**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 6 (1934)

**Artikel:** Sulle serie di potenze che rappresentano funzioni razionali a coefficienti razionali e con i poli appartenenti ad una progressione geometrica.

**Autor:** Ricci, Giovanni

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-7591

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 20.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Sulle serie di potenze che rappresentano funzioni razionali a coefficienti razionali e con i poli appartenenti ad una progressione geometrica

Di GIOVANNI RICCI, Pisa

**1.** Sia $f(z)$ una funzione razionale di $z$ a coefficienti razionali; nello sviluppo

$$f(z) = \frac{s_0}{t_0} + \frac{s_1}{t_1} z + \frac{s_2}{t^2} z^2 + \dots \qquad (t_k \geqq 1,\ (s_k, t_k) = 1;\ k = 0, 1, 2, \dots)$$

la successione dei coefficienti (che risultano razionali) soddisfa alla ben nota condizione di EISENSTEIN[1]), cioè esiste un intero $T$ tale che $T^k$ è divisibile per $t_k$ $(k = 1, 2, \dots)$; questa condizione, ben lontana dall' essere caratteristica, ci dice fra l'altro che è limitato il numero degl' interi primi divisori del prodotto $t_0 t_1 \dots t_k$ comunque grande sia $k$. Estremamente più complicata risulta la natura aritmetica della successione $s_0, s_1, s_2, \dots$ dei numeratori. Su questo argomento G. PÓLYA[2]) ha determinato tutte le funzioni razionali per le quali è limitato il numero dei divisori primi distinti di tutti i prodotti $s_0 s_1 \dots s_k$; questo autore è giunto al risultato seguente: Siano $P(z)$ un polinomio in $z$ a coefficienti razionali; $a$, $b$ numeri razionali; $m$ intero naturale. Consideriamo le quattro seguenti operazioni

$$\text{(I)}\quad f^*(z) = f(z) + P(z); \qquad \text{(II)}\quad f^*(z) = a f(z); \qquad \text{(III)}\quad f^*(z) = f(bz)$$

$$\text{(IV)}\quad f^*(z) = f_0(z^m) + z f_1(z^m) + \dots + z^{m-1} f_{m-1}(z^m)\ .$$

Ebbene, tutte le funzioni razionali che godono della proprietà indicata si ottengono dalla serie geometrica $(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \dots$ mediante l'applicazione di un numero finito di operazioni (I), (II), (III) e (IV).

Inoltre G. SZEGÖ[3]) ha studiate le serie $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$

[1]) Ved. per esempio *G. Pólya* und *G. Szegö*, Aufgaben und Lehrsätze, II, p. 139, Leipzig 1925.

[2]) *G. Pólya*, Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen, Journal für Mathematik, Bd. 151 (1921), pp. 1—31.

[3]) *G. Szegö*, Ueber Potenzreihen mit endlichen vielen verschiedenen Koeffizienten, Sitzungsber. d. Preussischen Akad. d. Wiss. 1922, pp. 88—91.

che hanno soltanto un numero finito di coefficienti distinti, concludendo fra l'altro che se $f(z)$ è razionale ha necessariamente la forma

$$f(z) = P(z)\,(1 - z^m)^{-1} \qquad (m \text{ intero naturale e } P(z) \text{ polinomio in } z).$$

**2.** In questa Nota ci proponiamo di dimostrare il seguente:

*Teorema A.* Se la funzione $f(z)$ razionale in $z$, a coefficienti razionali, ha soltanto i poli semplici

$$1, \quad \frac{1}{a^{m_1}}, \quad \frac{1}{a^{m_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{a^{m_h}} \qquad (h \geqq 1)$$

($a$, $m_1$, $m_2$, ..., $m_h$ razionali interi; $|a| \geqq 2$; $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_h$) la successione $s_0$, $s_1$, $s_2$, $s_3$, ... dei numeratori del suo sviluppo

$$(1) \qquad f(z) = \frac{s_0}{t_0} + \frac{s_1}{t_1} z + \frac{s_2}{t_2} z^2 + \ldots \quad (t_k \geqq 1,\ (s_k, t_k) = 1;\ k = 0, 1, 2, \ldots)$$

gode delle due seguenti proprietà:

(I) qualunque sia l'intero primo $p$, l'esponente $l_x(p)$ della massima potenza di $p$ che divide il prodotto $s_0 s_1 s_2 \ldots s_x$ soddisfa alla limitazione

$$l_x(p) < \frac{Kx}{\log p}$$

essendo $K$ indipendente da $x$ e $p$.

(II) detto $P_x$ il massimo divisore primo del prodotto $s_0 s_1 s_2 \ldots s_x$ risulta

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{x \log x}{P_x} \leqq 4.$$

*Osservazione 1ª.* Siano $c$, $c_0$, $c_1$, ..., $c_h$ razionali interi non nulli, e $g(z)$ polinomio in $z$ e poniamo

$$(2) \qquad f(z) = g(z) + \frac{1}{c}\left\{\frac{c_0}{1 - z} + \frac{c_1}{1 - a^{m_1} z} + \ldots + \frac{c_h}{1 - a^{m_h} z}\right\}$$

si consideri il polinomio

$$F(y) = c_0 + c_1 y^{m_1} + c_2 y^{m_2} + \ldots + c_h y^{m_h}$$

e diciamo $n$ il massimo fra i gradi dei suoi fattori irriducibili. Dalla dimostrazione che segue risulterà che alla (II) potrà sostituirsi quest' altra più precisa limitazione

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{x \log x}{P_x} \leqq 2 + \frac{2}{n}.$$

Anzi si può precisare ancora più:

(II″) se $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}$, il numero $M_\alpha(x)$ degl' interi primi distinti maggiori di $\alpha x \log x$ che dividono il prodotto $s_0 s_1 \ldots s_k$ soddisfa alla limitazione

$$M_\alpha(x) > \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \alpha\right\} x + O\left(\frac{x \log \log x}{\log x}\right).$$

*Osservazione 2ª.* Se lo sviluppo di $f(z)$ gode delle proprietà (I) e (II), tali proprietà valgono anche per lo sviluppo di ogni funzione

$$(3) \qquad f(z) + P(z),\ \beta f(z),\ \int_0^z dz \int_0^z dz \ldots \int_0^z f(z)\, dz,\ f^{(k)}(z),\ f(\gamma z)$$

($P(z)$ polinomio a coefficienti razionali, $\beta$ e $\gamma$ razionali, $k = 1, 2, 3, \ldots$) ad eccezione dell' ultima $f(\gamma z)$ per la quale la proprietà (I) risulta soddisfatta soltanto per $p$ maggiore di un conveniente $p_0$; infatti dobbiamo escludere i fattori primi del numeratore di $\gamma$ pei quali la (I) non risulta valida. Quanto alla derivata

$$f^{(k)}(z) = k!\, \frac{s_k}{t_k} + \frac{(k+1)!}{1!} \frac{s_{k+1}}{t_{k+1}} z + \frac{(k+2)!}{2!} \frac{s_{k+2}}{t_{k+2}} z^2 + \ldots$$

si osservi che detto $v_x$ l'esponente della massima potenza di un numero primo $p$ che divide $(x!)^k$ risulta

$$v_x = k \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{x}{p^s}\right] \leqq k \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x}{p^s} = \frac{kx}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \ldots\right) = \frac{kx}{p-1} =$$
$$= \frac{k \log p}{p-1} \cdot \frac{x}{\log p};$$

dunque la proprietà (I) permane tutte le volte che si deriva.

Possiamo concludere in conseguenza del Teorema $A$ che:

Ogni funzione $f^*(z)$ di $z$, ottenuta dalla $f(z)$ assegnata in (2), mediante un numero finito di operazioni successive del tipo di quelle schematicamente indicate in (3), possiede uno sviluppo a coefficienti razionali analogo a (1) la cui successione dei numeratori $s_0^*, s_1^*, s_2^*, \ldots$ gode delle due proprietà:

Per ogni intero primo $p$ maggiore di un conveniente $p_0$, l'esponente $l_x(p)$ della massima potenza di $p$ che divide il prodotto $s_0^* s_1^* \ldots s_x^*$ soddisfa alla limitazione $l_x(p) < \frac{Kp}{\log p}$, essendo $K$ indipendente da $x$ e $p$; detto $P_x$ il massimo divisore primo del prodotto $s_0^* s_1^* \ldots s_x^*$ risulta

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{x \log x}{P_x} \leqq 4 .$$

**3.** Per dimostrare il Teorema $A$ sopra enunciato ci serviremo dei due lemma seguenti, che già in se stessi possono presentare un qualche interesse.

*Lemma B.* Se $F(y)$ è un polinomio in $y$ di grado $\geqq 1$, a coefficienti interi e irriducibile, e $h(p)$ è il numero delle radici distinte secondo (mod. $p$) della congruenza

$$F(y) \equiv 0 \pmod{p} \qquad (p \text{ primo}),$$

risulta

$$\sum_{p \leqq \eta} h(p) = \frac{\eta}{\log \eta} + O\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right) . \tag{4}$$

*Osservazione.* Questa proposizione ci dice che ogni polinomio $F(y)$ irriducibile, rispetto alla somma $\Sigma h(p)$ si comporta asintoticamente come un polinomio di primo grado $ay + b$ pel quale la (4) è evidentemente valida perché si riduce alla formula nota

$$\sum_{p \leqq \eta} 1 - \sum_{p / (a,b)} 1 = \frac{\eta}{\log \eta} + O\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right) .$$

La (4) è analoga alla formula $\sum_{p \leqq \eta} \frac{h(p) \log p}{p} = \log \eta + O(1)$ stabilita da T. NAGEL[4]).

[4]) *T. Nagel,* Généralisation d'un théorème de Tchebytcheff, Journal de Mathématiques 8e. s., t. 4 (1921), pp. 343 – 356, ved. p. 352.

*Lemma C.* Sia

$$(5) \qquad G(x) = F(a^x) = c_0 + c_1 a^x + c_2 a^{2x} + \ldots + c_n a^{nx}$$
$$(c_0 \neq 0,\ c_n \neq 0,\ n \geqq 1,\ |a| \geqq 2)$$

essendo $a, c_0, c_1, \ldots, c_n$ interi e $F(y)$ irriducibile. Diciamo $P_x$ per $x \geqq 1$ il massimo divisore primo del prodotto

$$G(1)\, G(2) \ldots G(x)$$

risulta

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{x \log x}{P_x} \leqq 2 + \frac{2}{n} \ ;$$

anzi, più precisamente: Se $0 < \alpha < \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)}$, il numero $M_\alpha(x)$ degl' interi primi distinti maggiori di $\alpha\, x \log x$ che dividono il prodotto $G(1)\, G(2) \ldots G(x)$ soddisfa alla condizione

$$(6) \qquad M_\alpha(x) > \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \alpha\right\} x + O\left(\frac{x \log \log x}{\log x}\right).$$

**4.** Veniamo a dimostrare il Lemma *B.*

Sia in primo luogo $c_n = 1$, cioè $F(y) = c_0 + c_1 y + \ldots + c_{n-1} y^{n-1} + y^n$ e consideriamo il corpo algebrico $K(\theta)$ generato da una radice $\theta$ di $F(y) = 0$. Denotiamo con $h(p, r)$, $(r = 1, 2, \ldots, n)$, il numero degl' ideali primi diversi di grado $r$ che dividono l' ideale principale $[p]$ generato dal numero razionale primo $p$. Denotiamo con $\mathfrak{p}_r$ gl' ideali primi di grado $r$ del corpo $K(\theta)$; abbiamo $N\mathfrak{p}_r = p^r$. Inoltre posto

$$[p] = \Pi\, \mathfrak{p}_1 \cdot \Pi\, \mathfrak{p}_2 \cdot \ldots \cdot \Pi\, \mathfrak{p}_n$$

convenendo di porre $= 1$ ogni prodotto che eventualmente risultasse vuoto di fattori, risulta

$$p^n = N[p] = p^{h(p,1)} \cdot p^{2h(p,2)} \cdot \ldots \cdot p^{nh(p,n)}$$

per cui $n = h(p, 1) + 2h(p, 2) + \ldots + n\, h(p, n)$ e in particolare per qualunque $r$ risulta

$$(7) \qquad h(p, r) \leqq n \ .$$

E' noto[5]) che il numero $\pi(\eta)$ degl' ideali primi di un corpo algebrico aventi la norma $\leqq \eta$ è dato dalla formula

$$\pi(\eta) = \sum_{N\mathfrak{p} \leqq \eta} 1 = \frac{\eta}{\log \eta} + O\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right); \tag{8}$$

d'altra parte pel significato di $h(p, r)$ e per la (7) risulta

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{\substack{\mathfrak{p}_1 \\ N\mathfrak{p}_1 \leqq \eta}} 1 = \sum\limits_{p \leqq \eta} h(p, 1), \\[2ex] \sum\limits_{\substack{\mathfrak{p}_i \\ N\mathfrak{p}_i \leqq \eta}} 1 = \sum\limits_{p^i \leqq \eta} h(p, i) \leqq n \sum\limits_{p^i \leqq \eta} 1 = \dfrac{n\, i\, \eta^{\frac{1}{i}}}{\log \eta} + o\left(\dfrac{\eta^{\frac{1}{i}}}{\log \eta}\right) = o\left(\dfrac{\eta}{\log^2 \eta}\right) \\[2ex] \qquad\qquad\qquad\qquad i = 2, 3, \ldots, n\,. \end{array}\right. \tag{9}$$

Tutte le volte che $p$ non divide l'*indice* dell' intero $\theta$ del corpo algebrico $K(\theta)$ si ha $h(p, 1) = h(p)$ (DEDEKIND)[6]). Il numero degl' interi razionali primi che dividono l' indice di $\theta$ è finito, quindi sommando membro a membro le (9) otteniamo

$$\pi(\eta) = \sum_{p \leqq \eta} h(p, 1) + o\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right) = \sum_{p \leqq \eta} h(p) + o\left(\frac{\eta}{\log^2 \eta}\right).$$

Da questa e dalla (8) segue la (4) nel caso particolare $c_n = 1$.

Ma la (4) vale ancora in generale: infatti se $F(y) = c_0 + c_1 y + \ldots + c_n y^n$ e si pone $z = c_n y$ risulta

$$c_n^{n-1} F(y) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = H(z)$$

ed esclusi gl' interi primi razionali che dividono $c_n$ (in numero finito) le due congruenze $F(y) \equiv 0 \pmod{p}$, $H(z) \equiv 0 \pmod{p}$ hanno un egual numero di radici distinte secondo (mod. $p$), e la (4), valendo per $H(z)$, vale anche per $F(y)$.

**5.** Veniamo a dimostrare il Lemma $C$.

Senza alterare la generalità possiamo supporre $c_n \geqq 1$ e $c_0$ primo con $a$ in guisa che, per qualunque intero positivo $x$, $G(x)$ risulti primo con $a$;

[5]) *E. Landau,* Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Leipzig 1918, p. 111.

[6]) Ved. per es. *L. Bianchi,* Teoria dei numeri algebrici, Pisa 1923, p. 404.

infatti in caso contrario potremmo assumere l' intero positivo $k$ abbastanza grande e porre

$$d\, G_1(x) = G(x+k) = F(a^{x+k}) = d(c_0' + c_1' a^x + c_2' a^{2x} + \ldots + c_n' a^{nx})$$

con $d$ opportuno divisore di $c_0$ e $c_0' = \frac{c}{d}$ primo con $a$; allora saremmo ridotti a dimostrare l'asserto per la funzione $G_1(x)$.

Scelti due numeri reali $\gamma$ e $\gamma'$ tali che

$$(10) \qquad 0 < \gamma < c_n |a|^{-n} < c_n < \gamma' = c_n + |c_{n-1}| + \ldots + |c_0|$$

risulta per $\xi' \leqq \xi$

$$(11) \quad |G([\xi'])| \leqq c_n |a|^{n[\xi']} + |c_{n-1}|\, |a|^{(n-1)[\xi']} + \ldots + |c_0| < \gamma' |a|^{n[\xi']} \leqq \gamma' |a|^{n\xi},$$

e per qualunque $\xi > 0$

$$|G([\xi])| \geqq \left(c_n - \frac{|c_{n-1}| + \ldots + |c_0|}{|a|^{[\xi]}}\right) |a|^{n[\xi]},$$

dunque si può determinare un numero $\xi_0 > 0$ abbastanza grande in guisa che per $\xi \geqq \xi_0$ si abbia per le (10)

$$(12) \qquad |G([\xi])| > \gamma |a|^n \cdot |a|^{n[\xi]} > \gamma |a|^{n\xi} .$$

Dalle (11) e (12) si conclude: Posto $a' = |a|$, per $\xi \geqq \xi_0$ e qualunque $\xi' \leqq \xi$ valgono le disuguaglianze

$$(13) \quad \begin{cases} n\,\xi \log a' + \log \gamma < \log |G([\xi])| < n\,\xi \log a' + \log \gamma', \\ \log |G([\xi'])| < n\,\xi \log a' + \log \gamma' . \end{cases}$$

Posto per $\xi \geqq \xi_0$

$$(14) \qquad \Phi(\xi) = \log |G(1)\, G(2) \ldots G([\xi])|,$$

abbiamo per le (13)

$$\Phi(\xi) \geqq \Phi(\xi_0) + \sum_{m=[\xi_0+1]}^{[\xi]} (n\, m \log a' + \log \gamma)$$

$$= \Phi(\xi_0) + \frac{n \log a'}{2} ([\xi] + [\xi_0] + 1)([\xi] - [\xi_0]) + ([\xi] - [\xi_0]) \log \gamma$$

$$(15) = \frac{n \log a'}{2} \xi^2 + O(\xi) .$$

**6.** Andiamo adesso a valutare il contributo portato nella funzione $\Phi(\xi)$ dalla potenza di un numero primo $p$ che divide il prodotto $|G(1)\,G(2)\ldots G(\xi)|$. Sia $(a, b) = 1$ e diciamo $g(b)$ l'esponente cui appartiene $a$ (mod. $b$), cioè il minimo intero positivo per cui $a^{g(b)} \equiv 1$ (mod. $b$). Se $x_0$ soddisfa alla congruenza

$$G(x) = F(a^x) \equiv 0 \pmod{b}\,, \tag{16}$$

l'intero $a^{x_0} = y_0$ soddisfa evidentemente alla congruenza

$$F(y) \equiv 0 \pmod{b}; \tag{17}$$

e inversamente a una radice $y_0$ della (17) corrispondono come radici della (16) tutte quelle eventuali della congruenza binomia

$$a^x \equiv y_0 \pmod{b}\,. \tag{18}$$

Ma il numero degl' interi positivi $\leqq \xi$ che soddisfano la (18) è $= \left[\frac{\xi}{g(b)}\right] + 1$, dunque, detto $h(b)$ il numero delle radici distinte secondo (mod. $b$) della (17), il numero degl' interi positivi $\leqq \xi$ che soddisfano la (16) è

$$\leqq h(b)\left(\left[\frac{\xi}{g(b)}\right] + 1\right). \tag{19}$$

L'intero primo $p$ entra in ogni fattore $G(m)$ del prodotto $G(1)\,G(2)\ldots G([\xi])$ a una potenza il cui esponente è $\leqq \left[\frac{\log|G(m)|}{\log p}\right]$, e quindi per la seconda delle (13) non supera

$$k = k(p, \xi) = \left[\frac{n\,\xi \log a' + \log \gamma'}{\log p}\right]. \tag{20}$$

Ne segue che detto $l(p)$ l'esponente della massima potenza di $p$ che divide il prodotto $G(1)\,G(2)\ldots G([\xi])$ abbiamo per la (19)

$$l(p) \leqq h(p)\left(\left[\frac{\xi}{g(p)}\right] + 1\right) + h(p^2)\left(\left[\frac{\xi}{g(p^2)}\right] + 1\right) + \ldots + h(p^k)\left(\left[\frac{\xi}{g(p^k)}\right] + 1\right)$$

$$\leqq \xi \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h(p^i)}{g(p^i)} + \sum_{i=1}^{k} h(p^i). \tag{21}$$

E' noto che[7]) qualunque sia l'intero positivo $i$ risulta $h(p^i) \leqq n D^2$ essendo $D$ il discriminante di $F(y)$; inoltre se $p$ non divide $D$ allora $h(p^i) = h(p) \leqq n$.

E' noto che[8]) se $p$ è primo dispari non divisore di $a$, e $p^r$ è la massima potenza di $p$ che divide $a^{g(p)} - 1$, allora risulta

$$g(p^i) = g(p) \quad \text{per } i \leqq r, \qquad g(p^i) = p^{i-r} g(p) \quad \text{per } i > r;$$

se $a$ è della forma $4h + 1$ e $2^r$ è la massima potenza di 2 che divide $a - 1$, allora risulta

$$g(2^i) = 1 \quad \text{per } i \leqq r, \qquad g(2^i) = 2^{i-r} \quad \text{per } i > r;$$

se $a$ è della forma $4h + 3$ e $2^r$ è la massima potenza di 2 che divide $a + 1$, allora risulta

$$g(2) = 1,\ g(2^i) = 2 \quad \text{per } 2 \leqq i \leqq r, \qquad g(2^i) = 2^{i-r} \quad \text{per } i > r.$$

Se $a$ è dispari risulta in ogni caso

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{g(2^i)} \leqq 1_1 + 1_2 + \ldots + 1_r + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots = r + 1;$$

e se $p$ è primo dispari non divisore di $a$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{g(p_i)} = \frac{1}{g(p)}\left(r + \frac{1}{p-1}\right). \tag{22}$$

Ricordando che in ogni caso è $h(p^i) \geqq n D^2$ si conclude per la (20) e la (21)

$$l(p) \geqq \xi \frac{n D^2}{g(p)}\left(r + \frac{1}{p-1}\right) + n D^2 \frac{n \xi \log a' + \log \gamma'}{\log p} \tag{23}$$

dunque

$$l(p) = O(\xi) \quad \text{per } \xi \to +\infty. \tag{24}$$

Pel significato di $g(p)$, con $p$ dispari è $|a^{g(p)} - 1| \leqq p^r$ con $r \geqq 1$, quindi $a'^{g(p)} \geqq p^r - 1$, da cui

[7]) *T. Nagel*, l. c. in [4]).

[8]) Ved. per es. *M. Cipolla*, Teoria dei numeri. Analisi indeterminata, Enciclopedia Mat. elementari, vol. I°, Milano 1929, p. 281.

$$(25)\quad g(p) = \frac{r \log p}{\log a'} \frac{\log (p^r - 1)}{\log p^r} > \frac{r \log p}{\log a'} \left(1 + \frac{1}{(p^r - 1) \log (p^r - 1)}\right)^{-1} >$$
$$> \frac{r \log p}{\log a'} \left(1 + \frac{2}{p - 1}\right)^{-1}$$

e sostituendo nella (23) risulta subito

$$(26)\qquad l(p) \leqq \frac{K_1 \xi}{\log p}$$

essendo $K_1$ abbastanza grande, indipendente da $p$ e $\xi$. Aumentando eventualmente $K_1$, in base alla (24) si conclude che la (26) vale anche per il numero primo 2.

Sia adesso $p$ primo dispari non divisore di $D$; dalle (21) e (22), tenendo conto che è $h(p^i) = h(p)$ risulta

$$l(p) \leqq \frac{h(p)\,\xi}{g(p)} \left(r + \frac{1}{p-1}\right) + h(p) \frac{n \xi \log a' + \log \gamma'}{\log p},$$

e per la (25)

$$l(p) \leqq \frac{h(p)}{\log p} \left\{ (n+1)\, \xi \log a' + \frac{4 \xi \log a'}{p-1} + \log \gamma' \right\},$$

da cui

$$(27)\qquad l(p) \log p \leqq h(p) \left\{ (n+1)\, \xi \log a' + \frac{4 \xi \log a'}{p-1} + \log \gamma' \right\}.$$

**7.** Siamo adesso in grado di costruire un' espressione maggiorante di $\Phi(\xi)$, poiché, tenendo conto che gl' interi primi non superiori a $|D|$ sono in numero finito, per la (24) risulta

$$\Phi(\xi) = \sum_p l(p) \log p = O(\xi) + \sum_p{}' \, l(p) \log p$$

essendo la somma $\Sigma'$ estesa agl' interi $p$ primi dispari, maggiori di $|D|$. Posto $\eta = \alpha \xi \log \xi$, con $\alpha$ reale e positivo, denotiamo con $M_\alpha(\xi)$ il numero dei divisori primi distinti del prodotto $G(1)\, G(2) \ldots G([\xi])$ tutti maggiori di $\eta$; essendo $h(p) \leqq n$ e per ogni intero primo $p > \eta$

$$\frac{4 \xi \log a'}{p-1} + \log \gamma' < K_2 \quad \text{(indipendente da } p \text{ e } \xi)$$

abbiamo per la (27)

$$\Phi(\xi) \leqq O(\xi) + \sum_{p \leqq \eta}' l(p) \log p + M_\alpha(\xi) \{ n(n+1) \xi \log a' + n K_2 \}$$

$$\leqq O(\xi) + (n+1) \xi \log a' \sum_{p \leqq \eta}' h(p) + 4 \xi \log a' \sum_{p \leqq \eta}' \frac{h(p)}{p-1} +$$

$$+ \log \gamma' \sum_{p \leqq \eta}' h(p) + M_\alpha(\xi) \{ n(n+1) \xi \log a' + n K_2 \} ,$$

e per il Lemma $B$, essendo $\eta = \alpha \xi \log \xi$ e quindi anche

$$\sum_{p \leqq \eta}' h(p) = \alpha \xi + O\left( \frac{\xi \log \log \xi}{\log \xi} \right), \sum_{p \leqq \eta}' \frac{h(p)}{p-1} \leqq n \sum_{p \leqq \eta} \frac{1}{p-1} =$$
$$= O(\log \log \xi) ,$$

perveniamo alla limitazione

$$\Phi(\xi) \leqq \alpha (n+1) \xi^2 \log a' + O\left( \frac{\xi^2 \log \log \xi}{\log \xi} \right) +$$
$$+ M_\alpha(\xi) \{ n(n+1) \xi \log a' + n K_2 \} .$$

Dal confronto di questa con la (15) ricaviamo

$$M_\alpha(\xi) \leqq \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \alpha \right\} \xi + O\left( \frac{\xi \log \log \xi}{\log \xi} \right)$$

e il Lemma $C$ risulta dimostrato.

**8.** Dal Lemma $C$ segue immediatamente il Teorema $A$. Infatti osservando che è

$$\frac{c_s}{1 - a^{m_s} z} = c_s \{ 1 + a^{m_s} z + a^{2m_s} z^2 + \dots \}$$

si conclude che sviluppando la funzione $f(z)$ assegnata dalla (2) nella serie (1), basta assumere l'indice $k$ maggiore del grado di $g(z)$ per avere:

$$c_k' s_k = c_0 + c_1 a^{km_1} + c_2 a^{km_2} + \dots + c_h a^{km_h} \quad (c_k' \text{ opportuno divisore di } c)$$

quindi $c_x' s_x = F(a^x)$ dove si ponga $F(y) = c_0 + c_1 y^{m_1} + \dots + c_h y^{m_h}$ e si prenda $x > x_0$ conveniente. Scomposto il polinomio $F(y)$ nei suoi fattori irriducibili

$$F(y) = F_1(y) \; F_2(y) \dots F_t(y)$$

e detto $l_{s,x}(p)$ l'esponente della massima potenza di $p$ che divide il prodotto $F_s(1)\ F_s(2) \dots F_s(x)$ risulta per la (26)

$$l_{s,x}(p) \leqq \frac{K_s\, x}{\log p}$$

ed essendo $l_x(p) = l_{1,x}(p) + \dots + l_{t,x}(p)$ almeno per $x \geqq x_0$ e $p > c$ ne segue la proprietà (I).

In modo ovvio dalla (6) segue quanto si è affermato nell' Osservazione 1ª. del nº 2; ne risulta dimostrata anche la proprietà (II).

Il Teorema $A$ è dimostrato.

(Reçu le 3 janvier 1934)