binom{\lambda_k + m - h}{m} (-1)^h \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{s}{s} \binom{n}{h+s} &= (-1)^h C_h \cdot \binom{\lambda_k + m - h}{m} \\ &= (-1)^h \binom{n-1}{h} \cdot \binom{\lambda_k + m - h}{m} \text{ nach Gleichung 6.} \end{aligned}$$

Danach ist

$$\sum_{i=1}^n A_{ik} = S_k = \sum_h (-1)^h \binom{n-1}{h} \binom{\lambda_k + m - h}{m} = 0$$

nach Gl. 7 für $k = 1, 2 \dots n-1$.

Das System I hat also ein nicht triviales fundamentales Lösungssystem. Wir erhalten ein solches, indem wir aus I. ein System I' von $n-1$ linear unabhängigen Gleichungen in n -Variablen herleiten und dieses auflösen. Das System I' hat die Gestalt

$$\begin{aligned} &k = 1, 2 \dots n \\ &b_j A_{j+1,k} \xi_k = 0; \quad i = n-2, n-3 \dots 1 \\ \text{I'.} \quad &j = i \dots n-1, \quad \text{wobei } b_j = \binom{j}{i}. \end{aligned}$$

Dazu kommt unverändert die letzte Gleichung aus I, die wir als erste des neuen Systems schreiben. Dieses Gleichungssystem bringt man nun in die Form

$$\text{II.} \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_k = 0; \quad i = n-1, \dots 1.$$

⁹⁾ Ueber beide daselbst auftretenden Indices ist zu summieren. i ist fest für jede Gleichung; für die zweite ist es $n-2$, für die dritte $n-3$, u. s. w.

Die Form von Δ_1 und Δ_n ist ohne weiteres klar. Da aus allen Δ_ρ der Faktor $\frac{1}{\prod_{v=1}^m v!}$ herausgezogen werden kann, fällt er für die Lösungen

nicht in Betracht. Nach seiner Entfernung kann man durch sukzessive Kombination von Zeilen die Determinante auf die Form bringen:

$$\Delta_\rho' = (-1)^{\rho-1} \begin{vmatrix} \lambda_1^m & \lambda_2^m & \dots & \lambda_{\rho-1}^m & \lambda_{\rho+1}^m & \dots & \lambda_n^m \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_n^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_n \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^\rho \prod_1^n (\lambda_j - \lambda_k);$$

$$j < k; (j, k) \neq \rho.$$

Nach Definition der λ_k sind alle Faktoren eines jeden Produktes größer als Null. Daraus resultiert sofort die Richtigkeit der Behauptungen β und γ und der ersten aus α (S. 19) bezüglich der Lösungen. Die Richtigkeit der zweiten Behauptung aus α zeigen wir zunächst für

$$\left| \frac{\xi_\rho}{\xi_n} \right|, \rho = 1, 2 \dots n-1$$

$$\left| \frac{\xi_\rho}{\xi_n} \right| = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_n) l^{n-2}}{\prod_{i=1}^{\rho-1} (\lambda_i - \lambda_\rho) \prod_{k=1}^{n-\rho-1} (\lambda_\rho - \lambda_{\rho+k}) l^{n-2}}; i \neq \rho.$$

Aus $\delta_1 \leq l(\lambda_i - \lambda_j) < 1$, ($\delta_1 = \text{Min} \left(\frac{d}{2n+3}, \delta; \frac{|L|}{2n+2} \right)$; d und δ S. 12; $|L|$ S. 14) für $i < j$ folgt

$$\delta_1^{n-2} < \left| \frac{\xi_\rho}{\xi_n} \right| < \frac{1}{\delta_1^{n-2}} \quad \text{und}$$

$$a) \quad \delta_1^{2(n-2)} < \left| \frac{\xi_h}{\xi_k} \right| = \left| \frac{\xi_h}{\xi_n} : \frac{\xi_k}{\xi_n} \right| < \frac{1}{\delta_1^{2(n-2)}} = C_2.$$

$\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ sei ein Lösungssystem mit später noch zu bestimmendem $\text{sig}(\xi_1)$. Natürlich ist auch $\varepsilon \xi_1, \varepsilon \xi_2 \dots \varepsilon \xi_n$ ein Lösungssystem für jedes beliebige $\varepsilon > 0$. Nun nehme ich mit $\varepsilon \xi_1 \dots \varepsilon \xi_n$ anstatt mit $\xi_1 \dots \xi_n$ die

auf S. 18 beschriebenen Variationen vor. Durch sie entstehe aus η_i, η_i^* aus $\eta_i^{(h)}, \eta_i^{*(h)}$ für $h = 1, 2 \dots n$; aus $F_i = F(x_i, \eta_i, \dots, \eta_i^{(n)})$ wird $F(x_i, \eta_i^*, \dots, \eta_i^{*(n)}) = F_i^*$

$$\text{und } \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{N-\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} F_i \xrightarrow{\text{geht über in}} \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{N-\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} F_i^* = \Sigma^*.$$

Wegen der Minimaleigenschaft von Σ ist

$$\Sigma - \Sigma^* \leq 0.$$

Diese Differenz schreiben wir in der Form $\sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{N-\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (F_i - F_i^*)$ und

entwickeln die einzelnen Summanden nach dem Mittelwertsatz. Dabei berücksichtigen wir folgendes:

1. $F(z_1, z_2, \dots, z_{n+2})$ hat als Funktion der $n+2$ freien Variablen z_j nach Voraussetzung stetige erste und zweite Derivierte. Es existiert also

$$b) \quad C_3 = \text{Max} \left(\left| \frac{\partial F}{\partial z_i} \right|, \left| \frac{\partial^2 F}{\partial z_j \partial z_k} \right| \right) \quad i, j, k = 1, 2 \dots n+2$$

im abgeschlossenen Bereich. Ferner gilt

$$2. \quad \left. \begin{aligned} \eta_{\nu_i}^{(n)} - \eta_{\nu_i}^{*(n)} &= -\frac{\varepsilon \xi_i}{l^n}; \\ \eta_{\nu_i+1}^{(n)} - \eta_{\nu_i+1}^{*(n)} &= \frac{\varepsilon \xi_i}{l^n} \end{aligned} \right\} \quad \text{für } i = 1, 2 \dots n$$

$\eta_{\nu}^{(n)} - \eta_{\nu}^{*(n)} = 0$ für alle übrigen.

3. $\eta_{\nu_i}^{(n-1)} - \eta_{\nu_i}^{*(n-1)} = -\frac{\varepsilon \xi_i}{l^{n-1}}$ für n gerade, bzw. $\eta_{\nu_i+1}^{(n-1)} - \eta_{\nu_i+1}^{*(n-1)} = -\frac{\varepsilon \xi_i}{l^{n-1}}$ für n ungerade. $\eta_{\nu}^{(n-1)} - \eta_{\nu}^{*(n-1)} = 0$ für alle übrigen mit $\nu < \nu_n$ bzw. $\nu < \nu_{n+1}$ nach 1 _{β} und 3 vorigen Abschnittes.

$$4. \quad \text{Für } \nu_1 \leq \nu \leq \nu_{n+2}; \rho \geq 2 \text{ ist } \eta_{\nu}^{(n-\rho)} - \eta_{\nu}^{*(n-\rho)} = -\frac{\varepsilon}{l^{n-\rho}} \sum_{h=1}^n \binom{\mu_{\nu h}}{\rho-2} \xi_h,$$

wobei die μ_{vh} nach Formel 4, S. 16¹⁰⁾ berechnet werden können. Sicher ist nach Formel III, S. 15

$$\sum_v \binom{\mu_{vh}}{\rho-2} \leq \binom{N}{\rho-1} \text{ für alle } h$$

und

$$c \quad \boxed{l^{\rho-1} \sum_v \binom{\mu_{vh}}{\rho-2} \leq \frac{1}{(\rho-1)!}}.$$

5. Da $\eta_v^{(n)} - \eta_v^{*(n)} = 0$ für $v \geq v_n + 2$

und $\eta_v^{(n-\rho)} - \eta_v^{*(n-\rho)} = 0$ für $v \geq v_n + n$ $\rho = 1, 2 \dots n$ wobei $\eta_v^{(0)} = \eta_v$

und nach Definition entweder $\eta_v^{(n-\rho)} = \frac{\eta_v^{(n-\rho-1)} - \eta_{v-1}^{(n-\rho-1)}}{l}$ oder

$$\eta_v^{(n-\rho)} = \frac{\eta_{v+1}^{(n-\rho-1)} - \eta_v^{(n-\rho-1)}}{l} \quad \rho = 0, 1, 2 \dots n-1, \text{ so gilt auch}$$

$$\eta_v^{(n-\rho)} - \eta_v^{*(n-\rho)} = 0 \quad \text{für } v \geq v_n + 2; \quad \rho = 1, 2 \dots n$$

und speziell $\eta_{v_n+1}^{(n-1)} - \eta_{v_n+1}^{*(n-1)} = 0$ bzw. $\eta_{v_n+1}^{(n-1)} - \eta_{v_n+1}^{*(n-1)} = -\frac{\varepsilon \xi_n}{l^{n-1}}.$

Nun denken wir uns die Entwicklung nach dem Mittelwertsatz vorgenommen. Alle Summanden, die nicht $\frac{\partial F}{\partial \eta^{(n)}}$ enthalten, rechts vom \leq Zeichen vereinigt, durch ihre absoluten Beträge ersetzt, addiert und die Ungleichung mit l^n multipliziert. Wir erhalten

$$-\sum_{i=1}^n \varepsilon \xi_i \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{(n)}} \right)_{v_i}^* - \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{(n)}} \right)_{v_i+1}^* \right] \leq \varepsilon l C_4 \sum_{i=1}^n |\xi_i|; \quad C_4 = n C_3^{11})$$

dabei ist

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{(n)}} \right)_v^* = \frac{\partial}{\partial \eta^{(n)}} F \left(x_v, \eta_v + \theta_1 (\eta_v - \eta_v^*) + \dots \eta_v^{(n)} + \theta_n (\eta_v^{(n)} - \eta_v^{*(n)}) \right)$$

$$0 \leq \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \leq 1.$$

¹⁰⁾ Mittels der Variationsvorschrift und der Form der Differenzenquotienten.

¹¹⁾ Dies resultiert aus den Punkten 2, 3, 4, 5, b und c, c₃ siehe S. 23.

Da für $\varepsilon \rightarrow 0$ $(\eta_{\nu}^{(i)} - \eta_{\nu}^{*(i)}) \rightarrow 0$ $i = 0, 1, 2 \dots n$

so gilt
$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{(n)}} \right)_{\nu}^* \rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{(n)}} \right)_{\nu} \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Dividieren wir die Ungleichung durch ε , so erhalten wir für die Grenze $\varepsilon = 0$.

$$- \sum_i \xi_i \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{(n)}} \right)_{\nu_i} - \left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{(n)}} \right)_{\nu_{i+1}} \right] \leq l C_4 \sum_{i=1}^n |\xi_i|.$$

Die linke Seite entwickeln wir nun abermals nach dem Mittelwertsatz. Wegen $|\eta^{(n)}| \leq M$ und den Randbedingungen existiert ein C_5 , so daß

$$|\eta^{(j)}| < C_5 \quad \text{für } j = 0, 1 \dots n$$

woraus folgt: $|\eta_{\nu}^{(i)} - \eta_{\nu+1}^{(i)}| \leq l C_5$ für $i = 0, 1 \dots n-1$.

Geht man wiederum vor wie vorhin, indem man nur die Summanden mit $\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^{(n)}}$ links behält, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n \xi_i (\eta_{\nu_i+1}^{(n)} - \eta_{\nu_i}^{(n)}) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^{(n)}} \right)_{\nu_i, \nu_i+1} \stackrel{12)}{\leq} l C_6 \sum_{i=1}^n |\xi_i|$$

$$C_6 = (n+1) \text{ Max. } (C_4 C_5, C_3).$$

Jetzt setzt man sich ξ_1 , so fest, daß für die I. Klasse

$$\xi_h (\eta_{\nu_h+1}^{(n)} - \eta_{\nu_h}^{(n)}) \geq 0 \quad \text{für das am Anfang dieses Abschnittes definierte } h,$$

für die II. Klasse

$$\xi_i (\eta_{\nu_i+1}^{(n)} - \eta_{\nu_i}^{(n)}) \geq 0 \quad \text{für } i = 1, 2 \dots n.$$

Benutzt man für beide Klassen die Ungleichung

$$0 < \alpha \leq \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \eta^{(n)}} \leq C_3$$

¹²⁾ $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial^2 \eta^{(n)}} \right)_{\nu_i, \nu_i+1}$ bedeutet $\frac{\partial^2}{\partial^2 \eta^{(n)}} F(x_{\nu_i} + \theta_0(x_{\nu_i+1} - x_{\nu_i}) \dots$
 $\dots \eta_{\nu_i}^{(n)} + \theta_{n-1}(\eta_{\nu_i+1}^{(n)} - \eta_{\nu_i}^{(n)}))$

und außerdem für die I. die Voraussetzung:

$$\left| \eta_{\nu_i+1}^{(n)} - \eta_{\nu_i}^{(n)} \right| \leq l \frac{4M(n+3)}{d} = l C_7 \quad i \neq h$$

so kommt man in beiden Fällen zu einer Ungleichung der Form

$$\left| \eta_{\nu_i+1}^{(n)} - \eta_{\nu_i+1}^{(n)} \right| \leq l C.$$

Dabei kann man

$$C = \frac{n(n+1) \text{ Max } (C_6; C_6 C_7)}{\alpha \delta_1^{2(n-2)}} \text{ nehmen.} \quad (\delta_1 \text{ S. 22})$$

Soll ein $(n+1)^{\text{ter}}$ Differenzenquotient $\frac{\eta_{\mu-1}^{(n)} - \eta_{\mu}^{(n)}}{2}$ für den $N-\mu < n + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ ist, abgeschätzt werden, so versagt unser Verfahren zur Berechnung der ξ_i . Man kann aber in diesem Fall mit der Kette der gleichzeitig variierten Punkte einfach in $\eta_{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ beginnen und die Variationen der einzelnen Punkte nach einem Gesetze vornehmen, das die sinngemäße Uebertragung unserer bisher befolgten Regel auf den Fall ist, daß man die Kette der variierten Punkte von rechts nach links statt von links nach rechts durchläuft.

e) *Folgerungen aus der Abschätzung und Beweis des Hauptsatzes.*

Hiermit ist gezeigt, daß für alle genügend feinen Einteilungen des Intervalls $(0, 1)$ die $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzenquotienten der Lösungen der diskreten Variationsprobleme n -ter Ordnung, welche auf die in der Einleitung charakterisierte Weise einem Variationsproblem n -ter Ordnung entspringen, völlig unabhängig von der Feinheit des Teilungsmaschen-netzes beschränkt sind, wofern nur

1. die in der Einleitung genannten Voraussetzungen hinsichtlich des Variationsintegranden erfüllt sind und

2. unter den auferlegten Rand- und Beschränkungsbedingungen die Menge der zugelassenen Funktionen aus mehr als einer Funktion besteht.

Man kann darum stets aus der Menge der linear interpolierten n -ten Differenzenquotienten der Lösungen der diskreten Probleme eine unendliche Teilfolge auswählen, die in $(0, 1)$ gleichmäßig einer stetigen Funk-

tion $U_n(x)$ zustrebt. Dabei wird die der N -ten Einteilung entsprechende durch lineare Interpolation der n -ten Differenzenquotienten entstehende Funktion im Intervall $\left(0, \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{N}\right)$ dem n -ten Differenzenquotienten $\eta_{\left[\frac{n}{2}\right]}^{(n)}$, im Intervall $\left(1 - \frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{N}, 1\right)$ dem n -ten Differenzenquotienten $\eta_{N-\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{(n)}$ gleichgesetzt.

Durch die Gleichungen

$$U_{i-1} = a_{i-1} + \int_0^x U_i(x) dx \quad i = n, n-1 \dots 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$

wird eine Folge von n Funktionen U_0, U_1, \dots, U_{n-1} definiert, von welchen jede die Ableitung der vorhergehenden ist¹³⁾. Gemäß ihrer Definition und der Herleitung von $U_n(x)$ nehmen die $U_i(x)$ gerade die Randwerte a_i bzw. b_i für $x=0$ bzw. $x=1$ an $i=0, 1, 2 \dots n-1$ ¹⁴⁾ $U(x) = U_0(x)$ ist also eine n mal stetig differentiierbare Funktion, und sie gehört zur Menge der in unserem Problem konkurrenzfähigen Funktionen. Ersetzt man im Variationsintegranden $y(x)$ durch $U(x)$ und $y^{(i)}(x)$ durch $U^{(i)}(x)$, $U^{(i)}(x) = U_i(x)$, $i=1, 2 \dots n$, so wird der Wert des Funktionals nach bekannten Abschätzungen gerade ein Minimum¹⁵⁾. Die Funktion $U(x)$ ist daher eine von denjenigen Funktionen, deren Existenz im Hauptsatz behauptet wurde, und der Hauptsatz ist damit bewiesen.

(Eingegangen den 1. Januar 1933)

¹³⁾ Dazu tritt als $(n+1)$ te Funktion $U_n(x)$, und es gilt $U'_{n-1}(x) = U_n(x)$.

¹⁴⁾ Vgl. auch die Festsetzungen S. 10.

¹⁵⁾ Vgl. z. B. die zit. Arbeit von H. Lewy.